CUBO 8 , 71-74 (1992)
Sexta Jornada de Matemática de la Zona Sur.

Trayectorias de un sistema de control lineal en $\mathbb{R}^n$ sobre variedades lineales de codimensión 1 y n-1.*

Víctor Delgado A.

1 Introducción.

Si en la descomposición de Jordan de una matriz A cada par de bloques tienen, respectivamente, valores propios distintos, entonces el sistema lineal controlable $\dot{x}= Ax+Bu, x$ en $\mathbb{R}^n, u$ en $\mathbb{R}^m$ puede transformarse en un sistema controlable con u en $\mathbb{R}$ el cual, a su vez, es equivalente al sistema canónico ([3]) :

$$\dot{x}= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \quad u \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Dada una variedad lineal M, se plantea el problema de determinar un control u de tal modo que la respectiva solución $x(t,u)$, con condición inicial $x(0,u) = x_0$, permanezca en M durante, a lo menos, un intervalo de tiempo $[0,T]$ con T positivo.

2 Resultados.

Proposición 2.1 . *Si m es un vector normal a una variedad lineal M de codimensión 1 y $x(t,u)$ permanece en M durante un tiempo finito, entonces u es de tipo realimentado y tiene la forma $u =< m, N^{n-k}(Ax) >$, donde $< .,. >$ es el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$ y N es una matriz nilpotente.*

Demostración. Sin perder generalidad puede suponerse que $m_k = -1$ es la última componente no nula de m. Si se denota $x(t,u) = (x_1,\cdots,x_n)$, $x(0,u) = (x_{01},\cdots,x_{0n}) = x_0$ entonces la relación $< x(t,u) - x_0, m >= 0$ para t en $[O,T]$, T positivo, implica que:

$$(x_1 - x_{01})m_1 + \cdots + (x_k - x_{0k})(-1) = 0 \tag{2}$$

*Proyecto S-90-33. Dirección de Investigación UACH.

Al derivar (2) y reemplazar en (1) se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1\, m_1 + \cdots + \dot{x}_k\,(-1) & = & 0 \\ \dot{x}_2\, m_1 + \cdots + \dot{x}_{k+1}\,(-1) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{x}_{n-k+2}\, m_1 + \cdots + \dot{x}_n\, m_{k-1} + \dot{x}_n\,(-1) & = & 0 \end{array}$$

pero $\dot{x}_n = < a, x > + u$ donde $a = (a_1, \cdots, a_n)$.

En consecuencia $u = < m, (x_{n-k+2}, \cdots, x_n, < a, x >, 0, \cdots, 0) >$, por lo tanto

$$u = < m, N^{n-k}(Ax) > \text{ donde } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Observación. Si en la proposición anterior $k = n$, es decir la última componente de m es -1, entonces $u = < m, Ax >$, esta expresión aparece implícita en [1] para el caso en que el sistema considerado es $\dot{x} = Ax + Bu$ y sin restricciones sobre la matriz A.

Ejemplo en $\mathbb{R}^3$: Sea $m = (m_1, -1, 0)$ normal a una variedad lineal M de codimensión 1, entonces
$u = < (m_1, -1, 0), N(A(x, y, z)^T) > = < (m_1, -1, 0), (z, < a, x^* >, 0 > = m_1 z - < a, x^* >$, donde $a = (a_1, a_2, a_3,), x^* = (x, y, z)$

Reemplazando u en el respectivo sistema canónico se obtiene $\dot{x} = y$, $\dot{y} = z$ $\dot{z} = m_1 z$ cuya solución es
$x = x_0 - \frac{z_0}{m_1^2} + (y_0 - \frac{z_0}{m_1})t + \frac{z_0}{m_1^2} e^{m_1 t}$
$y = y_0 - \frac{z_0}{m_1} + \frac{z_0}{m_1} e^{m_1 t}$
$z = z_0 e^{m_1 t}$.

Entonces $< (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0), m > = 0$ si y solo si $z_0 = m_1 y_0$ es decir la condición inicial debe pertenecer al plano $z = m_1 y$ (ver figura 1)

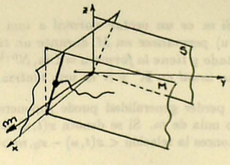

Figura 1.

Proposición 2.2 . *Si m es un vector que determina la dirección de una variedad lineal M de codimensión $n-1$ y $x(t,u)$ es una solución no trivial del sistema (1) que permanece en M durante un tiempo finito, entonces el control u es de tipo realimentado y las direcciones y condiciones iniciales factibles son, respectivamente, del tipo $m = (1, m_2, m_2^2, \ldots\ldots, m_2^{n-1})$, $x_0 = (x_{01}, x_{02}, m_2 x_{02} \ldots\ldots, m_2^{n-2} x_{02})$ donde m_2 es la segunda componente de m.*

Demostración. Sea m un vector no nulo que determina la dirección de M. El objetivo es determinar un control u tal que

$$x(t,u) = x_0 + \theta(t) \cdot m \quad \theta(0) = 0, \quad t \in [0,T], \quad T > 0 \tag{3}$$

Si la k-ésima componente de m es no nula entonces la componente anterior es no nula. En efecto, si $m_k \neq 0$ y $m_{k-1} = 0$ entonces al reemplazar (3) en (1) se obtiene que $\theta(t) = 0$ y, con ello, la solución trivial $x(t,u) = x_0 = (x_{01}, 0, \ldots, 0)$ con $u = -a_1 x_{01}$.

Si $m_2 \neq 0$ puede suponerse, sin perder generalidad, que $m_1 = 1$, entonces de $x_1 = x_{01} + \theta(t)$ y $x_2 = x_{02} + \theta(t) m_2$ se obtiene

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 = x_{02} + \theta m_2 \; ; \quad \theta(t) = \frac{a_2}{m_2}(e^{m_2 t} - 1) \tag{4}$$

reemplazando (4) en (1) resulta:

$$\begin{array}{rclcl}
\dot{x}_1 & = & x_{02} e^{m_2 t} & = & x_{02} + x_{02}(e^{m_2 t} - 1) \\
\dot{x}_2 & = & x_{02} m_2 e^{m_2 t} & = & x_{03} + \frac{m_3}{m_2} x_{02}(e^{m_2 t} - 1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\dot{x}_{n-1} & = & x_{02} m_2^{n-2} e^{m_2 t} & = & x_{0n} + \frac{m_n}{m_2} x_{02}(e^{m_2 t} - 1) \\
\dot{x}_n & = & x_{02} m_2^{n-1} e^{m_2 t} & = & < a, x > + u
\end{array}$$

En consecuencia $u = m_2^{n-1} x_2 - < a, x >$. Además:

$$\begin{array}{ll}
m_2 = \frac{m_3}{m_2} & x_{03} = \frac{m_3}{m_2} x_{02} = m_2 x_{02} \\
\vdots & \vdots \\
m_2^{n-2} = \frac{m_n}{m_2} & x_{0n} = \frac{m_n}{m_2} x_{02} = m_2^{n-2} x_{02}
\end{array}$$

de donde

$$m = (1, m_2, m_2^2, \cdots, m_2^{n-1})$$

$$x_0 = (x_{01}, x_{02}, m_2 x_{02}, \cdots, m_2^{n-2}, x_{02})$$

Finalmente, si $m_2 = 0$, es decir $m = (1, 0, \cdots, 0)$, resulta que $\theta(t) = x_{02} t$ y la condición inicial es de la forma $x_0(x_{01}, x_{02}, 0, \cdots, 0)$.

Observación. La factibilidad de m y de x_0 de la Proposición 2.2 se obtuvo en [2] como consecuencia de un teorema que relaciona la permanencia de soluciones de un sistema lineal $\dot{x} = Ax + Bu$ sobre variedades lineales M, con técnicas de subespacios vectoriales (A, B)−invariantes detalladas en [4].

Ejemplo en $\mathbb{R}^3$: Las direcciones factibles $m = (1, m_2, m_2^2)$ restringen las condiciones iniciales a la forma $x_0 = (a, b, m_2 b)$, es decir deben estar en el plano $z = m_2 y$ (Ver figura 2)

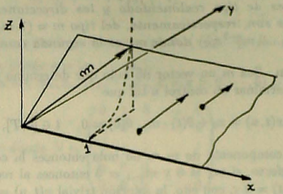

Figura 2.

Referencias

[1] Delgado V., *Controlabilidad direccional uniparamétrica en sistemas lineales*, Anales III CLAIO, Tomo 1 231-239 (1988).

[2] Henríquez H., Delgado V., San Martín M.E., Propiedades de invarianza de trayectorias para sistemas de control lineales, (enviado a revista Proyecciones U. C. del Norte).

[3] Lee E.B., Markus L., *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley, (1967).

[4] Wonham W.M., *Linear multivariable control*, Springer Verlag, (1985).

Dirección del autor:
Instituto de Matemáticas
Universidad Austral
Casilla 567-Valdivia