CUBO, A Mathematical Journal
Vol. 27, no. 2, pp. 209–231, Agosto 2025
DOI: 10.56754/0719-0646.2702.209

Una observación sencilla sobre vectores de constantes de Riemann y divisores no-especiales de curvas generalizadas de Fermat

Rubén A. Hidalgo[1,✉]

[1] *Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile.*
ruben.hidalgo@ufrontera.cl✉

RESUMEN

Una superficie de Riemann cerrada S es llamada una curva generalizada de Fermat de tipo (k,n), donde $k,n \geq 2$ son enteros tales que $(k-1)(n-1) > 2$, si admite un grupo $H \cong \mathbb{Z}_k^n$ de automorfismos conformes de manera que el orbifold cociente S/H sea de género cero y tenga exactamente $n+1$ puntos cónicos, cada uno de ellos de orden k.

Si un elemento de H, de orden k, tiene puntos fijos, entonces tiene exactamente k^{n-1} puntos fijos, digamos $q_1, \ldots, q_{k^{n-1}} \in S$. Por cada q_j tenemos asociado su vector de constantes de Riemann $-2\mathcal{K}_{q_j} \in JS$, donde JS es la variedad jacobiana de S. Nuestra primera observación es que $\mathcal{K}_{q_1} + \cdots + \mathcal{K}_{q_{k^{n-1}}}$ es un punto de torsión de orden dos en JS.

Sea D un divisor efectivo de grado $g_{k,n}$, el género de S. Observamos que D no puede ser H-invariante. En el caso que D tenga soporte en los puntos fijos de los elementos no-triviales de H, entonces obtenemos condiciones algebraicas, necesarias y suficientes, para que D sea no-especial.

Palabras clave: Curvas algebraicas, superficies de Riemann, automorfismos.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 30F10, 14H37, 14H10, 14H45.

Publicado: 18 de agosto de 2025
Aceptado: 06 de mayo de 2025
Recibido: 03 de octubre de 2024

CUBO, A Mathematical Journal
Vol. 27, no. 2, pp. 209–231, August 2025
DOI: 10.56754/0719-0646.2702.209

A simple observation concerning the vector of Riemann constants and non-special divisors of generalized Fermat curves

Rubén A. Hidalgo[1,✉]

[1] *Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile.*
ruben.hidalgo@ufrontera.cl[✉]

ABSTRACT

A closed Riemann surface S is called a generalized Fermat curve of type (k,n), where $k,n \geq 2$ are integers such that $(k-1)(n-1) > 2$, if it admits a group $H \cong \mathbb{Z}_k^n$ of conformal automorphisms such that the quotient orbifold S/H has genus zero and has exactly $n+1$ conical points, each of them of order k.

If an element of H, of order k, has fixed points, then it has exactly k^{n-1} fixed points, say $q_1,\ldots,q_{k^{n-1}} \in S$. To each q_j we associate its vector of Riemann constants $-2\mathcal{K}_{q_j} \in JS$, where JS is the jacobian variety of S. Our first observation is that $\mathcal{K}_{q_1}+\cdots+\mathcal{K}_{q_{k^{n-1}}}$ is an order two torsion point in JS.

Let D be an effective divisor of degree $g_{k,n}$, the genus of S. We observe that D cannot be H-invariant. In the case that D is supported on the fixed points of the non-trivial elements of H, then we obtain algebraic conditions, necessary and sufficient, for D to be not-special.

Keywords and Phrases: Algebraic curves, Riemann surfaces, automorphisms.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 30F10, 14H37, 14H10, 14H45.

Published: 18 August, 2025
Accepted: 06 May, 2025
Received: 03 October, 2024

1. Introducción

Sea S una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$ y $\mathrm{Aut}(S)$ su grupo (finito) de automorfismos conformes (holomorfos). En la teoría general de superficies de Riemann, hay un interés en encontrar fórmulas tipo Thomae [16, 17] para cubrimientos (ramificados) Galois $\pi : S \to \widehat{\mathbb{C}}$, cuyo grupo de transformaciones de cubrimiento $A \leq \mathrm{Aut}(S)$ es abeliano (decimos que π es un cubrimiento abeliano). Con tal propósito, es importante encontrar divisores efectivos de grado g no-especiales que sean A-invariantes y cuyo soporte está contenido en el conjunto de los puntos fijos de los elementos no-triviales de A.

En el caso que S es hiperelíptica y $A \cong \mathbb{Z}_2$ es generado por la involución hiperelíptica, esto ha sido resuelto por Thomae [16,17] y Frobenius [7]. Una generalización se ha obtenido para algunos casos de superficies cíclicas n-gonales ($n \geq 2$) es decir, cuando $A \cong \mathbb{Z}_n$ y S/A tiene género cero (ver [8] en el caso n primo, y [1–4, 6, 15, 18] para el caso totalmente ramificado). En el caso general, en [14], se ha observado que, en caso de existir, un divisor efectivo en S que es A-invariante y de grado g es no-especial si y sólo si cierta relación algebraica se cumple. Además, tales divisores deben estar necesariamente soportados en los puntos fijos de los elementos no-triviales de A ([14, Theorem 4.4]). Desafortunadamente, no siempre pueden existir tales tipos de divisores. En este artículo, veremos pares (S, A) donde esta situación de no existencia ocurre.

Un par (S, H) es llamado un par generalizado de Fermat de tipo (k, n), donde $k, n \geq 2$ son enteros tales $(n-1)(k-1) > 2$, si $H \cong \mathbb{Z}_k^n$, y el orbifold cociente S/H es de género cero y con exactamemte $n+1$ puntos cónicos, cada uno de ellos de orden k. La superficie S (respectivamente, el grupo H) es llamada una curva generalizada de Fermat (respectivamente, un grupo generalizado de Fermat) de tipo (k, n). La fórmula de Riemann-Hurwitz asegura que S tiene género $g_{k,n} = 1 + \frac{k^{n-1}}{2}((n-1)(k-1)-2) \geq 5$. En [9], se observó que S es no-hiperelíptica y se construyó una ecuación algebraica para S, dada por un cierto producto fibrado de $(n-1)$ curvas clásicas de Fermat de grado k, y cuyos coeficientes son dados por los valores cónicos de S/H (Sección 3.2). En [12], se verificó que H es el único grupo generalizado de Fermat de tipo (k, n) en S (esta propiedad de unicidad permite, de cierto modo, mirar a S como un símil al caso de superficies hiperelípticas, donde H suple el rol del grupo generado por la involución hiperelíptica). De hecho, en [11], se verificó que S no puede tener otro grupo generalizado de Fermat de tipo (k', n') si $k' \neq k$ o $n' \neq n$. El grupo generalizado de Fermat H tiene un conjunto de generadores $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} \subset H$ que satisface lo siguiente:

(i) $a_1 \cdots a_{n+1} = 1$,

(ii) todo elemento no-trivial de H que tiene puntos fijos es potencia de alguno de los a_j, y

(iii) el ángulo de rotación de cada a_j en cada uno de sus puntos fijos es $2\pi i/k$.

Cada elemento a_j, donde $j = 1, \dots, n+1$, es llamado un generador estándar de H, y tiene exactamente k^{n-1} puntos fijos. El conjunto $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ se llama un conjunto estándar de generadores de H.

Notemos que la superficie generalizada de Fermat S es el cubriente homológico del orbifold de Riemann $\mathcal{O}_{k,n} = S/H$ (la esfera de Riemann con exactamente $n+1$ puntos cónicos, cada uno de orden k). La unicidad del grupo generalizado de Fermat es equivalente a decir que dos orbifolds $\mathcal{O}_{k,n}$ y $\mathcal{O}_{k',n'}$ son biholomórficamente equivalentes si y sólo si sus correspondientes cubrientes homológicos son biholomórficamente equivalentes (una especie de teorema de Torelli para orbifolds). Equivalentemente, si Γ_1 y Γ_2 son dos grupos Fuchsianos, digamos que Γ_j tiene firma $(0; k_j, \dots, k_j)$ para $j = 1, 2$, entonces $\Gamma_1 = \Gamma_2$ si y sólo si $\Gamma_1' = \Gamma_2'$, donde Γ_j' denota el subgrupo derivado de Γ_j.

Uno de los resultados de este trabajo permite notar que las ideas usadas en los casos de cubrimientos abelianos antes considerados (por ejemplo, los cíclicos y los abelianos que satisfacen las propiedades en [14]) no pueden ser usadas en el caso de los grupos de Fermat generalizados. En efecto, sea D un divisor efectivo de grado $g_{k,n}$ en S. En la Proposición 3.9, observamos que D no puede ser invariante bajo ningún subgrupo de H que contenga un elemento de orden $d \geq 2$, que no sea la potencia de algún generador estándar, en ninguna de las siguientes situaciones:

1. $d \geq 3$.
2. $d = 2$ y k es un múltiplo de 4.
3. $d = 2$ y $n \geq 3$.

En particular, lo anterior nos indica que D no puede ser H-invariante. Por lo que el resultado en [14, Theorem 4.4] en este caso no puede aplicarse y la búsqueda de Fórmulas tipo Thomae para los pares generalizados de Fermat no es fácil. Es importante notar en este punto, que la intención de este trabajo no es el obtener tales fórmulas para pares generalizados de Fermat. Nuestro propósito es notar que este tipo de cubrientes abelianos no es considerado, respecto a la búsqueda de fórmulas tipo Thomae, en los trabajos que hay en la literatura. Esperamos poder hacer tal estudio en un trabajo posterior.

En el Teorema 3.10, damos condiciones algebraicas necesarias y suficientes para que un divisor efectivo de grado $g_{k,n}$, cuyo soporte esté contenido en el conjunto de los puntos fijos de los generadores estándar, sea no-especial. Es posible encontrar tales divisores D que son invariantes por alguno de los generadores estándar (ver Ejemplos 2.1 y 3.11). En este caso, en el Teorema 3.13, indicamos condiciones necesarias y suficientes analíticas para que D sea no-especial.

Nuestra siguiente observación corresponde a los vectores de constantes de Riemann de los puntos fijos de un generador estándar. Asociado a la curva generalizada de Fermat S, de tipo (k, n), tenemos su espacio de diferenciales holomorfas $\mathrm{H}^{1,0}(S)$, que es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial complejo de dimensión $g_{k,n}$. Si $\mathrm{H}^{1,0}(S)^{\star}$ denota el espacio dual de $H^{1,0}(S)$, entonces S tiene asociada su variedad jacobiana $JS = \mathrm{H}^{1,0}(S)^{\star}/\mathrm{H}_1(S;\mathbb{Z})$, el cual es un toro complejo $g_{k,n}$-dimensional (que admite una polarización principal proveniente de la forma de intersección en homología). Cada punto $q \in S$ define una incrustación holomorfa $\varphi_q : S \to JS : p \mapsto \left[\int_q^p\right]$. Esta incrustación tiene la propiedad de que, si θ_1 and θ_2 son diferenciales meromorfas de S, entonces $\varphi_q((\theta_1)) = \varphi_q((\theta_2))$, donde (θ_j) denota el divisor asociado a θ_j. Este valor es denotado por $-2\mathcal{K}_q$ y es llamado el vector de constantes de Riemann asociado al punto q. En el Teorema 3.8, observamos que $\mathcal{K}_{q_1} + \cdots + \mathcal{K}_{q_{k^{n-1}}} \in JS$ es un punto de torsión de orden dos, donde $q_1, \ldots, q_{k^{n-1}}$ son los puntos fijos de un generador estándar. Esto generaliza la situación conocida para el caso de puntos fijos de automorfismos τ de una superficie de Riemann S tal que $S/\langle\tau\rangle$ es de género cero y donde cada punto fijo de una potencia no-trivial de τ también es punto fijo de τ (ver [18, Lema 2.2.]). Este tipo de resultados es de mucho interés en la teoría respecto a fórmulas de Thomae (ver, por ejemplo, [6, 18] para mayores detalles).

Notaciones

1. S denotará una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$ y $\mathrm{Aut}(S)$ su grupo de automorfismos conformes (holomorfos).

2. Si S es una curva generalizada de Fermat de tipo (k, n), entonces $H \cong \mathbb{Z}_k^n$ denotará su grupo generalizado de Fermat de tipo (k, n).

3. $\mathrm{Div}(S)$ denota el grupo abeliano de los divisores sobre S.

4. El grado del divisor $D \in \mathrm{Div}(S)$ es denotado por $\deg(D)$.

5. $\mathrm{Div}^d(S)$ denota al conjunto de divisores efectivos de grado d.

6. Si $f : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ es una función meromorfa no cero, entonces denotamos su divisor de ceros y polos por (f).

7. Si θ es una diferencial meromorfa diferente de cero, entonces denotamos su divisor de ceros y polos por (θ).

8. $L(-D)$ denota el espacio vectorial complejo que consiste, aparte de cero, de todas las funciones meromorfas f tal que $(f) + D$ es efectivo. Su dimensión es denotado por $r(-D)$.

9. $\Omega(D)$ denota el espacio vectorial complejo que consiste, aparte de la difencial cero, de todas las diferenciales meromorfas ω tal que $(\omega) - D$ es efectivo. Su dimensión es denotado por $i(D)$.

10. JS denota la variedad jacobiana de S.

11. Si $q \in S$, entonces $-2\mathcal{K}_q \in JS$ denota su vector de constantes de Riemann.

12. $C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}}$ denota una curva generalizada de Fermat de tipo (k,n) determinada por los puntos $\infty, 0, 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$,y $H_0 \cong \mathbb{Z}_k^n$ su grupo generalizado de Fermat. Sus generadores estándar serán denotados por $a_1, \ldots, a_{n+1}$.

13. Para cada generador estándar a_j, denotaremos por $\mathrm{Fix}(a_j)$ tanto a su conjunto de puntos fijos como al correspondiente divisor.

14. $\theta_{r;\alpha_3,\ldots,\alpha_{n+1}}$ denota la diferencial meromorfa de $C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}}$ cuyo divisor es dado por $\left(\theta_{r;\alpha_3,\ldots,\alpha_{n+1}}\right) = (\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n+1} - 2 - r)\mathrm{Fix}(a_1) + r\mathrm{Fix}(a_2) + \sum_{j=3}^{n+1}(k-1-\alpha_j)\mathrm{Fix}(a_j)$.

15. $I_{k,n} = \{(r;\alpha_3,\ldots,\alpha_{n+1}); \alpha_j \in \{0,1,\ldots,k-1\},\ 0 \le r \le \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n+1} - 2\}$.

2. Preliminares

En el resto de esta sección, S denotará una superficie de Riemann cerrada de género $g \ge 1$.

2.1. Divisores

Denotaremos por $\mathrm{Div}(S)$ el grupo abeliano de los divisores de S, es decir, el grupo abeliano libre generado por los puntos de S. Si $D \in \mathrm{Div}(S)$, entonces $\nu_q(D) \in \mathbb{Z}$ es el valor tal que $D = D_0 + \nu_q(D)q$, donde D_0 está soportado en $S - \{q\}$. El grado de D es definido como $\deg(D) = \sum_{q\in S} \nu_q(D)$. En el caso de que, para cada $q \in S$, se cumpla que $\nu_q(D) \ge 0$, diremos que el divisor es efectivo, denotado por $D \ge 0$. Denotaremos por $\mathrm{Div}^d(S)$ al conjunto de los divisores efectivos de grado $d \ge 1$; el cual resulta ser una variedad compleja compacta de dimensión d. Si $f : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ es una función meromorfa y diferente de cero (respectivamente, si θ es una forma diferencial meromorfa y diferente de cero en S), entonces denotaremos por (f) (respectivamente, (θ)) a su divisor que codifica sus ceros y polos contando sus respectivas multiplicidades.

2.2. Divisores no-especiales

2.2.1.

Cada divisor $D \in \mathrm{Div}(S)$ tiene asociado un $\mathbb{C}$-espacio vectorial $L(-D)$ (respectivamente $\Omega(D)$) de dimensión $r(-D)$ (respectivamente, $i(D)$) que consiste, aparte del cero, de todas las funciones meromorfas $f : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ tales que $(f) + D \ge 0$ (respectivamente, formas meromorfas θ tales que $(\omega) \ge D$). El Teorema de Riemann-Roch nos dice que $r(-D) = \deg(D) - g + 1 + i(D)$.

2.2.2.

Supongamos, en lo que sigue, que $D \geq 0$. Lo anterior nos dice que $r(-D) \geq 1$ (ya que en $L(-D)$ están las funciones constantes), en otras palabras, $i(D) \geq g - \deg(D)$.

Cuando $i(D) = 0$ se dice que D es un divisor no-especial (en caso contrario, un divisor especial). Luego, (i) si $\deg(D) < g$, entonces D es especial, y (ii) si $\deg(D) = g$, entonces D es no-especial si y sólo si $r(-D) = 1$.

2.3. Divisores invariantes por acción de grupos

Supongamos que tenemos un grupo finito G de automorfismos conformes de S. En este caso, $R = S/G$ resulta ser un orbifold de Riemann (una superficie de Riemann junto a una colección finita de puntos con pesos enteros positivos). Sea $\pi : S \to R$ un cubrimiento ramificado holomorfo cuyo grupo de transformaciones cobertoras es G, es decir, $\pi(x) = \pi(y)$ si y sólo si existe $\tau \in G$ tal que $\tau(x) = y$.

Sea $\gamma \geq 0$ el género de R y sean $q_1, \ldots, q_n \in R$ los valores de ramificación de π, es decir, la proyección de los puntos de S con G-estabilizador no-trivial. Si $p \in \pi^{-1}(q_j)$, entonces el G-estabilizador de p es un grupo cíclico de un orden $k_j \geq 2$ que divide al orden $|G|$ de G. Dos puntos cualesquiera en la π-preimagen de q_j tienen G-estabilizadores que son G-conjugados. La fórmula de Riemann-Hurwitz dice que

$$g = 1 + |G|(\gamma - 1) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{|G|}{k_j}(k_j - 1).$$

Sea $D \geq 0$ un divisor que sea G-invariante (es decir, G permuta los puntos del soporte de D y deja invariantes los pesos correspondientes). En tal caso, D debe tener la siguiente forma:

$$D = l_1\pi^{-1}(p_1) + \cdots + l_s\pi^{-1}(p_s) + m_1\pi^{-1}(q_1) + \cdots + m_n\pi^{-1}(q_n),$$

donde $p_1, \ldots, p_s \in R \setminus \{q_1, \ldots, q_n\}$, $l_1, \ldots, l_s, m_1, \ldots, m_n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, y $\pi^{-1}(y)$ denota el divisor cuyo soporte son los puntos en la π-preimagen de $y \in R$ (cada uno con peso igual a 1). De esta manera,

$$\deg(D) = (l_1 + \cdots + l_s)|G| + \sum_{j=1} m_j \frac{|G|}{k_j}.$$

La condición

$$\deg(D) = g$$

es entonces equivalente a la siguiente igualdad

$$2k = \left(2k(l_1 + \cdots + l_s + 1 - \gamma) + \sum_{j=1}^{n}(2m_j - k_j + 1)\widehat{k}_j\right)|G|, \tag{2.1}$$

donde

$$k = \mathrm{mcm}(k_1, \ldots, k_n), \quad \widehat{k}_j = k/k_j.$$

Notemos que, si $|G|$ es impar, entonces la igualdad (2.1) asegura que $|G|$ divide a k.

Ejemplo 2.1. *Supongamos que $k_1 = \cdots = k_n = k \geq 2$. En este caso, $\widehat{k}_j = 1$ y la igualdad (2.1) es en este caso*

$$2k = \left(2k(l_1 + \cdots + l_s + 1 - \gamma) - n(k-1) + 2\sum_{j=1}^{n} m_j\right)|G|.$$

Como k divide a $|G|$, tenemos dos posibilidades:

1. *$|G| = k$, en cuyo caso $G \cong \mathbb{Z}_k$ y $2k(l_1 + \cdots + l_s + 1 - \gamma) - n(k-1) + 2\sum_{j=1}^{n} m_j = 2$.*
2. *$|G| = 2k$ y $2k(l_1 + \cdots + l_s + 1 - \gamma) - n(k-1) + 2\sum_{j=1}^{n} m_j = 1$.*

Este ejemplo nos dice, por ejemplo, que si $|G| \notin \{k, 2k\}$, entonces no existen divisores efectivos de grado g que sean G-invariantes.

2.4. Vectores de constantes de Riemann

2.4.1.

El primer grupo de homología $\mathrm{H}_1(S;\mathbb{Z})$ se puede incrustar como un reticulado en $\mathrm{H}^{1,0}(S)^\star$ por medio del proceso de integración de formas diferenciales $\alpha \mapsto \int_\alpha$. El toro complejo g-dimensional $JS = \mathrm{H}^{1,0}(S)^\star/\mathrm{H}_1(S;\mathbb{Z})$ se llama la variedad jacobiana de S. La forma de intersección en homología determina una polarización principal en JS.

2.4.2.

Para cada punto $q \in S$, tenemos su función de Abel-Jacobi

$$\varphi_q : S \to JS : p \mapsto \left[\int_q^p\right],$$

la cual produce una incrustación holomorfa de S en JS. Esta función se extiende de manera natural a una función holomorfa sobreyectiva $\varphi_q : \mathrm{Div}(S) \to JS$, la cual es un homomorfismo de grupos abelianos. Su restricción a la variedad compleja compacta $\mathrm{Div}^d(S)$ es holomorfa.

Por el teorema de inversión de Abel-Jacobi, $\varphi_q : \mathrm{Div}^{(g)}(S) \to JS$ es sobreyectiva, y cualquier par de divisores diferentes $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}^{(g)}(S)$ son enviados al mismo punto si y sólo si $D_1 - D_2$ es un divisor principal (es decir, $D_1 - D_2 = (f)$, para alguna función meromorfa no-constante $f : S \to \widehat{\mathbb{C}}$).

2.4.3.

Consideremos dos formas meromorfas $\theta_1, \theta_2 \neq 0$ en S. Como θ_1/θ_2 es una función meromorfa de S, entonces $\varphi_q((\theta_1)) = \varphi_q((\theta_2))$. De esta manera, el valor $\varphi_q((\theta)) \in JS$ no depende de la diferencial meromorfa $\theta \neq 0$ usada. Tal valor es denotado por $-2\mathcal{K}_q \in JS$ y es llamado el vector de constantes de Riemann associado al punto q.

2.4.4.

Si $h \in \mathrm{Aut}(S)$, entonces el pull-back de formas holomorfas $h^* : H^{1,0}(S) \to H^{1,0}(S)$ induce un automorfismo holomorfo $T_h : JS \to JS : [L] \mapsto [L \circ h^*]$. En particular, por el proceso de cambio de base, para $q \in S$, se cumple que

$$\varphi_{h(q)}(h(p))(\theta) = \left[\int_{h(q)}^{h(p)} \theta\right] = \left[\int_q^p h^*\theta\right] = \varphi_q(p)(h^*\theta) = T_h(\varphi_q(p))(\theta),$$

es decir,

$$T_h \circ \varphi_q = \varphi_{h(q)} \circ h.$$

2.5. Divisores no-especiales y funciones theta

Cada base simpléctica de $\mathrm{H}_1(S;\mathbb{Z})$ tiene asociada su matriz de periodos $Z \in \mathcal{H}_g$ (espacio de Siegel de las matrices complejas simétricas de tamaño $g \times g$ con parte imaginaria positiva definida). Esto permite obtener un modelo explícito $JS = \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^g \oplus Z\mathbb{Z}^g$.

Cada par $\epsilon, \epsilon' \in \mathbb{Z}^g$ tiene asociada la función theta de primer orden con característica $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix}$ definida por

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (z;\Pi) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^g} \exp\left\{2\pi i \left[\frac{1}{2}\left(N + \frac{\epsilon}{2}\right)^t z \left(N + \frac{\epsilon}{2}\right) + \left(N + \frac{\epsilon}{2}\right)^t \left(N + \frac{\epsilon'}{2}\right)\right]\right\},$$

la cual es una función holomorfa definida sobre $\mathbb{C}^g$ (la función theta clásica θ corresponde a

$\epsilon = \epsilon' = 0$). Más detalles y propiedades sobre funciones theta se pueden encontrar, por ejemplo, en los libros [5, 6].

Como consecuencia del teorema de anulación de Riemann (Riemann Vanishing theorem [5, pág. 308], [6, pág. 17]), para cada $e \in JS$, la función holomorfa multivaluada

$$f_{q,e} := \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\varphi_q - e; \Pi) : S \to JS$$

es:

(i) idénticamente cero, o bien

(ii) tiene precisamente g ceros (contados con multiplicidades).

Ya que $\varphi_q : \mathrm{Div}^{(g)}(S) \to JS$ es sobreyectiva, existe algún divisor efectivo $D \in \mathrm{Div}^{(g)}(S)$ tal que $\varphi_q(D) = e - \mathcal{K}_q$.

En [6], se probó que $f_{q,e}$ es idénticamente cero si y sólo si D es especial.

Supongamos que $f_{q,e}$ no es cero, esto es, D es no-especial. Si $p_1, \ldots, p_g$ son los g ceros de $f_{q,e}$, entonces el divisor $p_1 + \cdots + p_g \in \mathrm{Div}^{(g)}(S)$ satisface que $\varphi_q(p_1 + \cdots + p_g) = e - \mathcal{K}_q = \varphi_q(D)$ (ver [5, 6]); luego, $D = p_1 + \cdots + p_g$ (módulo divisores principales).

3. Curvas generalizadas de Fermat

En esta sección, S será una curva generalizada de Fermat de tipo (k, n), donde $k, n \geq 2$ son enteros tales que $(n-1)(k-1) > 2$, y $H \cong \mathbb{Z}_k^n$ su grupo (único [12]) generalizado de Fermat de tipo (k, n). Al par (S, H) le llamamos un par generalizado de Fermat de tipo (k, n).

Sea $\pi : S \to \widehat{\mathbb{C}}$ un cubrimiento ramificado Galois con grupo cobertor H. Componiendo π a la izquierda por alguna transformación de Möbius, podemos asumir que los valores de ramificación de π son dados por los puntos ∞, 0, 1, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-2}$, donde (i) $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, y (ii) $\lambda_j \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

3.1. Uniformización Fuchsiana

Por el teorema de uniformización, hay un grupo Fuchsiano (único módulo conjugación en $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$)

$$\Gamma = \left\langle x_1, \ldots, x_{n+1} : x_1^k = \cdots = x_{n+1}^k = x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = 1 \right\rangle < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}),$$

de manera que $S/H = \mathbb{H}^2/\Gamma$. En [9], se observó la existencia de un biholomorfismo $\varphi : S \to \mathbb{H}^2/\Gamma'$, donde Γ' es el grupo derivado (es decir, el subgrupo generado por los conmutadores) de Γ. Por la unicidad del grupo generalizado de Fermat, φ conjuga H en Γ/Γ'.

3.2. Descripción algebraica

Las condiciones sobre los valores λ_j aseguran que

$$C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}} = \left\{ \begin{array}{rcl} x_1^k + x_2^k + x_3^k & = & 0 \\ \lambda_1 x_1^k + x_2^k + x_4^k & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-2} x_1^k + x_2^k + x_{n+1}^k & = & 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \tag{3.1}$$

es una curva algebraica irreducible y suave (es decir, una superficie de Riemann cerrada). Esta admite al grupo $H_0 = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \cong \mathbb{Z}_k^n$,

$$a_j([x_1 : \cdots : x_{n+1}]) = [x_1 : \cdots : x_{j-1} : \omega_k x_j : x_{j+1} : \cdots : x_{n+1}],$$

donde $\omega_k = e^{2\pi i/k}$, como un grupo de automorfismos holomorfos. Más aún, la función $\pi([x_1 : \cdots : x_n]) = -\left(x_2/x_1\right)^k$ es un cubrimiento ramificado Galois con H_0 como grupo cobertor y cuyos valores de ramificación son ∞, 0, 1, λ_1,..., λ_{n-2}. En particular, $(C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}}, H_0)$ es un par generalizado de Fermat de tipo (k, n). En [9], se observó que existe un biholomorfismo $\phi : S \to C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}}$ (que necesariamente conjuga H en H_0 por la unicidad de los grupos generalizados de Fermat). En este modelo algebraico, los elementos $a_1, \ldots, a_{n+1}$ corresponden a los generadores estándar.

Observación 3.1. *Si $T \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ y*

$$\{T(\infty), T(0), T(1), T(\lambda_1), \ldots, T(\lambda_{n-2})\} = \{\infty, 0, 1, \mu_1, \ldots, \mu_{n-2}\},$$

entonces $C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}}$ y $C^k_{\mu_1,\ldots,\mu_{n-2}}$ son biholomorfas.

3.3. El cuerpo de las funciones meromorfas

Para cada $j = 2, \ldots, n+1$, la función meromorfa

$$y_j = \frac{x_j}{x_1} : C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}} \to \widehat{\mathbb{C}},$$

tiene como sus ceros a los puntos fijos de a_j y como sus polos a los puntos fijos de a_1. Esta función y_j define un cubrimiento ramificado Galois de grado k^{n-1}, cuyo grupo cobertor es

$$\mathrm{deck}(y_j) = \langle a_2, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_{n+1} \rangle \cong \mathbb{Z}_k^{n-1}.$$

En lo que sigue, denotaremos $z := y_2$ y $\lambda_0 = 1$.

El sistema algebraico (3.1) asegura la igualdad

$$\lambda_{j-3} + z^k + y_j^k = 0. \tag{3.2}$$

Se tiene que $z, y_3, \ldots, y_{n+1}$ generan al cuerpo de las funciones meromorfas de $C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}}$;

$$\mathbb{C}(C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}}) = \bigoplus_{0\leq\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}\leq k-1} \mathbb{C}(z)\; y_3^{\alpha_3} y_4^{\alpha_4} \cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}.$$

Observación 3.2. *La acción de H sobre los generadores anteriores es dada por ($a_j^* f := f \circ a_j$):*

$$\left\{ \begin{array}{c} a_1^* z = \omega_k^{-1} z,\ a_2^* z = \omega_k z,\ a_j^* z = z, \quad j \in \{3,\ldots,n+1\}; \\ a_1^* y_l = \omega_k^{-1} y_l,\ a_l^* y_l = \omega_k y_l,\ a_j^* y_l = y_l, \quad j \in \{2,3,\ldots,n+1\} - \{l\}. \end{array} \right\}$$

En particular, cada factor $\mathbb{C}(z)\; y_3^{\alpha_3} y_4^{\alpha_4} \cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$ es H-invariante.

3.4. Divisores de los puntos fijos

Si el conjunto de puntos fijos de a_j es $\{p_{j,1}, \ldots, p_{j,k^{n-1}}\}$, entonces consideramos su correspondiente divisor de puntos fijos:

$$\mathrm{Fix}(a_j) = \sum_{i=1}^{k^{n-1}} p_{j,i} \in \mathrm{Div}(C_n^k), \quad j = 1, \ldots, n+1. \tag{3.3}$$

Observación 3.3. *Algunas veces usaremos la notación $\mathrm{Fix}(a_j)$ (por abuso de lenguaje) para denotar al divisor anterior o simplemente al conjunto de puntos fijos de a_j.*

Notemos que, para $j = 2, \ldots, n+1$,

$$(y_j) = \mathrm{Fix}(a_j) - \mathrm{Fix}(a_1).$$

En particular, para $i \neq j \in \{1, \ldots, n+1\}$, el divisor de la función meromorfa $y_{ji} := y_j/y_i$ es

$$(y_{ji}) = \mathrm{Fix}(a_j) - \mathrm{Fix}(a_i).$$

3.5. El espacio de las diferenciales meromorfas

Como dz es una diferencial meromorfa de $C^k_{\lambda_1,\dots,\lambda_{n-2}}$, por lo visto en la sección anterior, su espacio de diferenciales meromorfas es

$$\mathcal{M}(C^k_{\lambda_1,\dots,\lambda_{n-2}}) = \bigoplus_{0\leq\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\leq k-1} \mathbb{C}(z)\frac{dz}{y_3^{\alpha_3}y_4^{\alpha_4}\cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}}.$$

La función meromorfa z es cubrimiento ramificado Galois de grado k^{n-1}, cuyos puntos críticos son los puntos fijos de los elementos $a_3,\dots,a_{n+1}$, cada uno de orden k. Los valores de ramificación de z están dados por las k-raíces de los puntos $-1,-\lambda_1,\dots,-\lambda_{n-2}$. En particular,

$$(dz) = \sum_{j=3}^{n+1}(k-1)\mathrm{Fix}(a_j) - 2\mathrm{Fix}(a_1), \quad (dy_{ji}) = \sum_{s\neq i,j}^{n+1}(k-1)\mathrm{Fix}(a_s) - 2\mathrm{Fix}(a_i).$$

Si $r\in\mathbb{Z}$ y $(\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1})\in\{0,1,\dots,k-1\}^{n-1}$, entonces podemos formar la diferencial meromorfa

$$\theta_{r;\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}} = \frac{z^r dz}{y_3^{\alpha_3}y_4^{\alpha_4}\cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}}, \tag{3.4}$$

cuyo divisor es

$$\left(\theta_{r;\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}}\right) = (\alpha_3+\cdots+\alpha_{n+1}-2-r)\mathrm{Fix}(a_1) + r\mathrm{Fix}(a_2) + \sum_{j=3}^{n+1}(k-1-\alpha_j)\mathrm{Fix}(a_j). \tag{3.5}$$

Observación 3.4. *De la Observación 3.2, podemos ver que la acción por pull-back por elementos de H en las diferenciales anteriores es dada por:*

$$a_j^*(\theta_{r;\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}}) = \begin{cases} \omega_k^{-(r+1)+(\alpha_3+\cdots+\alpha_{n+1})}\theta_{r;\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}}, & j=1,\\ \omega_k^{r+1}\theta_{r;\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}}, & j=2,\\ \omega_k^{-\alpha_j}\theta_{r;\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}}, & j\in\{3,\dots,n+1\}.\end{cases}$$

Teorema 3.5 ([10])**.** *La colección*

$$\mathcal{B}^{can} := \{\theta_{r;\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1}}\}_{(r;\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1})\in I_{k,n}},$$

donde $I_{k,n} = \{(r;\alpha_3,\dots,\alpha_{n+1});\alpha_j\in\{0,1,\dots,k-1\},\ 0\leq r\leq \alpha_3+\cdots+\alpha_{n+1}-2\}$, define una base para $H^{1,0}(C^k_{\lambda_1,\dots,\lambda_{n-2}})$, llamada la base estándar.

Observación 3.6 (Conexión con la incrustación canónica)**.** *Consideremos la base estándar del Teorema 3.5. Esta base induce una incrustación canónica (incrustación canónica estándar)*

$$\iota_{\mathcal{B}^{can}} : C^k_{\lambda_1,\dots,\lambda_{n-2}} \hookrightarrow \mathbb{P}^{g_{k,n}-1}_{\mathbb{C}}.$$

En [10], se verificó la existencia de una sub-colección $\{\theta_1, \ldots, \theta_{n+1}\}$ *de* $\mathcal{B}^{can}$*, de manera que*

$$\widehat{\iota}_{\mathcal{B}^{can}} : C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}} \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} : [x_1 : \cdots : x_{n+1}] \mapsto [\theta_1 : \cdots : \theta_{n+1}]$$

es la función identidad.

Observación 3.7. *Usando la Observación 3.4, junto al Teorema 3.5, es posible describir explícitamente la acción de* H_0 *en el espacio* $H^{q,0}(C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}})$ *de las* q*-diferenciales holomorfas [13].*

3.6. Sobre el vector de constantes de Riemann

Nuestra primera observación, es dada en el siguiente.

Teorema 3.8. *Sea* (S, H) *un par generalizado de Fermat de tipo* (k, n)*,* $(k-1)(n-1) > 2$*. Sean* $q_1, \ldots, q_{k^{n-1}}$ *los puntos fijos de un generador estándar. Entonces,* $\mathcal{K}_{q_1} + \cdots + \mathcal{K}_{q_{k^{n-1}}}$ *es un punto de torsión de orden* 2 *de* JS*.*

Demostración. Podemos asumir que $S = C^k_n := C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}}$ y $H = H_0 = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, donde $a_1, \ldots, a_{n+1}$ son los generadores estándar.

Recordemos que, si $q \in C^k_n$, entonces $\varphi_q((dz)) = -2\mathcal{K}_q$. Como

$$(dz) = \sum_{j=3}^{n+1} (k-1)\mathrm{Fix}(a_j) - 2\mathrm{Fix}(a_1),$$

y, para $i \neq j$, cada divisor de la forma $\mathrm{Fix}(a_i) - \mathrm{Fix}(a_j)$ es principal, se tiene la igualdad

$$-2\mathcal{K}_q = ((n-1)(k-1) - 2)\ \varphi_q(\mathrm{Fix}(a_j)), \quad j = 1, \ldots, n+1. \tag{3.6}$$

Sea $\alpha = (n-1)(k-1) - 2$. Tenemos las siguientes igualdades (obtenidas de (3.6))

$$\begin{aligned}
-2\mathcal{K}_{q_1} &= \alpha\varphi_{q_1}(q_1 + \cdots + q_{k^{n-1}}) = \alpha\varphi_{q_1}(q_1) + \cdots + \alpha\varphi_{q_1}(q_{k^{n-1}}) \\
-2\mathcal{K}_{q_2} &= \alpha\varphi_{q_2}(q_1 + \cdots + q_{k^{n-1}}) = \alpha\varphi_{q_2}(q_1) + \cdots + \alpha\varphi_{q_2}(q_{k^{n-1}}) \\
&\vdots \\
-2\mathcal{K}_{q_{k^{n-1}}} &= \alpha\varphi_{q_{k^{n-1}}}(q_1 + \cdots + q_{k^{n-1}}) = \alpha\varphi_{q_{k^{n-1}}}(q_1) + \cdots + \alpha\varphi_{q_{k^{n-1}}}(q_{k^{n-1}}).
\end{aligned}$$

Sumando todas ellas (y usando la identidad $\varphi_{q_i}(q_j) = -\varphi_{q_j}(q_i)$), obtenemos

$$-2(\mathcal{K}_{q_1} + \cdots + \mathcal{K}_{q_{k^{n-1}}}) = 0.$$

□

3.7. Divisores efectivos de grado $g_{k,n}$

Como hemos visto en el Ejemplo 2.1, no es posible encontrar divisores efectivos de grado $g_{k,n}$ que sean H-invariantes. De hecho, como veremos más abajo, tampoco hay tales divisores que sean K-invariantes para la mayoría de los subgrupos K de H. Luego, no es posible usar el [14, Theorem 4.4] y, en particular, la búsqueda de generalizaciones de fórmulas tipo Thomae para los pares de Fermat generalizados no es fácil.

Proposición 3.9. *Sea $D \in \mathrm{Div}(S)$ un divisor efectivo de grado $g_{k,n}$. Sea K un subgrupo no-trivial de H conteniendo un elemento de orden $d \geq 2$ que no es una potencia de un generador estándar. Entonces D no puede ser K-invariante en ninguna de las siguientes tres situaciones:*

(i) $d \geq 3$.

(ii) $d = 2$ *y* k *es múltiplo de* 4.

(iii) $d = 2$ *y* $n \geq 3$.

Demostración. Sea $a \in K$ de orden $d \geq 2$, el cual no es una potencia de un generador estándar (luego, ningún elemento diferente de la identidad de $\langle a \rangle$ actúa con puntos fijos). Como d es un divisor de k, podemos escribir $k = dk_1$. Si D es K-invariante, entonces también es $\langle a \rangle$-invariante. Ya que los elementos no-triviales de $\langle a \rangle$ no tienen puntos fijos en S, debemos tener que el grado $g_{k,n}$ de D debe ser un múltiplo de d, esto es, existe un entero $\alpha \geq 1$ tal que $2d\alpha = 2 + k^{n-1}((n-1)(k-1)-2) = 2 + d^{n-1}k_1^{n-1}((n-1)(k-1)-2)$. Como $n \geq 2$, esto no es posible para $d \geq 3$. Si $d = 2$, entonces $2^2\alpha = 2 + 2^{n-1}k_1^{n-1}((n-1)(k-1)-2)$. En caso que k_1 sea par o bien que $n \geq 3$, tendremos que 4 divide a 2, una contradicción. □

3.8. Divisores efectivos no-especiales soportados en los puntos fijos

En esta sección, estamos interesados en determinar condiciones algebraicas (necesarias y suficientes) para que un divisor efectivo de grado $g_{k,n}$ en $C_n^k := C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}}$, cuyo soporte esté contenido en el conjunto de los puntos fijos de los generadores estándar de H, sea no-especial.

Los divisores anteriores son de la forma

$$D = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{k^{n-1}} m_{j,i} p_{j,i}, \quad m_{j,i} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{k^{n-1}} m_{j,i} = g_{k,n}. \tag{3.7}$$

Asumiremos que los enteros $m_{j,i}$ están ordenados

$$M_j(D) := m_{j,k^{n-1}} \geq \cdots \geq m_{j,1} \geq 0.$$

Para cada subconjunto $A \neq \emptyset$ de $I_{k,n}$ definimos:

$$\beta_1(A) := \text{mín}\{\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n+1} - r - 2 : (r; \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}) \in A\} \geq 0$$
$$\beta_2(A) := \text{mín}\{r : (r; \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}) \in A\} \geq 0$$
$$\beta_j(A) := \text{mín}\{k - 1 - \alpha_j : (r; \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}) \in A\} \geq 0, \quad j \geq 3.$$

Observemos que, si $\emptyset \neq B \subset A$, entonces $\beta_j(A) \leq \beta_j(B)$ para todo $j \geq 1$.

Si $\mu \in (\mathbb{C} - \{0\})^A$, entonces el divisor de la diferencial holomorfa

$$\theta_{\mu,A} = \sum_{(r;\alpha_3,\ldots,\alpha_{n+1}) \in A} \mu(r; \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}) \theta_{r;\lambda_3,\ldots,\theta_{n+1}}$$

es

$$(\theta_{\mu,A}) = \sum_{j=1}^{n+1} \delta_j(\mu) \text{Fix}(a_j) + D_0,$$

donde $\delta_j(\mu) \geq \beta_j(A)$ y D_0 es un divisor efectivo cuyo soporte es disjunto con $\text{Fix}(H)$ (el conjunto formado por todos los puntos fijos de todos los generadores estándar de H). Notemos que, para μ genérico, se tiene que $\delta_j(\mu) = \beta_j(A)$.

El siguiente resultado da condiciones algebraicas necesarias y suficientes para que un divisor como en (3.7) sea no-especial.

Teorema 3.10. *Sea $D \in \text{Div}(C_k^n)$ un divisor efectivo de grado $g_{k,n}$ como en* (3.7)*. Entonces D es no-especial si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen.*

(S1) Para cada $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, se cumple que que $m_{j,1} = 0$ (es decir, existe un punto fijo de a_j que no pertenece al soporte de D).

(S2) Para todo subconjunto $\emptyset \neq A \subset I_{k,n}$, $\exists j \in \{1, \ldots, n+1\}$ tal que $M_j(D) > \beta_j(A)$.

Demostración. Supongamos que la condición (S1) no es válida, es decir, existe $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ tal que $m_{j,1} \geq 1$, equivalentemente, $D \geq \text{Fix}(a_j)$. Si $i \in \{1, \ldots, n+1\} - \{j\}$, entonces y_{ij} es una función meromorfa cuyo divisor es $\text{Fix}(a_i) - \text{Fix}(a_j)$, en particular, $(y_{ij}) + D \geq 0$. Esto nos dice que $r(-D) \geq 2$ y, por el Teorema de Riemann-Roch, que $i(D) > 0$, es decir, D es especial.

Ahora, supongamos que la condición (S2) no se cumple, es decir, existe $\emptyset \neq A \subset I_{k,n}$, tal que $M_j(D) \leq \beta_j(A)$, para todo $j = 1, \ldots, n+1$. Si $\mu \in (\mathbb{C} - \{0\})^A$, entonces

$$(\theta_{\mu,A}) \geq \sum_{j=1}^{n+1} \delta_j(\mu) \text{Fix}(a_j) \geq \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j(A) \text{Fix}(a_j) \geq \sum_{j=1}^{n+1} M_j(D) \text{Fix}(a_j) \geq D,$$

es decir, $i(D) > 0$, luego D es especial. □

Ejemplo 3.11 (Caso $(k,n)=(4,2)$)**.** *En este caso, S corresponde a la curva de Fermat de grado 4:*

$$S = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2 : x^4 + y^4 + z^4 = 0\}$$

que es una superficie de Riemann de género $g_{4,2} = 3$. Los generadores estándar de $H \cong \mathbb{Z}_4^2$ están dados por

$$a_1([x:y:z]) = [ix:y:z], \quad a_2([x:y:z]) = [x:iy:z], \quad a_3([x:y:z]) = [x:y:iz].$$

El conjunto de puntos fijos de a_1 es (tomando $q = e^{i\pi/4}$):

$$\{p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}\} = \{[0:1:q], [0:1:iq], [0:1:-q], [0:1:-iq]\},$$

el conjunto de puntos fijos de a_2 es:

$$\{p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}\} = \{[1:0:q], [1:0:iq], [1:0:-q], [1:0:-iq]\},$$

el conjunto de puntos fijos de a_3 es:

$$\{p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}\} = \{[1:q:0], [1:iq:0], [1:-q:0], [1:-iq:0]\}.$$

Un divisor D como en (3.7), en esta situación, es de la forma

$$D = \sum_{j=1}^{4} m_{1,j} p_{1,j} + \sum_{j=1}^{4} m_{2,j} p_{2,j} + \sum_{j=1}^{4} m_{3,j} p_{3,j},$$

donde

$$M_1(D) = m_{1,4} \geq m_{1,3} \geq m_{1,2} \geq m_{1,1} \geq 0,$$

$$M_2(D) = m_{2,4} \geq m_{2,3} \geq m_{2,2} \geq m_{2,1} \geq 0,$$

$$M_3(D) = m_{3,4} \geq m_{3,3} \geq m_{3,2} \geq m_{3,1} \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^{3} (m_{1,j} + m_{2,j} + m_{3,j}) = 3.$$

La condición (S1) del Teorema 3.10 es equivalente a tener

$$m_{1,1} = m_{2,1} = m_{3,1} = 0,$$

lo cual supondremos en lo que sigue de este ejemplo.

Como $I_{4,2} = \{(0;2),(0;3),(1;3)\}$*, sus subconjuntos no vacíos son*

$$A_1 = \{(0;2)\}, \quad A_2 = \{(0;3)\}, \quad A_3 = \{(1;3)\}, \quad A_4 = \{(0;2),(0;3)\},$$

$$A_5 = \{(0;2),(1;3)\}, \quad A_6 = \{(0;3),(1;3)\}, \quad A_7 = I_{4,2}.$$

Se puede verificar que:

$$\beta_1(A_1) = \beta_1(A_3) = \beta_1(A_4) = \beta_1(A_5) = \beta_1(A_6) = \beta_1(A_7) = 0, \quad \beta_1(A_2) = 1,$$

$$\beta_2(A_1) = \beta_2(A_2) = \beta_2(A_4) = \beta_2(A_5) = \beta_2(A_6) = \beta_2(A_7) = 0, \quad \beta_2(A_3) = 1,$$

$$\beta_3(A_2) = \beta_3(A_3) = \beta_3(A_4) = \beta_3(A_5) = \beta_3(A_6) = \beta_3(A_7) = 0, \quad \beta_3(A_1) = 1.$$

La condición (S2) del Teorema 3.10 es equivalente a tener las siguientes condiciones:

(a) algún $M_j(D) \geq 1$ *(para satisfacer la condición con* A_4, A_5, A_6, A_7*);*

(b) $M_3(D) = 3$ *o bien* $M_1(D) \geq 1$ *o bien* $M_2(D) \geq 1$ *(para tener tal condición para* A_1*);*

(c) $M_1(D) = 3$ *o bien* $M_2(D) \geq 1$ *o bien* $M_3(D) \geq 1$ *(para tener tal condición para* A_2*);*

(d) $M_2(D) = 3$ *o bien* $M_1(D) \geq 1$ *o bien* $M_3(D) \geq 1$ *(para tener tal condición para* A_3*).*

Si (i) $M_1(D) \geq 1$ *y* $M_2(D) \geq 1$*, o bien (ii)* $M_1(D) \geq 1$ *y* $M_3(D) \geq 1$*, o bien (iii)* $M_2(D) \geq 1$ *y* $M_3(D) \geq 1$*, entonces* D *es no-especial.*

Por otro lado, si tenemos (por ejemplo) $M_1(D) = M_2(D) = 0$*, entonces necesitamos tener* $M_3(D) = 3$ *para que* D *sea no-especial. En este caso,* $D = 3p$*, donde* $p \in \mathrm{Fix}(a_3)$*. Notemos que este divisor es invariante por* a_3*.*

3.9. Divisores no-especiales invariantes por un generador estándar

La Proposición 3.9 nos dice que un divisor D como en (3.7) no puede ser invariante por varios subgrupos no-triviales K de H. Los únicos subgrupos $K < H$ que admitan un divisor (como en (3.7)) que sea K-invariante son:

(i) $n = 2$ y $k = 2k_1$, donde $k_1 \geq 3$ es impar (luego S es una curva clásica de Fermat de grado k) y K es un grupo cíclico generado por una involución sin puntos fijos en S, o bien

(ii) K es un grupo cíclico generado por un generador estándar.

Supongamos que D es invariante por un generador estándar, el cual podemos asumir (sin pérdida de generalidad) sea a_{n+1}. La invariancia de D por a_{n+1} es equivalente a tener, para cada $j = 1, \ldots, n$, que en el divisor D tenemos

$$\sum_{i=1}^{k^{n-1}} m_{j,i} p_{j,i} = \sum_{i=1}^{k^{n-2}} m_{j,i} D_{j,i}$$

donde $D_{j,i}$ son las órbitas disjuntas a pares de los puntos fijos a_j bajo la acción de a_{n+1}.

Ejemplo 3.12. *Si $p \in \mathrm{Fix}(a_{n+1})$, entonces el divisor $D = g_{k,n} p$ es invariante por a_{n+1}. Más aún, como $\beta_j(A) < g_{k,n}$ para todo subconjunto no vacío A de $I_{k,n}$, tenemos (por el Teorema 3.10) que D es no-especial. Este ejemplo generaliza el dado al final del Ejemplo 3.11, para el caso $(k,n) = (4,2)$.*

En el ejemplo anterior, hemos descrito algunos divisores no-especiales de C_n^k, estos divisores están soportados en un punto fijo de a_{n+1}. Las condiciones algebraicas necesarias y suficientes del Teorema 3.10, en el caso de divisores invariantes por a_{n+1}, se pueden escribir de manera equivalente como sigue.

Teorema 3.13. *Sea D un divisor efectivo de grado $g_{k,n}$ como en (3.7), que es a_{n+1}-invariante. Entonces D es no-especial si y sólo si no existe una función meromorfa no-constante $\phi \in L(-D)$ de la forma*

$$\phi = h(z) \cdot y_3^{\alpha_3} \cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}, \quad h(z) \in \mathbb{C}(z), \quad \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1} \in \{0, 1 \ldots, k-1\}.$$

Demostración. Como ya hemos visto,

$$\mathbb{C}(C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}}) = \bigoplus_{0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \leq k-1} \mathbb{C}(z)\ y_3^{\alpha_3} y_4^{\alpha_4} \cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}.$$

De la Observación 3.2, los espacios propios del automorfismo lineal a^*_{n+1} en $\mathbb{C}(C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}})$ están dados por

$$E_{\alpha_{n+1}} := \left(\bigoplus_{0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_n \leq k-1} \mathbb{C}(z)\ y_3^{\alpha_3} y_4^{\alpha_4} \cdots y_n^{\alpha_n} \right) y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}, \quad \alpha_{n+1} \in \{0, 1, \ldots, k-1\},$$

cuyo valor propio asociado es $\omega_k^{-\alpha_{n+1}}$. Como D es invariante por a_{n+1}, el espacio $L(-D)$ es a^*_{n+1}-invariante. Luego,

$$L(-D) = \bigoplus_{0 \leq \alpha_{n+1} \leq k-1} \left(L(-D) \cap E_{\alpha_{n+1}} \right) =$$

$$\bigoplus_{0 \leq \alpha_{n+1} \leq k-1} \left(\bigoplus_{0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_n \leq k-1} \left(L(-D) \cap \mathbb{C}(z)\ y_3^{\alpha_3} y_4^{\alpha_4} \cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \right) \right). \quad \square \quad (3.8)$$

Observación 3.14. *Notemos, de lo anterior, que* $\mathbb{C}(C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}})/\langle a_{n+1}\rangle = \mathbb{C}(C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-3}})$ *y*

$$\mathbb{C}(C^k_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-3}}) = \bigoplus_{0\leq \alpha_1,\ldots,\alpha_n\leq k-1} \mathbb{C}(z)\, y_3^{\alpha_3} y_4^{\alpha_4}\cdots y_n^{\alpha_n}$$

Corolario 3.15. *Sea D un divisor efectivo de grado $g_{k,n}$ como en (3.7), que es a_{n+1}-invariante. Entonces D es no-especial si y sólo si para cada elección de $L\geq 0$ y cada elección de $r_j, s_l \in \mathbb{Z}$, donde $j=1,\ldots,n$, y $l=1,\ldots,L$, y $\alpha_3,\ldots,\alpha_{n+1}\in\{0,1\ldots,k-1\}$, alguna de las siguientes propiedades falla:*

(1) $0=m_{1,1}\geq r_1+r_2+r_3+\cdots+r_n+s_1+\cdots+s_L+\alpha_3+\cdots+\alpha_{n+1}$,

(2) $0=m_{1,2}\geq -r_1$, *es decir,* $r_1\geq 0$,

(3) si $p_{v,i}\in B_{v-3}$, *entonces* $m_{v,i}+\alpha_v\geq -r_{v-1}$, $v=3,\ldots,n+1$,

(4) $s_i\geq 0$, $i=1,\ldots,L$ *(esta condición se debe al hecho de que cada C_{β_i} es disjunto de los puntos fijos de los generadores estándar de H).*

Demostración. Sea D un divisor efectivo de grado $g_{k,n}$, como en (3.7), que es a_{n+1}-invariante. Por la Proposición 3.13, para chequear si D es no-especial, necesitamos verificar que las funciones meromorfas no-constantes

$$\phi = h(z)\cdot y_3^{\alpha_3}\cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}},$$

donde $h\in\mathbb{C}(z)$ y $\alpha_3,\ldots,\alpha_{n+1}\in\{0,1\ldots,k-1\}$, no pueden estar en $L(-D)$.

Sea $\lambda_0=1$. Para cada $j=0,\ldots,n-2$, fijemos una k-raíz $(-\lambda_j)^{1/k}$. Sea

$$h(z) = z^{r_1}\prod_{j=0}^{n-2}\prod_{l=1}^{k}\left(z-e^{2l\pi i/k}(-\lambda_j)^{1/k}\right)^{r_{2+j}}\prod_{i=1}^{L}(z-\beta_i)^{s_i},$$

donde $-\beta_i^k\in\mathbb{C}\setminus\{0,1,\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-2}\}$ y $r_j, s_i\in\mathbb{Z}$. Notemos que:

$$(z^{r_1}) = r_1\left(\mathrm{Fix}(a_2)-\mathrm{Fix}(a_1)\right),$$

$$\left(\left(z-e^{2l\pi i/k}(-\lambda_j)^{1/k}\right)^{r_{2+j}}\right) = r_{2+j}\left(B_j-\mathrm{Fix}(a_1)\right),\quad j=0,\ldots,n-2,$$

donde

$$B_j=\left\{[1:e^{2l\pi i/k}(-\lambda_j)^{1/k}:x_3:\cdots:x_{n+1}]: x_{i+3}^k=-\lambda_i+\lambda_j\right\}\subset \mathrm{Fix}(a_{j+3}),$$

y

$$((z-\beta_i)^{s_i}) = s_i\left(C_{\beta_j}-\mathrm{Fix}(a_1)\right),\quad i=1,\ldots,L,$$

donde

$$C_{\beta_i}=\{[1:\beta_i:x_3:\cdots:x_{n+1}]: x_{t+3}^k=-\lambda_t-\beta_i^k\}.$$

El divisor de h es:

$$(h) = r_1\left(\mathrm{Fix}(a_2) - \mathrm{Fix}(a_1)\right) + \sum_{j=0}^{n-2} r_{2+j}(B_j - \mathrm{Fix}(a_1)) + \sum_{i=1}^{L} s_i(C_{\beta_i} - \mathrm{Fix}(a_1)).$$

Ya que el divisor de $y_j^{\alpha_j}$, para $j = 3, \ldots, n+1$, es

$$\left(y_j^{\alpha_j}\right) = \alpha_j(\mathrm{Fix}(a_j) - \mathrm{Fix}(a_1))$$

obtenemos que el divisor de $\phi = h(z) \cdot y_3^{\alpha_3} \cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$ es

$$\begin{aligned}(\phi) = -(r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n + s_1 + \cdots + s_L + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n+1})\mathrm{Fix}(a_1) \\ + r_1\mathrm{Fix}(a_2) + \sum_{v=3}^{n+1}(\alpha_v\mathrm{Fix}(a_v) + r_{v-1}B_{v-3}) + \sum_{i=1}^{L} s_i C_{\beta_i}.\end{aligned}$$

En particular (como $\alpha_j \geq 0$), $\phi \notin L(-D)$ si alguna de las propiedades enunciadas en el corolario falla. $\square$

Agradecimientos

El autor agredece a los referís por su tiempo dedicado a la revisión de este artículo y los valiosos comentarios, sugerencias y correcciones hechas a la versión preliminar. En especial, a uno de ellos por su paciencia en las muchísimas correcciones hechas respecto al lenguaje castellano. El segundo referí mencionaba en su reporte las posibles relaciones de lo aquí expuesto con cuestiones relacionadas con fibrados vectoriales, principales y de Higgs sobre superficies de Riemann. Como no soy un experto en ese tema, no me atreví a complementar sobre esta y sus posibles relaciones (luego, pido disculpas por esta incompletitud al respecto). Este artículo es parcialmente financiado por el Proyecto Fondecyt 1230001 (ANID).

Referencias

[1] M. Bershadsky y A. Radul, "Conformal field theories with additional Z_N symmetry," *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 2, no. 1, pp. 165–178, 1987, doi: 10.1142/S0217751X87000053.

[2] M. Bershadsky y A. Radul, "Fermionic fields on $\mathbb{Z}_N$-curves," *Commun. Math. Phys.*, vol. 116, no. 4, pp. 689–700, 1988, doi: 10.1007/BF01224908.

[3] A. Eisenmann y H. M. Farkas, "An elementary proof of Thomae's formulae," *Online J. Anal. Comb.*, vol. 3, p. 14, 2008, Art. ID 2.

[4] V. Z. Enolski y T. Grava, "Thomae type formulae for singular Z_N curves," *Lett. Math. Phys.*, vol. 76, no. 2-3, pp. 187–214, 2006, doi: 10.1007/s11005-006-0073-7.

[5] H. M. Farkas y I. Kra, *Riemann surfaces.*, 2nd ed., ser. Grad. Texts Math. New York etc.: Springer-Verlag, 1992, vol. 71, doi: 10.1007/978-1-4612-2034-3.

[6] H. M. Farkas y S. Zemel, *Generalizations of Thomae's formula for Z_n curves*, ser. Dev. Math. Berlin: Springer, 2011, vol. 21, doi: 10.1007/978-1-4419-7847-9.

[7] G. Frobenius, "Ueber die constanten Factoren der Thetareihen," *J. Reine Angew. Math.*, vol. 98, pp. 244–263, 1885, doi: 10.1515/crll.1885.98.244.

[8] G. González-Diez, "Non-special divisors supported on the branch set of a p-gonal Riemann surface," in *Geometry of Riemann surfaces. Proceedings of the Anogia conference to celebrate the 65th birthday of William J. Harvey, Anogia, Crete, Greece, June–July 2007.* Cambridge: Cambridge University Press, 2010, pp. 238–259.

[9] G. González-Diez, R. A. Hidalgo, y M. Leyton, "Generalized Fermat curves," *J. Algebra*, vol. 321, no. 6, pp. 1643–1660, 2009, doi: 10.1016/j.jalgebra.2009.01.002.

[10] R. A. Hidalgo, "Holomorphic differentials of generalized Fermat curves," *J. Number Theory*, vol. 217, pp. 78–101, 2020, doi: 10.1016/j.jnt.2020.05.014.

[11] R. A. Hidalgo, "Homology group automorphisms of Riemann surfaces," *Mosc. Math. J.*, vol. 23, no. 1, pp. 113–120, 2023.

[12] R. A. Hidalgo, A. Kontogeorgis, M. Leyton-Álvarez, y P. Paramantzoglou, "Automorphisms of generalized Fermat curves," *J. Pure Appl. Algebra*, vol. 221, no. 9, pp. 2312–2337, 2017, doi: 10.1016/j.jpaa.2016.12.011.

[13] K. Karagiannis, "Representations on canonical models of generalized Fermat curves and their syzygies," 2023, *arXiv:2304.02990.*

[14] Y. Kopeliovich y S. Zemel, "On spaces associated with invariant divisors on Galois covers of Riemann surfaces and their applications," *Isr. J. Math.*, vol. 234, no. 1, pp. 393–450, 2019, doi: 10.1007/s11856-019-1946-7.

[15] D. Piponi, "A generalization of Thomae's formula for cyclic covers of the sphere, ph.d. dissertation," Ph.D. dissertation, King's College London, 1993, thesis supervised by W.J. Harvey.

[16] J. Thomae, "Beitrag zur Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ durch die Klassenmoduln algebraischer Functionen," *J. Reine Angew. Math.*, vol. 71, pp. 201–222, doi: 10.1515/crll.1870.71.201.

[17] J. Thomae, "Bestimmung von $d \lg \vartheta(0, 0, \ldots 0)$ durch die Classenmoduln," *J. Reine Angew. Math.*, vol. 66, pp. 92–96, doi: 10.1515/crll.1866.66.92.

[18] S. Zemel, "Thomae formulae for general fully ramified z_n curves," *J. Anal. Math.*, vol. 131, pp. 101–158, doi: 10.1007/s11854-017-0004-9.