CUBO 10, 01-05 (1994)
Octava Jornada de Matemática de la Zona Sur.

Subproductos escalares no arquimedianos.

Alejandro Figueroa Cortés

Resumen

Este trabajo está en el contexto de Prolla [3]. Sea $(F, |\cdot|)$ un anillo división no trivialmente valuado y sea E un espacio vectorial (no trivial) sobre F. El autor determina condiciones suficientes sobre E para que exista un subproducto escalar no arquimediano (una restricción del concepto de subproducto escalar dado por Choquet [2]).

1 Introducción

Definición 1.1 *Sea E un espacio vectorial sobre un anillo valuado $(F, |\cdot|)$. Un subconjunto S de E se dice que es F-***convexo***, si se cumple lo siguiente:*

x, y, z en S y a, b, c en F con $a + b + c = 1$, $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, $|c| \leq 1$, implican que $ax + by + cz \in S$.

Definición 1.2 *Sea $(F, |\cdot|)$ un anillo división valuado. Un subconjunto S de E, E un espacio vectorial sobre F, se llama* **absorvente** *si, para cada $x \in E$, existe un $\delta > 0$ tal que para cada $a \in F$, $|a| \geq \delta$ implica $x \in aS$.*

Definición 1.3 *Sea $(F, |\cdot|)$ un anillo división valuado. Un subconjunto S de E de un espacio vectorial E sobre F se llama* **balanceado** *si aS es subconjunto de S para cada $|a| \leq 1$.*

Definición 1.4 *Sea E un espacio vectorial sobre un anillo de división F. Un subconjunto S de E se llama* **no-arquimediano** *si $S+S$ es subconjunto de S.*

Definición 1.5 *Sea E un espacio vectorial sobre $(F, |\cdot|)$. Una* **seminorma sobre** *E es una función $p: E \to I\!R$ tal que:*

(1) Para todo x en E : $p(x) \geq 0$

(2) Para todo x en E y todo a en F : $p(ax) = |a|p(x)$

(3) Para todo x, y en E, todo a en F : $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

Si además

(4) Para todo x, y en E : $p(x+y) \leq máx(p(x), p(y))$ entonces diremos que p es una seminorma no-arquimediana sobre E.

Definición 1.6 *(Choquet, [2]) Sea E un espacio vectorial sobre $(F, |\cdot|)$. Llamaremos* **subproducto escalar** *en E a toda función B de $E \times E$ en $I\!R^+ \cup \{0\}$ tal que:*

(1) Para todo x, y en E : $B(x, y) = B(y, x)$

(2) Para todo x, y en E y todo a en F : $B(ax, y) = |a|B(x, y)$

(3) Para todo x, y, z en E : $B(x+y, z) \leq B(x, z) + B(y, z)$

(4) Para todo x, y en E : $B^2(x, y) \leq B(x, x)B(y, y)$

2 Preliminares

Proposición 2.1 *Sea E un espacio vectorial sobre un anillo división valuado $(F, |\cdot|)$. Las siguientes son equivalentes para cualquier subconjunto S no vacío de E :*

(a) S es F-convexo y $0 \in S$;

(b) S es balanceado y no-arquimediano;

(c) x, y en S y a, b en F con $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$ implican que $ax + by \in S$

Demostración: Prolla [3], pag. 81. ■

Proposición 2.2 *Sea E un espacio vectorial sobre un anillo división no trivialmente valuado $(F, |\cdot|)$. Si existe un subconjunto V de E con $0 \in V$, absovente y F-convexo; entonces existe una seminorma no-arquimediana p sobre E tal que : $V_p(0, 1) \subset V \subset \bar{V}_p(0, 1)$. Si el valor absoluto de F es discreto, entonces $V = \bar{V}_p(0, 1)$*

Demostración: Prolla [3], pag. 85. ■

Observación: En proposición 2.2 cuando $(F, |\cdot|)$ es no trivialmente valuado y V es abierto, entonces la seminorma p definida allí es continua.

Demostración: Prolla [3], pag 87. ■

3 Resultados principales

Teorema 3.1 *Sea $(F, |\cdot|)$ un anillo división no trivialmente valuado y sea E un espacio vectorial (no trivial) sobre F. Si existe un subconjunto V de E con 0 en V, F-convexo, absorvente, entonces existe $B: E \times E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, no trivial, no constante, con las siguientes propiedades:*

(a) Para todo x, y en E: $B(x, y) = B(y, x)$

(b) Para todo x en E: $B(0, x) = B(x, 0) = 0$

(c) Para todo x, y, u en E: $B(x + y, u) \leq B(x, u) + B(y, u)$

(d) (Condición de no Arquimedianidad) Para todo x, y, u en E: $B(x + y, u) \leq máx(B(x, u), B(y, u))$

(e) Para todo x, y en E : $B^2(x, y) \leq B(x, x)B(y, y)$

(f) $B(0, 0) = 0$

(g) Para todo x, y en E y a en F: $B(ax, y) = |a|B(x, y)$.

Teorema 3.2 *Sea $(F, |\cdot|)$ un anillo división no trivialmente valuado y sea (E, τ) un espacio vectorial topológico (no trivial) sobre F. Si existe una vecindad V del 0 en E, F-convexa,*

Entonces existe $B: E \times E \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, continua, no trivial no constante, con las siguientes propiedades:

(a) Para todo x, y en E: $B(x, y) = B(y, x)$

(b) Para todo x en E: $B(0, x) = B(x, 0) = 0$

(c) Para todo x, y, u en E: $B(x + y, u) \leq B(x, u) + B(y, u)$

(d) (Condición de no Arquimedianidad) Para todo x, y, u en E: $B(x + y, u) \leq máx(B(x, u), B(y, u))$

(e) Para todo x, y en E : $B^2(x, y) \leq B(x, x)B(y, y)$

(f) $B(0, 0) = 0$

(g) Para todo x, y en E y a en F: $B(ax, y) = |a|B(x, y)$.

4 Demostración de los Teoremas

Demostración: (Teorema 3.1)

Sea $(F, |\cdot|)$ un anillo división no trivialmente valuado y sea E un espacio vectorial (no trivial) sobre F. Si existe un subconjunto V de E con 0 en V, F-convexo, absorvente, entonces se puede aplicar la proposición 2.2 de este trabajo y se concluye que:

Existe una seminorma $p\colon E \to I\!R^+ \cup \{0\}$ tal que $x \mapsto p(x)$ (no trivial). Definimos $B\colon E \times E \to I\!R^+ \cup \{0\}$ por $B(x,y) := p(x)p(y)$

(a) Sean x, y en E: $B(x,y) := p(x)p(y) = p(y)p(x) =: B(y,x)$

(b) Sea x en E: $B(x,0) := p(x)p(0) = p(x)0 = 0$

$B(0,x) := p(0)p(x) = 0p(x) = 0$

(c) Sean x, y, u en E: $B(x+y,u) := p(x+y)p(u) \leq (p(x)+p(y))p(u) = p(x)p(u) + p(y)p(u) =: B(x,u) + B(y,u)$

(d) Sean x, y, u en E: $B(x+y,u) = p(x+y)p(u) \leq (máx(p(x),p(y))p(u) = máx(p(x)p(u), p(y)p(u)) = máx(B(x,u), B(y,u))$

(e) Sean x, y en E : $B^2(x,y) = (p(x)p(y))^2 = (p(x))^2(p(y))^2 = (p(x)p(x))(p(y)p(y)) = B(x,x)B(y,y)$ luego $B^2(x,y) \leq B(x,x)B(y,y)$

(f) $B(0,0) = p(0)p(0) = 0 \cdot 0 = 0$

(g) Sean x, y en E y a en F: $B(ax,y) := p(ax)p(y) = |a|p(x)p(y) =: |a|B(x,y)$.

Además, por ser p una seminorma no trivial, existe un x_0 en E tal que $p(x_0) \neq 0$. Luego, $B(x_0,x_0) = p(x_0)p(x_0) \neq 0$ Por lo tanto, B es no constante y no trivial. ∎

Demostración: (Teorema 3.2)

Falta por demostrar que B es continua.

Teniendo presente la observación de este trabajo se tiene que si V es abierto, entonces la seminorma p es continua en E. Luego, $B(x,y) = p(x)p(y)$ es continua. ∎

Referencias

[1] Figueroa A. *Conjuntos r-convexos y subproductos escalares.* Comunicación presentada a la Jornada de Matemática de la zona sur, Universidad del Bío-Bío, Concepción, Mayo de **1991**.

[2] Choquet G. *Topología.* Toray-Masson **1971**.

[3] Prolla J.B. *Topics in Functional Analysis over valued division rings*, North Holland,Mathematics Studies 77, Notas Mateática, Ed. Leopoldo Nachbin, (**1982**).

[4] Van Rooij A.C.M. *Non archimedean, functional analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, **1978**.

Dirección del autor:

Alejandro Figueroa Cortés
Departamento de Matemática y Física
Universidad de Magallanes
Casilla 113-D. Punta Arenas