CUBO, A Mathematical Journal
Vol. 27, no. 2, pp. 179–189, Agosto 2025
DOI: 10.56754/0719-0646.2702.179

Pseudoinversos de morfismos entre variedades abelianas

Robert Auffarth[1]

[1] *Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile.*
`rfauffar@uchile.cl`

RESUMEN

Mostramos que a cada homomorfismo entre variedades abelianas polarizadas le podemos asociar lo que llamamos su homomorfismo pseudoinverso, el cual es la noción homóloga de la matriz de Moore-Penrose de una matriz compleja dada. Estudiamos algunas propiedades de este homomorfismo.

Palabras claves: Variedad abeliana, pseudoinversa, categoría de daga.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 14K20, 15A09, 15A10

Publicado: 08 de agosto de 2025
Aceptado: 24 de marzo de 2025
Recibido: 11 de septiembre de 2024

CUBO, A Mathematical Journal
Vol. 27, no. 2, pp. 179–189, August 2025
DOI: 10.56754/0719-0646.2702.179

Pseudoinverses of morphisms between Abelian varieties

Robert Auffarth[1]

[1] *Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile.*
`rfauffar@uchile.cl`

ABSTRACT

We show that to each homomorphism between polarized abelian varieties, we can associate its so-called pseudoinverse homomorphism, which can be seen as analogous to the Moore-Penrose matrix of a given complex matrix. We study some properties of this homomorphism.

Keywords and Phrases: Abelian variety, pseudoinverse, dagger category.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 14K20, 15A09, 15A10

Published: 08 August, 2025
Accepted: 24 March, 2025
Received: 11 September, 2024

1. Introducción

Al estudiar los toros complejos, es inevitable darse cuenta que prácticamente todo lo que se trabaja en ellos es *linealizable* en algún sentido. En palabras técnicas, al asignar a un toro complejo su espacio tangente en el origen, y al asignar a un homomorfismo entre toros su representación analítica, obtenemos un funtor fiel de la categoría de toros complejos a la categoría de espacios vectoriales. Ahora bien, lamentablemente la intuición de álgebra lineal muchas veces no sirve cuando estamos trabajando con toros complejos en toda su generalidad; sin embargo, cuando nos restringimos a aquellos toros que son a la vez variedades proyectivas (es decir, variedades abelianas), volvemos a recuperar esta intuición. Por ejemplo, si fijamos una polarización en un toro complejo, entonces obtenemos que todo subtoro tiene un subtoro complementario, ortogonal respecto a la polarización en algún sentido, de la misma forma que dada una forma sesquilineal no degenerada en un espacio vectorial, todo subespacio vectorial tiene su complemento ortogonal. Ejemplos de este tipo de buen comportamiento abundan en las variedades abelianas, y por otro lado comportamientos patológicos también abundan cuando nos extendemos al universo completo de toros complejos.

El propósito de este artículo es presentar un tal fenómeno que es conocido en álgebra lineal, pero hasta donde sabe el autor, no se ha estudiado para variedades abelianas. Este concepto es el de la *matriz pseudoinversa* de una matriz dada. Si $M \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ es una matriz compleja de $m \times n$, es conocido que posee una matriz *pseudoinversa* (a veces conocida como la *inversa de Moore-Penrose*) $M^+ \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ que se caracteriza por las siguientes propiedades:

1. $MM^+M = M$
2. $M^+MM^+ = M^+$
3. $(MM^+)^* = MM^+$
4. $(M^+M)^* = M^+M$.

Aquí M^* denota la matriz conjugada traspuesta de M. Si M es invertible, M^+ es claramente la matriz inversa de M.

En este artículo mostraremos que dadas dos variedades abelianas polarizadas (X, H_X) e (Y, H_Y), a cada elemento $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(X, Y) := \mathrm{Hom}(X, Y) \otimes \mathbb{Q}$ le podemos asociar un *homomorfismo pseudoinverso* $f^+ \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(Y, X)$ que también se caracteriza por propiedades similares a las descritas arriba (véase el Teorema 3.2). Mostraremos algunas propiedades de este pseudoinverso, y mostraremos, por ejemplo, que **no existe** en general cuando extendemos a toros complejos que no son variedades abelianas (véase la Observación 3.3). En otras palabras, siguiendo [3], la categoría de variedades abelianas es una categoría de daga de Moore-Penrose, pero la categoría de toros complejos no lo es. Finalmente, usaremos este pseudoinverso para calcular el idempotente simétrico de la suma e (componente conexa que contiene el 0 de la) intersección de dos subvariedades abelianas.

2. Preliminares

Recordemos y establezcamos algunas notaciones y resultados preliminares. En todo lo que sigue, un subíndice $\mathbb{Q}$ en un grupo abeliano denotará que estamos tensorizando el grupo con $\mathbb{Q}$ sobre $\mathbb{Z}$.

2.1. Variedades abelianas

Para nuestros propósitos, una *polarización* en un toro complejo $X = \mathbb{C}^g/\Lambda$ va a ser una forma hermitiana positiva definida $H : \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Im}(H)(\Lambda \times \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}$. En un toro complejo, toda forma diferencial real es cohomóloga a una forma constante, lo cual implica (véase [2, Lemma 1.3.1]) que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$H^k(X, \mathbb{Z}) \simeq \bigwedge^k H^1(X, \mathbb{Z}) \simeq \bigwedge^k \Lambda^\vee.$$

En particular, si H es una forma hermitiana en $\mathbb{C}^g$ tal que $\mathrm{Im}(H)(\Lambda \times \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}$, entonces la forma real alternante $\mathrm{Im}(H)$ induce naturalmente un elemento de $\bigwedge^2 \Lambda^\vee$ y luego de $H^2(X, \mathbb{Z})$. Es posible probar que H es una polarización si y sólo si es la primera clase de Chern de un fibrado en líneas amplio sobre X.

Para todo fibrado en líneas $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$, tenemos el morfismo

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{L}} : X &\to X^\vee := \mathrm{Pic}^0(X) \\ x &\mapsto t_x^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \end{aligned}$$

que resulta ser un homomorfismo de grupos por el Teorema del Cuadrado, y que depende solamente de la primera clase de Chern de $\mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}$ es amplio, entonces $\varphi_{\mathcal{L}}$ es una isogenia. Por esta razón, si H es una polarización en X, induce un morfismo $\varphi_H : X \to X^\vee$. Si H_X es una polarización en X y H_Y es una polarización en un toro Y, entonces inducen una *involución de Rosati*

$$\begin{aligned} \dagger : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(X, Y) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(Y, X) \\ f &\mapsto \varphi_{H_X}^{-1} f^\vee \varphi_{H_Y}. \end{aligned}$$

Si $X = Y$, usaremos siempre la misma polarización para definir la involución de Rosati. Un endomorfismo de X es *simétrico* si es un punto fijo de $\dagger$, y el grupo de endomorfismos simétricos de X se denotará por $\mathrm{End}^s(X)$. Es conocido (véase [2, Prop. 5.2.1]) que tenemos un isomorfismo de espacios vectoriales

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \to \mathrm{End}^s_{\mathbb{Q}}(X)$$
$$\alpha \mapsto \varphi_H^{-1}\varphi_\alpha,$$

y en todo el artículo identificaremos estos espacios vectoriales sin mayor explicación.

A cada homomorfismo $f : X \to Y$ le podemos asociar su *representación analítica* $\rho_a(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_0(X), T_0(Y))$, que en la mayoría de las circunstancias la interpretaremos simplemente como una matriz. Observamos que si fijamos polarizaciones en X e Y, entonces $\rho_a(f^\dagger) = \rho_a(f)^*$, donde $\rho_a(f)^*$ es la matriz adjunta de $\rho_a(f)^*$ respecto a las formas hermitianas dadas.

2.2. Pseudoinversas de matrices.

Como se describió en la introducción, si M es una matriz compleja de $m \times n$, existe una matriz M^+, llamada la *pseudoinversa* de M, que satisface las propiedades descritas. Una descripción geométrica de M^+ se puede obtener como sigue: Podemos escribir $\mathbb{C}^n = (\ker M) \oplus (\ker M)^\perp$ y $\mathbb{C}^m = \mathrm{im}(M) \oplus (\mathrm{im}(M))^\perp$, donde el espacio ortogonal se toma respecto a la forma hermitiana estándar de ambos espacios (*i.e.* con matriz identidad). Entonces M^+ se puede interpretar como la transformación lineal que restringida a $\mathrm{im}(M)$ es igual a $(M|_{(\ker M)^\perp})^{-1}$, y restringida a $\mathrm{im}(M)^\perp$ es 0. Es trivial verificar que efectivamente esta es precisamente la transformación lineal que cumple las propiedades descritas en la introducción. Usaremos esta descripción geométrica para definir un homomorfismo pseudoinverso en el contexto de variedades abelianas.

3. Pseudoinversos de homomorfismos entre variedades abelianas

Sean ahora (X, H_X) y (Y, H_Y) variedades abelianas polarizadas, y sea $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ un homomorfismo. Podemos escribir $X = \mathbb{C}^g/\Lambda_X$ y $Y = \mathbb{C}^h/\Lambda_Y$, y como se dijo en la introducción, interpretar H_X y H_Y como formas hermitianas positivas definidas en sus espacios vectoriales correspondientes. Sea $\rho_a(f) \in M_{h\times g}(\mathbb{C})$ la representación analítica de f; observemos que posee una matriz pseudoinversa $\rho_a(f)^+ \in M_{g\times h}(\mathbb{C})$ (donde ahora $*$, en vez de ser conjugación y trasposición, es la matriz adjunta respecto a las dos formas hermitianas).

Lema 3.1. *Existe $e \in \mathbb{N}$ tal que $e\rho_a(f)^+(\Lambda_Y) \subseteq \Lambda_X$; en otras palabras, $\rho_a(f)^+$ induce un $\mathbb{Q}$-homomorfismo $f^+ \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(Y, X)$.*

Demostración. Usaremos la descripción geométrica de la pseudoinversa descrita en la Subsección 2.2. Podemos descomponer $\mathbb{C}^g = \ker(\rho_a(f)) \oplus \ker(\rho_a(f))^\perp$ y $\mathbb{C}^h = \mathrm{im}(\rho_a(f)) \oplus \mathrm{im}(\rho_a(f))^\perp$, donde los complementos ortogonales se toman respecto a las formas hermitianas respectivas. Ahora tenemos que $\rho_a(f)^+$ restringido a $\mathrm{im}(\rho_a(f))$ es exactamente la inversa de la transformación lineal invertible $\rho_a(f)|_{\ker(\rho_a(f))^\perp}$, y $\rho_a(f)^+$ restringido a $\mathrm{im}(\rho_a(f))^\perp$ es 0.

Sea A la subvariedad abeliana complementaria de $(\ker f)^0$ con respecto a H_X, y sea B la subvariedad abeliana complementaria de $\mathrm{im}(f)$ con respecto a H_Y. Entonces f restringido a A es una isogenia con su imagen, y por lo tanto existe $j \in \mathrm{Hom}(\mathrm{im}(f), A)$ tal que $j \circ f|_A$ y $f \circ j$ son multiplicación por un entero t. Sea $m \in \mathbb{N}$ el exponente del grupo finito $\mathrm{im}(f) \cap B$, y sea $p \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ donde para $x \in \mathrm{im}(f)$, $p(x) = mj(x)$, y si $x \in B$, entonces $p(x) = 0$. Observemos que p está bien definida pues si $x \in \mathrm{im}(f) \cap B$, entonces $0 = p(x) = mj(x) = j(mx)$. Más aún, por construcción, $\rho_a(p) = n\rho_a(f)^+$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, y queda demostrado el lema. □

Esencialmente la misma demostración muestra que si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(X, Y)$, entonces podemos también definir f^+ en una manera similar. Obtenemos lo siguiente:

Teorema 3.2. *Dado $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(X, Y)$, existe un único $f^+ \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(Y, X)$ tal que*

1. $ff^+f = f$
2. $f^+ff^+ = f^+$
3. $(ff^+)^\dagger = ff^+$
4. $(f^+f)^\dagger = f^+f$.

En otras palabras, siguiendo lo definido en [3], la categoría de variedades abelianas polarizadas (y donde los morfismos no necesariamente preservan las polarizaciones) es una ***categoría de daga de Moore-Penrose****.*

Demostración. Esto sigue del análisis anterior, ya que dado $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(X, Y)$, podemos definir $f^+ \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(Y, X)$ tal que las representaciones complejas de f y f^+ satisfacen las condiciones (1), (2), (3) y (4) de la Introducción. Esto implica entonces que f y f^+ satisfacen las ecuaciones descritas en el enunciado del teorema. La unicidad sigue de la unicidad de la inversa de Moore-Penrose de la representación analítica de f, y como la representación analítica es una representación fiel de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(X, Y)$ en $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^g, \mathbb{C}^h)$, obtenemos lo buscado. □

Observación 3.3. *Esta construcción no se puede realizar en general para toros que no sean variedades abelianas. De hecho, ni siquiera debe existir un homomorfismo que cumpla las dos primeras propiedades del Teorema 3.2. Por ejemplo, sean T_1 y T_2 dos toros complejos de dimensión positiva con T_2 simple. Entonces por [1, Prop. 5.7, Cor. 6.3], existe un toro X (de hecho, una cantidad no numerable de toros) que cabe en una sucesión exacta*

$$0 \to T_1 \to X \xrightarrow{f} T_2 \to 0$$

y tal que T_1, visto como subtoro de X, no tiene un subtoro complementario. Si f^+ fuese un homomorfismo que cumple las primeras propiedades del Teorema 3.2, tendría que ser una $\mathbb{Q}$-isogenia entre T_2 y su imagen, y además por la simplicidad de T_2, o bien $f^+(T_2) \subseteq T_1$ o $f^+(T_2) \cap T_1 = 0$. En el primer caso, obtendríamos que $ff^+ = 0$, una contradicción por la propiedad (1) del Teorema 3.2. En el segundo caso, $f^+(T_2)$ sería un subtoro complementario para T_1, una contradicción.

Volvamos ahora al caso de variedades abelianas, usando la notación anterior. Notamos que cuando f es una isogenia, entonces f^+ es simplemente f^{-1}, el $\mathbb{Q}$-inverso de f.

Teorema 3.4. *Tenemos funciones bien definidas*

$$\begin{aligned} \Phi : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(X,Y) &\to \operatorname{End}^s_{\mathbb{Q}}(X) \simeq \operatorname{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \\ f &\mapsto f^+ f \\ \Psi : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(X,Y) &\to \operatorname{End}^s_{\mathbb{Q}}(Y) \simeq \operatorname{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \\ f &\mapsto f f^+, \end{aligned}$$

donde resulta que $\Phi(f)$ es el idempotente simétrico asociado a la subvariedad abeliana complementaria de $(\ker f)^0$ respecto a H_X, y $\Psi(f)$ es el idempotente simétrico asociado a la subvariedad abeliana $\operatorname{im}(f)$. Más aún, si $X = Y$ y $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ es punto fijo de Φ o de Ψ, entonces es también punto fijo del otro, y esto ocurre si y solamente si f es el idempotente simétrico asociado a la subvariedad abeliana $\operatorname{im}(f)$.

Demostración. Por la Propiedad (3) del Teorema 3.2, tenemos que efectivamente f^+f y ff^+ son endomorfismos simétricos respecto a la involución de Rosati. Más aún,

$$(f^+f)^2 = f^+ff^+f = f^+f$$

$$(ff^+)^2 = ff^+ff^+ = ff^+,$$

lo cual implica que son idempotentes. Por [2, Theorem 5.3.2], cada una de estas involuciones corresponde al idempotente simétrico de su imagen. Por la construcción de f^+ en la demostración del Lema 3.1, es claro que $\operatorname{im}(f^+f)$ es la subvariedad abeliana complementaria de $(\ker f)^0$ e

$\mathrm{im}(ff^+) = \mathrm{im}(f)$.

Ahora si $X = Y$ y $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ es tal que $\Phi(f) = f$, entonces $f^+f = f$, lo cual implica que $f = ff^+f = f^2$. Además, f entonces es simétrico respecto a la involución de Rosati. Por lo tanto, f es el idempotente simétrico de $\mathrm{im}(f)$, y por lo tanto $\Psi(f) = f$. Lo mismo ocurre si f es punto fijo de Ψ. $\square$

Notamos que f^+ "casi nunca" es un homomorfismo honesto, en el sentido de que casi nunca pertenece a $\mathrm{Hom}(Y, X)$ (aunque siempre es un $\mathbb{Q}$-homomorfismo):

Proposición 3.5. *Si $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, A es la subvariedad abeliana complementaria de $(\ker f)^0$ y B es la subvariedad abeliana complementaria de $\mathrm{im}(f)$, entonces f^+ es un homomorfismo honesto si y sólo si $A \cap \ker f = \{0\}$ e $\mathrm{im}(f) \cap B = \{0\}$. En particular, si o bien H_X o H_Y es indescomponible y f no es ni el homomorfismo 0 ni un isomorfismo, entonces f^+* ***nunca*** *es un homomorfismo honesto.*

Demostración. Por la construcción de f^+ en la demostración del Lema 3.1, tenemos que f^+ es un homomorfismo honesto solamente cuando f restringido a la subvariedad abeliana complementaria de $(\ker f)^0$ es un isomorfismo con su imagen (lo cual es equivalente a que esta restricción sea inyectiva), y la intersección entre la imagen de f y la subvariedad abeliana complementaria de la imagen de f es 0. Esta última condición inmediatamente implica que si f no es sobreyectivo, entonces H_Y es descomponible.

Tenemos entonces que f restringido a la subvariedad abeliana complementaria de $(\ker f)^0$ es inyectivo si y solamente si la intersección entre $\ker f$ y la subvariedad abeliana complementaria de $(\ker f)^0$ es trivial. $\square$

Terminamos esta sección observando, por el Teorema 3.2, que si $f \in \mathrm{End}^s_{\mathbb{Q}}(X)$, entonces $f^+ \in \mathrm{End}^s_{\mathbb{Q}}(X)$ también, ya que $(f^+)^\dagger = (f^\dagger)^+$. Esto implica que tenemos una involución (no lineal) $+ : \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \to \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$.

Ejemplo 3.6. *Trabajemos un ejemplo sencillo. Si consideramos $X = E^2$ con E una curva elíptica sin multiplicación compleja, entonces vía la representación analítica podemos identificar $\mathrm{End}(X) = M_2(\mathbb{Z})$. Ahora bien, en este caso la involución de Rosati es simplemente trasposición, y entonces podemos identificar $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(E^2)$ con las matrices simétricas de 2×2 con coeficientes en $\mathbb{Q}$, o equivalentemente, con $\mathbb{Q}^3$. Siguiendo los pasos anteriores para calcular $+ : \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \to \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$, obtenemos que si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, entonces*

$$+(a,b,c) = \begin{cases} \left(\dfrac{c}{ac-b^2}, \dfrac{-b}{ac-b^2}, \dfrac{a}{ac-b^2}\right) & \text{si } ac-b^2 \neq 0 \\ \left(\dfrac{a}{(a+c)^2}, \dfrac{b}{(a+c)^2}, \dfrac{c}{(a+c)^2}\right) & \text{si } ac-b^2 = 0 \end{cases}$$

Notamos entonces que, en caso que $ac - b^2 = 0$, tenemos

$$\Phi(a,b,c) = \Psi(a,b,c) = \left(\frac{a}{a+c}, \frac{b}{a+c}, \frac{c}{a+c}\right).$$

Más aún, tenemos que (a,b,c) es un punto fijo de estas funciones si y sólo si $a+c=1$. Por lo tanto, el conjunto de todos los idempotentes simétricos en E^2 que no sean la identidad está parametrizado por $(a,b,1-a)$, donde $b^2 = a(1-a)$. Ahora, si queremos encontrar idempotentes simétricos que no sean 0, entonces podemos parametrizar el círculo $b^2 = a(1-a)$ usando la proyección estereográfica desde el origen, y obtener que todas las soluciones son de la forma $(a,b) = \left(\frac{1}{t^2+1}, \frac{t}{t^2+1}\right)$. En conclusión, hay una biyección entre curvas elípticas en E^2 y los elementos del conjunto

$$\left\{\left(\frac{1}{t^2+1}, \frac{t}{t^2+1}, \frac{t^2}{t^2+1}\right) : t \in \mathbb{Q}\right\},$$

donde a cada racional $t \in \mathbb{Q}$, le podemos asociar la curva elíptica

$$E_t := \{(x,y) \in E^2 : tx = y\}.$$

Notamos que no está bien definida la división en una variedad abeliana, pero como los toros son grupos divisibles, sí está bien definida la ecuación anterior.

4. Intersecciones y sumas de subvariedades abelianas

Si (X,H) es una variedad abeliana polarizada y $A, B \subseteq X$ son subvariedades abelianas con idempotentes simétricos $\varepsilon_A, \varepsilon_B \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$, es natural preguntarse cómo obtener los idempotentes simétricos de $A+B$ y $(A \cap B)^0$. Usando el pseudoinverso y los resultados principales de [4], podemos encontrarlos:

Proposición 4.1. *Si $A, B \subseteq X$ son subvariedades abelianas (no necesariamente complementarias) y $\varepsilon_A^\perp = 1 - \varepsilon_A$ (y lo mismo para B), tenemos las siguientes identidades:*

1. *Suma:*

$$\begin{aligned} \varepsilon_{A+B} &= (\varepsilon_A + \varepsilon_B)(\varepsilon_A + \varepsilon_B)^+ \\ &= (\varepsilon_A + \varepsilon_B)^+(\varepsilon_A + \varepsilon_B) \\ &= \varepsilon_B + \left[(\varepsilon_A \varepsilon_B^\perp)^+(\varepsilon_A \varepsilon_B^\perp)\right] \\ &= \varepsilon_A + \varepsilon_A^\perp(\varepsilon_A^\perp \varepsilon_B)^+ \end{aligned}$$

2. *Intersección:*

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{(A\cap B)^0} &= 2\varepsilon_B(\varepsilon_A+\varepsilon_B)^+\varepsilon_A \\
&= 2(\varepsilon_A-\varepsilon_A(\varepsilon_A+\varepsilon_B)^+\varepsilon_A) \\
&= \varepsilon_A-(\varepsilon_A-\varepsilon_B\varepsilon_A)^+(\varepsilon_A-\varepsilon_B\varepsilon_A) \\
&= \varepsilon_A-(\varepsilon_B^\perp\varepsilon_A)^+(\varepsilon_B^\perp\varepsilon_A) \\
&= \varepsilon_A-\varepsilon_A(\varepsilon_A\varepsilon_B^\perp)^+.
\end{aligned}$$

En las identidades anteriores también se puede intercambiar A y B, claramente, para obtener nuevas identidades.

Demostración. Para demostrar estas identidades, primero es necesario observar que $T_0(A+B)=T_0(A)+T_0(B)$ y $T_0((A\cap B)^0)=T_0(A)\cap T_0(B)$ en $T_0(X)$. Esto implica que sólo es necesario encontrar las proyecciones ortogonales de $T_0(A+B)$ y $T_0(A)\cap T_0(B)$ respecto a H en términos de las proyecciones ortogonales de $T_0(A)$ y $T_0(B)$, ya que entonces estas proyecciones inducirían $\mathbb{Q}$-endomorfismos de X que serían idempotentes simétricos, y cuyas imágenes serían $A+B$ y $(A\cap B)^0$, respectivamente. Esto es precisamente lo que se hace en las demostraciones de los Teoremas 3 y 4 de [4], donde encuentran las identidades expuestas arriba para proyecciones ortogonales. Esto concluye la demostración. □

Sería interesante en el futuro seguir estudiando propiedades de $+$ como función del grupo de Néron-Severi en sí mismo, y ver si es posible usarla para descomponer variedades abelianas.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a los referees anónimos por sus valiosas sugerencias. Este trabajo fue parcialmente financiado por el proyecto ANID - Fondecyt 1220997 y por el proyecto Math-AmSud GV-BCEF 220010.

Referencias

[1] C. Birkenhake and H. Lange, *Complex tori*, ser. Prog. Math. Boston: Birkhäuser, 1999, vol. 177.

[2] C. Birkenhake and H. Lange, *Complex abelian varieties*, 2nd ed., ser. Grundlehren Math. Wiss. Berlin: Springer, 2004, vol. 302.

[3] R. Cockett and J.-S. Pacaud Lemay, "Moore-Penrose dagger categories," in *Proceedings of the 20th international conference on quantum physics and logic, QPL, Paris, France, July 17–21, 2023.* Waterloo: Open Publishing Association (OPA), 2023, pp. 171–186.

[4] R. Piziak, P. L. Odell, and R. Hahn, "Constructing projections on sums and intersections," *Comput. Math. Appl.*, vol. 37, no. 1, pp. 67–74, 1999.