CUBO, A Mathematical Journal
Vol. 27, no. 2, pp. 233–265, Agosto 2025
DOI: 10.56754/0719-0646.2702.233

Función maximal, un subespacio de Orlicz-Lorentz, y el operador multiplicación

René Erlin Castillo[1]
Héctor Camilo Chaparro[2,✉]

[1] *Departamento de Matemáticas*
Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá, Colombia.
recastillo@unal.edu.co

[2] *Programa de Matemáticas*
Universidad de Cartagena,
Cartagena de Indias, Colombia.
hchaparrog@unicartagena.edu.co[✉]

RESUMEN

El espacio de Orlicz-Lorentz se define en términos de funciones de Young aplicadas al reordenamiento decreciente de una función. En este artículo, definimos un subespacio de este espacio, usando la función maximal, y estudiamos su estructura como espacio de Banach. Además, definimos un operador de multiplicación en estos subespacios y caracterizamos sus propiedades más relevantes.

Keywords and Phrases: Espacios de Orlicz-Lorentz, función maximal, operador multiplicación.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 47B33, 47B38, 46E30.

Publicado: 18 de agosto de 2025
Aceptado: 08 de mayo de 2025
Revisado: 21 de septiembre de 2024

©2025 R. E. Castillo *et al.* Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

CUBO, A Mathematical Journal
Vol. 27, no. 2, pp. 233–265, August 2025
DOI: 10.56754/0719-0646.2702.233

The maximal function, an Orlicz-Lorentz subspace, and the multiplication operator

René Erlin Castillo[1]
Héctor Camilo Chaparro[2,✉]

[1] *Departamento de Matemáticas*
Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá, Colombia.
recastillo@unal.edu.co

[2] *Programa de Matemáticas*
Universidad de Cartagena,
Cartagena de Indias, Colombia.
hchaparrog@unicartagena.edu.co✉

ABSTRACT

The Orlicz-Lorentz space is defined in terms of Young functions applied to the decreasing rearrangement of a function. In this article, we define a subspace of this space, using the maximal function, and study its structure as a Banach space. Additionally, we define a multiplication operator on these subspaces and characterize its most relevant properties.

Keywords and Phrases: Orlicz-Lorentz spaces, maximal function, multiplication operator.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 47B33, 47B38, 46E30.

Published: 18 August, 2025
Accepted: 08 May, 2025
Received: 21 September, 2024

©2025 R. E. Castillo *et al.* This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

1. Introducción

Los espacios de Orlicz-Lorentz han surgido como una generalización común de los espacios de Orlicz y de los espacios de Lorentz, aplicados a problemas de análisis funcional, teoría de operadores y otras áreas de las matemáticas. Estos espacios se definen mediante el uso de funciones de Young aplicadas al reordenamiento decreciente de funciones, proporcionando un marco robusto para estudiar propiedades operatorias en escenarios no lineales y ponderados.

En este artículo, se investigan ciertas propiedades fundamentales de la distribución, el reordenamiento decreciente, la función maximal y las funciones de Young, lo cual permite definir el espacio de Orlicz-Lorentz $L_{\varphi,w}$. El enfoque se centra en un subespacio particular, $\Lambda_{\varphi,w}$. Nos proponemos realizar un estudio exhaustivo y autocontenido de este subespacio, con el objetivo de proporcionar una base teórica sólida para estudiar las condiciones bajo las cuales el operador de multiplicación M_u, definido por $M_u(f) = u \cdot f$, es acotado, inyectivo, invertible, y compacto. Estas condiciones tienen aplicaciones directas en problemas de teoría de operadores y análisis de Fourier, entre otras áreas. Para este análisis, seguiremos el esquema planteado en [7].

La organización de este artículo es la siguiente. En la Sección 2, describimos y damos propiedades de los elementos básicos que componen a los espacios de Orlicz-Lorentz, a saber, la distribución D_f, el reordenamiento decreciente f^*, la función maximal f^{**}, y las funciones de Young. Luego, en la Sección 3, damos la definición de los espacios de Orlicz-Lorentz $L_{\varphi,w}$, y de un subespacio particular $\Lambda_{\varphi,w}$, estudiando sus propiedades como espacios de Banach. Finalmente, en la Sección 4, estudiamos el operador multiplicación M_u definido sobre $\Lambda_{\varphi,w}$, caracterizando su acotación, rango cerrado, invertibilidad y compacidad.

2. Elementos básicos de los espacios de Orlicz-Lorentz: distribución, reordenamiento decreciente, función maximal y funciones de Young

En esta sección estudiamos los componentes principales de los espacios de Orlicz-Lorentz. Iniciamos este estudio definiendo la distribución de una función.

2.1. Función de distribución

Definición 2.1. *Sea f una función medible de valor complejo definida en un espacio de medida σ-finito $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Para $\lambda \geq 0$, la función distribución de f, denotada por $D_f(\lambda)$, se define como*

$$D_f(\lambda) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right). \tag{2.1}$$

Es importante destacar que D_f depende únicamente del valor absoluto $|f|$ de la función y que puede tomar el valor $+\infty$.

La función distribución D_f brinda información sobre el "tamaño" de f, pero no acerca de su comportamiento en puntos específicos. Por ejemplo, una función en $\mathbb{R}^n$ y sus traslaciones tienen la misma función distribución. A partir de (2.1), se deduce que D_f es decreciente en λ (aunque no estrictamente) y es continua por la derecha.

Dado un espacio medible (X, μ), y funciones medibles f y g definidas en dicho espacio, D_f cumple las siguientes propiedades para todo $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$:

1. $D_f \equiv 0 \iff f = 0$ μ-c.t.p.;
2. Si $|g| \leq |f|$ μ-c.t.p., entonces $D_g \leq D_f$;
3. $D_{cf}(\lambda) = D_f\left(\frac{\lambda}{|c|}\right)$ para todo $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$;
4. $D_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq D_f(\lambda_1) + D_g(\lambda_2)$;
5. $D_{fg}(\lambda_1 \lambda_2) \leq D_f(\lambda_1) + D_g(\lambda_2)$.

Para más información sobre la función distribución, consultar las referencias [5, 6, 10].

2.2. Reordenamiento decreciente

El reordenamiento decreciente de una función f, denotado como f^*, se define de la siguiente manera.

Definición 2.2. *Dada una función f de valor complejo definida en X, su reordenamiento decreciente, f^*, es la función definida en $[0, +\infty)$ como*

$$f^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : D_f(\lambda) \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Adoptamos la convención de que $\inf \emptyset = \infty$. Note que que f^* es decreciente y continua por la derecha. Además,

$$f^*(0) = \inf\{\lambda > 0 : D_f(\lambda) \leq 0\} = \|f\|_\infty,$$

ya que

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0\}.$$

Si D_f es estrictamente decreciente, entonces se cumple que

$$f^*(D_f(t)) = \inf\{\lambda > 0 : D_f(\lambda) \leq D_f(t)\} = t.$$

Esto demuestra que f^* es la inversa de la función distribución D_f.

Dados dos espacios de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{M}, \nu)$, denotamos por $\mathfrak{F}(X, \mathcal{A})$ al conjunto de todas las funciones $\mathcal{A}$-medibles en X y por $\mathfrak{F}(Y, \mathcal{M})$ al conjunto de todas las funciones $\mathcal{M}$-medibles en Y, respectivamente.

Dos funciones $f \in \mathfrak{F}(X, \mathcal{A})$, $g \in \mathfrak{F}(Y, \mathcal{M})$ se llaman equimedibles si tienen la misma función distribución, es decir,

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right) = \nu\left(\{y \in Y : |g(y)| > \lambda\}\right), \quad \text{para todo } \lambda \geq 0.$$

El siguiente teorema asegura la unicidad del reordenamiento decreciente. Omitimos su demostración, la cual se puede encontrar en [6, Teorema 1.8].

Teorema 2.3. *Existe una única función decreciente continua por la derecha, $\lambda \geq 0$, equimedible con f^*. Es decir, el reordenamiento decreciente es único.*

A continuación listamos algunas propiedades importantes de f^*. Demostraciones de estas propiedades pueden encontrarse en [5, 6, 10].

1. f^* es decreciente.
2. $f^* \equiv 0 \iff f = 0$ μ-c.t.p.
3. $f^*(t) > \lambda$ si y sólo si $D_f(\lambda) > t$.
4. $|g| \leq |f|$ μ-c.t.p. implica $g^* \leq f^*$. Además, $|f|^* = f^*$.
5. $(kf)^* = |k|f^*$.
6. $(f+g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$.
7. $(fg)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1)g^*(t_2)$.
8. f y f^* son equimedibles, es decir

$$D_f(\lambda) = D_{f^*}(\lambda) \quad \text{para todo } \lambda \geq 0.$$

9. $\int_X |f|^p \, d\mu = \int_0^\infty [f^*(t)]^p \, dt$ si $0 < p < \infty$.
10. Si $|f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|$, entonces $f^* \leq \liminf_{n\to\infty} f_n^*$.
11. Si $E \in \mathcal{A}$, entonces $(\chi_E)^*(t) = \chi_{[0,\mu(E))}(t)$.
12. Si $E \in \mathcal{A}$, entonces $(f\chi_E)^*(t) \leq f^*(t)\chi_{[0,\mu(E))}(t)$.

2.3. Función maximal

Definición 2.4. *Sea $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible. Por f^{**} se denotará a la función maximal de f^*, definida como*

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds, \quad t > 0. \tag{2.2}$$

A continuación enumeramos algunas propiedades básicas de la función maximal f^{**}.

Proposición 2.5. *Supongamos que f, g, y f_n, $(n = 1, 2, \ldots)$, son funciones medibles, y sea λ cualquier escalar. Entonces f^{**} es no negativa, decreciente, y continua en $(0, +\infty)$. Además, se tienen las siguientes propiedades*

$$f^{**} \equiv 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \mu - c.t.p.; \tag{2.3}$$

$$f^* \leq f^{**}; \tag{2.4}$$

$$|g| \leq |f| \ \mu - c.t.p. \ \textit{implica} \ g^{**} \leq f^{**}; \tag{2.5}$$

$$(\lambda f)^{**} = |\lambda| f^{**}; \tag{2.6}$$

$$\textit{Si} \ |f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|, \ \textit{entonces} \ f^{**} \leq \liminf_{n\to\infty} f_n^{**} \tag{2.7}$$

$$(f+g)^{**} \leq f^{**} + g^{**} \tag{2.8}$$

2.4. Funciones de Young

Los espacios clásicos de Lebesgue son conformados por las (clases de equivalencia de) funciones Lebesgue integrables tales que

$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty,$$

donde el integrando se obtiene al aplicar la función $\varphi(t) = t^p$ $(p \geq 1)$ a la función $|f|$. Esta función φ hace parte de una clase más general de funciones, llamadas *funciones de Young*, concepto que precisamos a continuación.

Definición 2.6. *Sea $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función convexa tal que*

1. *$\varphi(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$;*
2. *$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$.*

Tal función se conoce como función de Young.

Una función de Young es estrictamente creciente. En efecto, sean $0 < x < y$, entonces $0 < \frac{x}{y} < 1$ y así, podemos escribir

$$x = \left(1 - \frac{x}{y}\right)0 + \frac{x}{y}y.$$

como φ es convexa, tenemos

$$\varphi(x) = \varphi\left(\left(1 - \frac{x}{y}\right)0 + \frac{x}{y}y\right) \leq \left(1 - \frac{x}{y}\right)\varphi(0) + \frac{x}{y}\varphi(y) < \varphi(y).$$

Decimos que una función de Young *satisface la condición* Δ_2 si existen constantes no negativas x_0 y k tales que

$$\varphi(2x) \leq k\varphi(x) \quad \text{para } x \geq x_0. \tag{2.9}$$

Si $x_0 = 0$, decimos que φ *satisface globalmente la condición* Δ_2. La mínima constante k que satisface (2.9) se denota por k_Δ.

Afirmación 2.7. *Si φ es una función de Young que satisface la condición Δ_2, entonces para cada $r \geq 0$ existe una constante $k_\Delta(r)$ tal que*

$$\varphi(rx) \leq k_\Delta(r)\varphi(x) \tag{2.10}$$

para $x > 0$ suficientemente grande.

Demostración de la afirmación. Si $r > 0$, podemos elegir $n \in \mathbb{N}$ tal que $r \leq 2^n$. Entonces, aplicando (2.9) n-veces y usando el hecho de que φ es creciente, obtenemos

$$\varphi(rx) \leq \varphi(2^n x) \leq k^n\varphi(x),$$

con lo cual (2.10) queda demostrado. □

Lema 2.8. *Una función de Young φ satisface la condición Δ_2 si y sólo si existen constantes $\lambda > 1$ y $t_0 > 0$ tales que*

$$\frac{tp(t)}{\varphi(t)} < \lambda$$

para todo $t \geq t_0$, donde p es la derivada lateral derecha de φ.

Demostración. Supongamos que φ satisface la condición Δ_2, entonces existe una constante $k > 0$ tal que

$$k\varphi(t) \geq \varphi(2t) = \int_0^{2t} p(s)\,ds > \int_t^{2t} p(s)\,ds$$

para t suficientemente grande. Como p es creciente, se tiene que

$$\int_t^{2t} p(s)\,ds > tp(t);$$

así, para t suficientemente grande, obtenemos

$$\frac{tp(t)}{\varphi(t)} \leq k.$$

Recíprocamente, si

$$\frac{tp(t)}{\varphi(t)} < \lambda$$

para todo $t \geq t_0$, entonces

$$\int_t^{2t} \frac{p(s)}{\varphi(s)}\, ds < \lambda \int_t^{2t} \frac{ds}{s} = \lambda \log 2.$$

Dado que $p(s) = \varphi'(s)$, tenemos

$$\log\left(\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}\right) < \lambda \log 2,$$

lo cual implica que

$$\varphi(2t) < 2^\lambda \varphi(t).$$ □

A continuación veremos que las funciones de Young que satisfacen la condición Δ_2 tienen una razón de crecimiento menor que t^p para algún $p > 1$.

Teorema 2.9. *Si φ es una función de Young que satisface la condición Δ_2, entonces existen constantes $\lambda > 1$ y $C > 0$ tales que*

$$\varphi(t) \leq Ct^\lambda$$

para t suficientemente grande.

Demostración. Por (2.8) podemos escribir

$$\int_{t_0}^{t} \frac{p(s)}{\varphi(s)}\, ds < \lambda \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{s}$$

donde $t \geq t_0$. Entonces

$$\log\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(t_0)}\right) < \lambda \log\left(\frac{t}{t_0}\right),$$

por lo tanto

$$\varphi(t) < \frac{\varphi(t_0)}{t_0^\lambda} t^\lambda,$$

como queríamos demostrar. □

En relación con la función de Young φ, definimos, para $t \geq 0$, *la función complementaria de φ* mediante

$$\psi(t) = \sup\{ts - \varphi(s) : s \geq 0\}.$$

Proposición 2.10. *Si φ es una función de Young, entonces su función complementaria ψ también es una función de Young.*

Demostración. Es claro que $\psi(0) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Por lo tanto, sólo debemos demostrar que ψ es una función convexa. Para esto, escojamos $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$ y $\lambda \in [0, 1]$. Entonces, por definición de ψ, tenemos

$$\psi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = \sup\{s(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) - \varphi(s) : s \geq 0\}.$$

Por otra parte

$$\lambda\psi(t_1) = \lambda \sup\{st_1 - \varphi(s) : s \geq 0\} \geq \lambda(st_1 - \varphi(s)), \quad \forall\ s \geq 0$$

y además,

$$(1-\lambda)\psi(t_2) = (1-\lambda) \sup\{st_2 - \varphi(s) : s \geq 0\} \geq (1-\lambda)(st_2 - \varphi(s)), \quad \forall\ s \geq 0.$$

De las últimas dos desigualdades, tenemos

$$s(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) - \varphi(s) = \lambda(st_1 - \varphi(s)) + (1-\lambda)(st_2 - \varphi(s)) \leq \lambda\psi(t_1) + (1-\lambda)\psi(t_2)$$

para todo $s \geq 0$. Esto significa que $\lambda\psi(t_1) + (1-\lambda)\psi(t_2)$ es una cota superior del conjunto

$$\{s(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) - \varphi(s) : s \geq 0\},$$

entonces

$$\psi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)) \leq \lambda\psi(t_1) + (1-\lambda)\psi(t_2),$$

y así ψ es convexa. □

Teorema 2.11 (Desigualdad de Young)**.** *Sea ψ la función complementaria de φ. Entonces*

$$ts \leq \varphi(s) + \psi(t)$$

donde $t, s \in [0, +\infty)$.

Demostración. Sean $t, s \in [0, +\infty)$. Entonces

$$\psi(t) = \sup\{st - \varphi(s) : s \geq 0\} \geq st - \varphi(s), \quad \forall\, s \geq 0,$$

Luego

$$\psi(t) + \varphi(s) \geq st,$$

y así se completa la demostración. □

Para más detalles sobre funciones de Young, ver [16].

3. Los espacios de Orlicz-Lorentz $L_{\varphi,w}$ y un subespacio particular $\Lambda_{\varphi,w}$

Una vez estudiados los conceptos de distribución, reordenamiento decreciente, función maximal y funciones de Young, estamos listos para definir los *espacios de Orlicz-Lorentz*. El lector interesado puede encontrar información relacionada en [15].

Recordemos que un peso w es una función no negativa, localmente integrable sobre $\mathbb{R}$, que toma valores en $(0, \infty)$ casi en todas partes. De esta manera, un peso puede tomar los valores cero o infinito sólo sobre un conjunto Lebesgue medible de medida cero.

Definición 3.1. *Sean φ una función de Young y w un peso. Se define el espacio de Orlicz-Lorentz con peso w como*

$$L_{\varphi,w} = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \ \textit{medibles} : \int_0^\infty \varphi(\alpha f^*(t)) w(t)\, dt < \infty, \ \textit{para algún}\ \alpha > 0 \right\}. \tag{3.1}$$

Note que si tomamos $\varphi(x) = x^p$ $(p \geq 1)$ y $w \equiv 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}
L_{x^p,1} &= \left\{ f : X \to \mathbb{C} \text{ medibles} : \int_0^\infty (\alpha f^*(t))^p\, dt < \infty, \text{ para algún } \alpha > 0 \right\} \\
&= \left\{ f : X \to \mathbb{C} \text{ medibles} : \alpha^p \int_0^\infty [f^*(t)]^p\, dt < \infty, \text{ para algún } \alpha > 0 \right\} \\
&= \left\{ f : X \to \mathbb{C} \text{ medibles} : \alpha^p \int_X |f|^p\, d\mu < \infty, \text{ para algún } \alpha > 0 \right\} \\
&= \left\{ f : X \to \mathbb{C} \text{ medibles} : \int_X |f|^p\, d\mu < \infty, \right\} \\
&= L_p.
\end{aligned}$$

Es decir, los espacios de Orlicz-Lorentz generalizan los espacios clásicos de Lebesgue L_p. Para más información sobre espacios de Orlicz-Lorentz, invitamos al lector a consultar las referencias [9, 11, 12, 14, 19].

Estudiaremos un subespacio particular $\Lambda_{\varphi,w}$ de $L_{\varphi,w}$, el cual se obtiene al reemplazar en (3.1), el reordenamiento decreciente f^* por la función maximal f^{**}. Esto da origen a la siguiente definición.

Definición 3.2. *Sean φ una función de Young y w un peso. Se define el espacio $\Lambda_{\varphi,w}$ como*

$$\Lambda_{\varphi,w} = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \text{ medibles} : \int_0^\infty \varphi(\alpha f^{**}(t)) w(t)\, dt < \infty, \text{ para algún } \alpha > 0 \right\}. \tag{3.2}$$

Empezamos por demostrar que $\Lambda_{\varphi,w} \subseteq L_{\varphi,w}$. En efecto, como $f^* \leq f^{**}$, para $\alpha > 0$ tenemos $\alpha f^*(t) \leq \alpha f^{**}(t)$. Aplicando φ (que es creciente) a cada lado de la desigualdad y multiplicando por el peso w, obtenemos $\varphi(\alpha f^*(t))w(t) \leq \varphi(\alpha f^{**}(t))w(t)$. Por último, integramos de 0 a ∞, y obtenemos

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha f^*(t))w(t)\, dt \leq \int_0^\infty \varphi(\alpha f^{**}(t))w(t)\, dt,$$

de donde $\Lambda_{\varphi,w} \subseteq L_{\varphi,w}$.

Observación 3.3. *La inclusión $\Lambda_{\varphi,w} \subsetneq L_{\varphi,w}$ es estricta. En efecto, dado el espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, consideremos $f : X \to \mathbb{C}$ dada por $f(x) = \chi_A(x)$, donde $A \in \mathcal{A}$ es tal que $\mu(A) < \infty$. Dado que $\chi_A^*(s) = \chi_{[0,\mu(A))}(s)$, tomando $\varphi(x) = x$, $w = 1$ y $\alpha = 1$, obtenemos*

$$\int_0^\infty \varphi\left(\alpha f^*(t)\right) w(t)\, dt = \int_0^\infty \chi_{[0,\mu(A))}(t)\, dt = \mu(A) < \infty.$$

Por lo tanto $f \in L_{x,1}$. Sin embargo, observe que

$$\chi_A^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \chi_A^*(s)\, ds = \frac{1}{t}\int_0^t \chi_{[0,\mu(A))}(s)\, ds = \begin{cases} 1, & \text{si } t < \mu(A) \\ \frac{\mu(A)}{t}, & \text{si } t \geq \mu(A). \end{cases}$$

Luego, para $\alpha > 0$, tenemos

$$\int_0^\infty \varphi\left(\alpha f^{**}(t)\right) w(t)\, dt = \int_0^\infty \alpha f^{**}(t)\, dt = \alpha \left[\int_0^{\mu(A)} dt + \int_{\mu(A)}^\infty \frac{\mu(A)}{t}\, dt \right] =$$
$$\alpha \left[\int_0^{\mu(A)} dt + \mu(A) \int_{\mu(A)}^\infty \frac{1}{t}\, dt \right] = \infty.$$

Lo anterior implica que $f \notin \Lambda_{x,1}$.

El resultado principal de esta sección consiste en demostrar que $\Lambda_{\varphi,w}$ posee una estructura de espacio vectorial normado completo. Este resultado es precisamente el contenido del siguiente teorema.

Teorema 3.4. *$\Lambda_{\varphi,w}$ equipado con la norma de Luxemburg*

$$\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{f^{**}(t)}{\varepsilon}\right) w(t)\,dt \le 1\right\} \in [0,\infty),$$

es un espacio de Banach.

En la demostración de este teorema usaremos el siguiente lema.

Lema 3.5. *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\Lambda_{\varphi,w}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = 0$;

(b) Para todo $\alpha > 0$, $\limsup_{n\to\infty} \int_0^\infty \varphi(\alpha f_n^{**}(t))w(t)\,dt \le 1$;

(c) Para todo $\alpha > 0$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \varphi(\alpha f_n^{**}(t))w(t)\,dt = 0$.

Demostración. La equivalencia $(a) \iff (b)$ es consecuencia directa de la definición de $\|\cdot\|_{\Lambda_{\varphi,w}}$. La implicación $(c) \implies (b)$ es inmediata. Como φ es convexa y $\varphi(0) = 0$ para todo $t \ge 0$ y $0 < \varepsilon \le 1$, tenemos

$$\varphi(t) = \varphi\left((1-\varepsilon)0 + \varepsilon\frac{t}{\varepsilon}\right) \le (1-\varepsilon)\varphi(0) + \varepsilon\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

esto es

$$\varphi(t) \le \varepsilon\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \quad t \ge 0, \quad 0 < \varepsilon \le 1.$$

De donde se sigue fácilmente que $(b) \implies (c)$. □

Demostración del Teorema 3.4. Demostremos, en primer lugar, que $\Lambda_{\varphi,w}$ es un espacio vectorial. Para ello, sean $f, g \in \Lambda_{\varphi,w}$. Entonces existen constantes $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tales que

$$\int_0^\infty \varphi(\lambda_1 f^{**}(t))w(t)\,dt < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \varphi(\lambda_2 g^{**}(t))w(t)\,dt < \infty.$$

Dado que $(f+g)^{**} \le f^{**} + g^{**}$, tenemos

$$\frac{(f+g)^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}} \le \frac{f^{**}(t)+g^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}} = \frac{\frac{1}{\lambda_1}}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}}\frac{f^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{\frac{1}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}}\frac{g^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_2}}.$$

Dado que φ es no decreciente y convexa, de la desigualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{(f+g)^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}}\right) &\leq \varphi\left(\frac{\frac{1}{\lambda_1}}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}}\frac{f^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_1}}+\frac{\frac{1}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}}\frac{g^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_2}}\right)\\ &\leq \frac{\frac{1}{\lambda_1}}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}}\varphi\left(\frac{f^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_1}}\right)+\frac{\frac{1}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}}\varphi\left(\frac{g^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_2}}\right)\\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\varphi(\lambda_1 f^{**}(t))+\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\varphi(\lambda_2 g^{**}(t)).\end{aligned}$$

Multiplicando por el peso $w(t)$ e integrando,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{(f+g)^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}}\right)w(t)\,dt \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\int_0^\infty \varphi(\lambda_1 f^{**}(t))w(t)\,dt&\\ +\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\int_0^\infty \varphi(\lambda_2 g^{**}(t))w(t)\,dt<\infty.&\end{aligned}$$

Por lo tanto $f+g\in\Lambda_{\varphi,w}$.

Ahora veamos que para cualquier escalar α, $\alpha f\in\Lambda_{\varphi,w}$ si $f\in\Lambda_{\varphi,w}$. Existe $\lambda>0$ tal que

$$\int_0^\infty \varphi(\lambda f^{**}(t))w(t)\,dt<\infty.$$

Para verificar que $\alpha f\in\Lambda_{\varphi,w}$, tome $c=\frac{\lambda}{|\alpha|}$ (el caso $\alpha=0$ es trivial). Así

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{\lambda}{|\alpha|}(\alpha f)^{**}(t)\right)w(t)\,dt=\int_0^\infty \varphi\left(\frac{\lambda}{|\alpha|}|\alpha| f^{**}(t)\right)w(t)\,dt=\int_0^\infty \varphi\left(\lambda f^{**}(t)\right)w(t)\,dt<\infty.$$

Luego $\alpha f\in\Lambda_{\varphi,w}$.

A continuación demostraremos que $\|\cdot\|_{\Lambda_{\varphi,w}}$ es, efectivamente, una norma sobre $\Lambda_{\varphi,w}$.

Si $f=0$ μ-c.t.p., entonces $f^*(s)=0$ para todo s y así $f^{**}(t)=\frac{1}{t}\int_0^\infty 0\,ds=0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} &= \operatorname{ínf}\left\{\varepsilon>0:\int_0^\infty \varphi\left(\frac{f^{**}(t)}{\varepsilon}\right)w(t)\,dt\leq 1\right\}=\operatorname{ínf}\left\{\varepsilon>0:\int_0^\infty \varphi\left(\frac{0}{\varepsilon}\right)w(t)\,dt\leq 1\right\}\\ &= \operatorname{ínf}\left\{\varepsilon>0:\int_0^\infty \varphi\left(0\right)w(t)\,dt\leq 1\right\}=\operatorname{ínf}\left\{\varepsilon>0:\int_0^\infty 0\cdot w(t)\,dt\leq 1\right\}\\ &= \operatorname{ínf}\left\{\varepsilon>0:0\leq 1\right\}=0.\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}=0$, entonces $\int_0^\infty \varphi\left(\frac{f^{**}(t)}{\varepsilon}\right)w(t)\,dt\leq 1$ para cualquier $\varepsilon>0$ y esto sería contradictorio si $f\neq 0$ μ-c.t.p. Veámoslo.

Si $\{x\in X:|f(x)|>\varepsilon\}$ tiene medida positiva para algún $\varepsilon>0$, tenemos $|f(x)|>\varepsilon$ implica $f^*(s)>\varepsilon$, integrando de 0 a t en ambos miembros de esta desigualdad, obtenemos $\int_0^t f^*(s)\,ds>\int_0^t \varepsilon\,ds=\varepsilon t$, de donde $\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds>\varepsilon$. Es decir, $f^{**}(t)>\varepsilon$. Aplicando φ (la cual es creciente) en ambos lados de esta desigualdad, multiplicando por el peso w, e integrando, llegamos a $\int_0^\infty \varphi(f^{**}(t))w(t)\,dt > \int_0^\infty \varphi(\varepsilon)w(t)\,dt$, entonces

$$1 \geq \int_0^\infty \varphi(f^{**}(t))w(t)\,dt > \underbrace{\varphi(\varepsilon)}_{>0}\int_0^\infty w(t)\,dt = \infty.$$

Lo cual es contradictorio. Por lo tanto $\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = 0$ implica $f = 0$ μ-c.t.p.

Ahora demostraremos que $\|\lambda f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = |\lambda|\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$. Dado que $(\lambda f)^{**}(t) = |\lambda| f^{**}(t)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} &= \text{ínf}\left\{\varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(\lambda f)^{**}(t)}{\varepsilon}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\}\\
&= \text{ínf}\left\{\varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{|\lambda| f^{**}(t)}{\varepsilon}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\}\\
&= \text{ínf}\left\{\varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{f^{**}(t)}{\frac{\varepsilon}{|\lambda|}}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\}.
\end{aligned}$$

Tomando $\alpha = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$, obtenemos $\varepsilon = \alpha|\lambda|$, luego

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} &= \text{ínf}\left\{\alpha|\lambda| > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{f^{**}(t)}{\alpha}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\}\\
&= |\lambda|\,\text{ínf}\left\{\alpha > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{f^{**}(t)}{\alpha}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\}\\
&= |\lambda|\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}.
\end{aligned}$$

Verificaremos ahora la desigualdad triangular. Dado que $(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{(f+g)^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} &\leq \frac{f^{**}(t) + g^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\\
&= \frac{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\frac{f^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} + \frac{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\frac{g^{**}(t)}{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}.
\end{aligned}$$

Por desigualdad anterior y dado que φ es no decreciente y convexa obtenemos

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{(f+g)^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\right) &\leq \varphi\left(\frac{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\frac{f^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} + \frac{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\frac{g^{**}(t)}{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\right)\\
&\leq \frac{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\varphi\left(\frac{f^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\right) + \frac{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\varphi\left(\frac{g^{**}(t)}{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\right).
\end{aligned}$$

Multiplicando por el peso $w(t)$ e integrando,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \varphi\left(\frac{(f+g)^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}+\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\right) w(t)\,dt \\
&\leq \frac{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}+\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\underbrace{\int_0^\infty \varphi\left(\frac{f^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\right) w(t)\,dt}_{\leq 1}+\frac{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}+\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\underbrace{\int_0^\infty \varphi\left(\frac{g^{**}(t)}{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\right) w(t)\,dt}_{\leq 1} \\
&\leq \frac{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}+\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}+\frac{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}+\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}=1.
\end{aligned}$$

Concluimos que $\varepsilon=\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}+\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}$ es una constante para la cual

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{(f+g)^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}+\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\right) w(t)\,dt \leq 1.$$

Por lo tanto

$$\|f+g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}=\text{ínf}\left\{\varepsilon>0:\int_0^\infty \varphi\left(\frac{(f+g)^{**}(t)}{\varepsilon}\right) w(t)\,dt\leq 1\right\}\leq \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}+\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}.$$

Y se verifica la desigualdad triangular.

Por último, demostraremos la completitud del espacio. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\Lambda_{\varphi,w}$. Escojamos $\tilde{\varepsilon}>0$ tal que $\dfrac{\tilde{\varepsilon}}{\varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\right)}<\dfrac{1}{n+m}$ para $n,m\in\mathbb{N}$ y $\varepsilon>0, k_0>0$. Para este $\tilde{\varepsilon}$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n-f_m\|_{\Lambda_{\varphi,w}}<\tilde{\varepsilon}.$$

Si $n,m\geq n_0$. Por la definición de la norma de Luxemburg podemos escoger $k_0>0$ de manera que $k_0<\tilde{\varepsilon}$ y

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{(f_n-f_m)^{**}(t)}{k_0}\right) w(t)\,dt\leq 1.$$

Sea $E=\{x\in X:|f_n(x)-f_m(x)|>\varepsilon\}$, entonces

$$\varepsilon\chi_E(x)\leq |f_n(x)-f_m(x)|.$$

Y así $\varepsilon\chi_E^*(s)\leq (f_n-f_m)^*(s)$ implica

$$\varepsilon\cdot\frac{1}{t}\int_0^t \chi_E^*(s)\,ds\leq \frac{1}{t}\int_0^t (f_n-f_m)^*(s)\,ds,$$

es decir

$$\varepsilon\chi_E^{**}(t)\leq (f_n-f_m)^{**}(t),$$

de donde

$$\frac{\varepsilon\chi_E^{**}(t)}{k_0}\leq\frac{(f_n-f_m)^{**}(t)}{k_0}.$$

Aplicando φ que es no decreciente y multiplicando por el peso w que es no negativo, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\chi_E^{**}(t)\right)w(t) \leq \varphi\left(\frac{(f_n-f_m)^{**}(t)}{k_0}\right)w(t)\\
\Longrightarrow\ &\int_0^\infty \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\chi_E^{**}(t)\right)w(t)\,dt \leq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(f_n-f_m)^{**}(t)}{k_0}\right)w(t)\,dt. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

Ahora, dado que

$$\chi_E^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \chi_E^*(s)\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t \chi_{(0,\mu(E))}(s)\,ds = \begin{cases} 1, & \text{si } t<\mu(E)\\ \frac{\mu(E)}{t}, & \text{si } t\geq \mu(E). \end{cases}$$

Tenemos que

$$\chi_E^{**}(t) = \chi_{(0,\mu(E))}(t) + \frac{\mu(E)}{t}\chi_{[\mu(E),\infty)}(t).$$

Así que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\chi_E^{**}(t)\right)w(t)\,dt &= \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\left(\chi_{(0,\mu(E))}(t)+\frac{\mu(E)}{t}\chi_{[\mu(E),\infty)}(t)\right)\right)w(t)\,dt\\
&= \int_0^{\mu(E)} \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\right)w(t)\,dt + \int_{\mu(E)}^\infty \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\cdot\mu(E)\cdot\frac{1}{t}\right)w(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Reemplazando esta última igualdad en (3.3), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\mu(E)} \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\right)w(t)\,dt + \int_{\mu(E)}^\infty \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\cdot\mu(E)\cdot\frac{1}{t}\right)w(t)\,dt \leq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(f_n-f_m)^{**}(t)}{k_0}\right)w(t)\,dt\\
\Longrightarrow\ &\int_0^{\mu(E)} \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\right)w(t)\,dt \leq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(f_n-f_m)^{**}(t)}{k_0}\right)w(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\mu(E)} \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\right)w(t)\,dt \leq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(f_n-f_m)^{**}(t)}{k_0}\right)w(t)\,dt\\
\Longrightarrow\ &\tilde{\varepsilon}\int_0^{D_{f_n-f_m}(\varepsilon)} w(t)\,dt \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\right)}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{(f_n-f_m)^{**}(t)}{k_0}\right)w(t)\,dt\\
\Longrightarrow\ &\tilde{\varepsilon}\int_0^{D_{f_n-f_m}(\varepsilon)} w(t)\,dt \leq \frac{1}{n+m}\\
\Longrightarrow\ &\tilde{\varepsilon}\lim_{n,m\to\infty}\int_0^{D_{f_n-f_m}(\varepsilon)} w(t) = 0.
\end{aligned}$$

Como $w>0$, debe tenerse que $\lim_{n,m\to\infty} D_{f_n-f_m}(\varepsilon)=0$, es decir $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en medida, esto implica que existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge en casi todo punto a una función medible f, esto es, $f_{n_k}\to f$ μ-c.t.p.

Sea $\alpha > 0$. Por el Lema 3.5 existe un entero suficientemente grande $n(\alpha)$ tal que

$$\int_0^\infty \varphi\left(\alpha(f_n - f_m)^{**}(t)\right) w(t)\, dt \leq 1, \quad \forall\ m, n \geq n(\alpha).$$

Por el lema de Fatou, esto conduce a

$$\int_0^\infty \varphi\left(\alpha(f_n - f)^{**}(t)\right) w(t)\, dt \leq \liminf \int_0^\infty \varphi\left(\alpha(f_n - f_m)^{**}(t)\right) w(t)\, dt \leq 1$$

$\forall\ m \geq n(\alpha)$. Así $f_n - f$ pertenece a $\Lambda_{\varphi,w}$. Como $f_n \in \Lambda_{\varphi,w}$, entonces $f \in \Lambda_{\varphi,w}$.

Además, como $\limsup_{m\to\infty} \int_0^\infty \varphi\left(\alpha(f_m - f)^{**}(t)\right) w(t)\, dt \leq 1$ para todo $\alpha > 0$, tenemos $\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = 0$. Esto demuestra que $\Lambda_{\varphi,w}$ es completo. □

4. Operador multiplicación en el espacio $\Lambda_{\varphi,w}$

La última sección de este artículo trata sobre el estudio de un tipo especial de operador, llamado *operador multiplicación*, el cual transforma cualquier función $f \in \Lambda_{\varphi,w}$, en la función $u \cdot f \in \Lambda_{\varphi,w}$, donde $(u \cdot f)(x) := u(x) \cdot f(x)$ representa el producto usual de funciones.

Para una revisión más detallada del operador de multiplicación en diferentes tipos de espacios, se pueden consultar, entre otras, las referencias [1, 3, 4, 8, 13, 17, 18].

Definición 4.1. *Sea $F(X)$ un espacio de funciones definidas sobre un conjunto no vacío X. Sea $u : X \to \mathbb{C}$ una función tal que $u \cdot f \in F(X)$ para cualquier $f \in F(X)$.*

La transformación $f \mapsto u \cdot f$ definida sobre F se denota por M_u. En el caso en que $F(X)$ sea un espacio topológico y M_u sea continua, lo llamaremos el operador multiplicación inducido por u.

Los operadores multiplicación generalizan la noción de operador dado por una matriz diagonal. Precisamente, uno de los resultados de la teoría de operadores es un teorema espectral, que afirma que todo operador auto-adjunto definido sobre un espacio de Hilbert es unitariamente equivalente a un operador multiplicación sobre un espacio L_2.

Para un estudio sistemático de los operadores multiplicación definidos en diferentes espacios véase [1, 3, 4, 13, 17].

4.1. Inyectividad y acotación de M_u

En general, los operadores multiplicación sobre espacios de medida no son inyectivos. Por ejemplo, sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y

$$A = X \setminus \operatorname{supp}(u) = \{x \in X : u(x) = 0\}.$$

Si $\mu(A) \neq 0$ y $f = \chi_A$, entonces para cualquier $x \in X$ tenemos $f(x)u(x) = 0$ lo cual implica que $M_u(f) = 0$, así $\ker(M_u) \neq \{0\}$ y por lo tanto M_u no es inyectivo.

Por contrapositiva, tenemos que si M_u es inyectivo, entonces $\mu(X \setminus \operatorname{supp}(u)) = 0$. Por otro lado, si $\mu(X \setminus \operatorname{supp}(u)) = 0$ y μ es una medida completa, entonces $M_u(f) = 0$ implica $f(x)u(x) = 0$ para todo $x \in X$, luego $\{x \in X : f(x) \neq 0\} \subseteq X \setminus \operatorname{supp}(u)$ y así $f = 0$ μ-c.t.p. en X. Luego, si $\mu(X \setminus \operatorname{supp}(u)) = 0$ y μ es una medida completa, entonces M_u es inyectivo.

A continuación definimos un conjunto sobre el cual M_u es inyectivo.

Definición 4.2. *Se define el conjunto $\Lambda_{\varphi,w}(\operatorname{supp} u)$ mediante*

$$\Lambda_{\varphi,w}(\operatorname{supp} u) = \{f\chi_{\operatorname{supp} u} : f \in \Lambda_{\varphi,w}\}.$$

Es decir, los elementos de $\Lambda_{\varphi,w}(\operatorname{supp} u)$ son funciones de $\Lambda_{\varphi,w}$ restringidas al soporte de u.

Proposición 4.3. *M_u es inyectivo en $Y = \Lambda_{\varphi,w}(\operatorname{supp} u)$.*

Demostración. Sea $Y = \Lambda_{\varphi,w}(\operatorname{supp} u) = \{f\chi_{\operatorname{supp} u} : f \in \Lambda_{\varphi,w}\}$. Luego, si $M_u(\tilde{f}) = 0$ con $\tilde{f} = f\chi_{\operatorname{supp} u} \in Y$, entonces $f(x)\chi_{\operatorname{supp} u}(x)u(x) = 0$ para todo $x \in X$ y así $f(x)u(x) = 0$ para todo $x \in \operatorname{supp}(u)$, de donde $f(x) = 0$ para todo $x \in \operatorname{supp}(u)$, con lo cual $f(x)\chi_{\operatorname{supp} u(x)}(x) = 0$ para todo $x \in X$. Así, $\tilde{f} = 0$, lo cual completa la demostración. □

A continuación, se caracteriza la acotación del operador M_u en términos de la acotación de la función u.

Teorema 4.4. *La transformación lineal $M_u : f \to u \cdot f$ definida sobre el subespacio $\Lambda_{\varphi,w}$ es acotada si y sólo si u es esencialmente acotada. Además,*

$$\|M_u\| = \|u\|_\infty.$$

Demostración. Sea $u \in L_\infty(\mu)$, note que $|(uf)(x)| \leq \|u\|_\infty |f(x)|$, así

$$\{x : |(uf)(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : \|u\|_\infty |f(x)| > \lambda\} = \left\{x : |f(x)| > \frac{\lambda}{\|u\|_\infty}\right\},$$

entonces

$$D_{uf}(\lambda) \leq D_f\left(\frac{\lambda}{\|u\|_\infty}\right)$$

y así

$$\left\{\lambda > 0 : D_f\left(\frac{\lambda}{\|u\|_\infty}\right) \leq s\right\} \subseteq \{\lambda > 0 : D_{uf}(\lambda) \leq s\}.$$

De esto obtenemos

$$\begin{aligned}
\inf\{\lambda > 0 : D_{uf}(\lambda) \leq s\} &\leq \inf\left\{\lambda > 0 : D_f\left(\frac{\lambda}{\|u\|_\infty}\right) \leq s\right\} \\
&\leq \inf\{\alpha\|u\|_\infty > 0 : D_f(\alpha) \leq s\} \\
&= \|u\|_\infty \inf\{\alpha > 0 : D_f(\alpha) \leq s\}.
\end{aligned}$$

Luego

$$(uf)^*(s) \leq \|u\|_\infty f^*(s).$$

Integrando desde 0 hasta t y multiplicando por $\frac{1}{t}$, obtenemos

$$\frac{1}{t}\int_0^t (uf)^*(s)\,ds \leq \frac{1}{t}\int_0^t \|u\|_\infty f^*(s)\,ds.$$

Es decir

$$(uf)^{**}(t) \leq \|u\|_\infty f^{**}(t).$$

Dividiendo por $\|u\|_\infty \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}$ se tiene que

$$\frac{(uf)^{**}(t)}{\|u\|_\infty \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \leq \frac{\|u\|_\infty f^{**}(t)}{\|u\|_\infty \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} = \frac{f^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}.$$

Dado que φ es no decreciente y el peso w es no negativo, de la última desigualdad obtenemos

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{(uf)^{**}(t)}{\|u\|_\infty \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\right) w(t)\,dt \leq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{f^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\right) w(t)\,dt \leq 1.$$

De esta manera $uf \in \Lambda_{\varphi,w}$, además,

$$\|M_u f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \leq \|u\|_\infty \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}. \tag{4.1}$$

Recíprocamente, supongamos que M_u es un operador acotado. Si u no es una función esencialmente acotada, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $E_n = \{x \in X : |u(x)| > n\}$ tiene medida positiva. Ahora, sabemos que

$$\chi^*_{E_n}(s) = \chi_{0,\mu(E_n)}(s)$$

y note que

$$\{x : n\chi_{E_n}(x) > \lambda\} \subseteq \{x : |u\chi_{E_n}(x)| > \lambda\},$$

entonces

$$D_{n\chi_{E_n}}(\lambda) \leq D_{u\chi_{E_n}}(\lambda),$$

de aquí obtenemos

$$\{\lambda > 0 : D_{u\chi_{E_n}}(\lambda) \leq s\} \subseteq \{\lambda > 0 : D_{n\chi_{E_n}}(\lambda) \leq s\}.$$

Así

$$\text{ínf}\{\lambda > 0 : D_{n\chi_{E_n}}(\lambda) \leq s\} \leq \text{ínf}\{\lambda > 0 : D_{u\chi_{E_n}}(\lambda) \leq s\}.$$

Es decir,

$$(u\chi_{E_n})^*(s) \geq n(\chi_{E_n})^*(s).$$

Integrando desde 0 hasta t y multiplicando por $\frac{1}{t}$

$$\frac{1}{t}\int_0^t (u\chi_{E_n})^*(s)\,ds \geq \frac{1}{t}\int_0^t n(\chi_{E_n})^*(s)\,ds.$$

Esto significa que

$$(u\chi_{E_n})^{**}(t) \geq n(\chi_{E_n})^{**}(t).$$

De aquí obtenemos

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{(u\chi_{E_n})^{**}(t)}{k}\right) w(t)\,dt \geq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(n\chi_{E_n})^{**}(t)}{k}\right) w(t)\,dt$$

y así

$$\left\{k > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(u\chi_{E_n})^{**}(t)}{k}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\} \subseteq \left\{k > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(n\chi_{E_n})^{**}(t)}{k}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\},$$

luego

$$\text{ínf}\left\{k > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(n\chi_{E_n})^{**}(t)}{k}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\} \leq \\ \text{ínf}\left\{k > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(u\chi_{E_n})^{**}(t)}{k}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\},$$

esto significa que

$$\|M_u\chi_{E_n}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \geq n\|\chi_{E_n}\|_{\Lambda_{\varphi,w}},$$

lo cual contradice la acotación de M_u. Luego u debe ser esencialmente acotada.

Ahora, evidentemente, de (4.1) obtenemos

$$\|M_u\| \leq \|u\|_\infty. \tag{4.2}$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $E = \{x \in X : |u(x)| \geq \|u\|_\infty - \varepsilon\}$ (observe que $\mu(E) > 0$), entonces

$$\{x \in X : (\|u\|_\infty - \varepsilon)\chi_E(x) > \lambda\} \subseteq \{x \in X : |u\chi_E(x)| > \lambda\},$$

es decir

$$D_{(\|u\|_\infty-\varepsilon)\chi_E}(\lambda) \leq D_{u\chi_E}(\lambda)$$

y así

$$\{\lambda > 0 : D_{u\chi_E}(\lambda) \leq s\} \subseteq \{\lambda > 0 : D_{(\|u\|_\infty-\varepsilon)\chi_E} \leq s\},$$

de esto obtenemos

$$\text{ínf}\{\lambda > 0 : D_{(\|u\|_\infty-\varepsilon)\chi_E} \leq s\} \leq \text{ínf}\{\lambda > 0 : D_{u\chi_E}(\lambda) \leq s\}.$$

Luego

$$(u\chi_E)^*(s) \geq (\|u\|_\infty - \varepsilon)(\chi_E)^*(s),$$

integrando desde 0 hasta t y multiplicando por $\frac{1}{t}$ obtenemos

$$\frac{1}{t}\int_0^t (u\chi_E)^*(s)\,ds \geq \frac{1}{t}\int_0^t (\|u\|_\infty - \varepsilon)(\chi_E)^*(s)\,ds,$$

es decir

$$(u\chi_E)^{**}(t) \geq (\|u\|_\infty - \varepsilon)(\chi_E)^{**}(t),$$

entonces

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{(\|u\|_\infty - \varepsilon)(\chi_E)^{**}(t)}{\|M_u\chi_E\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\right) w(t)\,dt \leq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(u\chi_E)^{**}(t)}{\|M_u\chi_E\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\right) w(t)\,dt \leq 1,$$

lo cual implica que

$$\|(\|u\|_\infty - \varepsilon)\chi_E\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \leq \|M_u\chi_E\|_{\Lambda_{\varphi,w}},$$

de aquí

$$(\|u\|_\infty - \varepsilon)\|\chi_E\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \leq \|M_u\chi_E\|_{\Lambda_{\varphi,w}},$$

así

$$\|u\|_\infty - \varepsilon \leq \frac{\|M_u\chi_E\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|\chi_E\|_{\Lambda_{\varphi,w}}},$$

lo cual implica que

$$\|M_u\| \geq \|u\|_\infty - \varepsilon, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

De la arbitrariedad de ε, se deduce

$$\|M_u\| \geq \|u\|_\infty.$$

En conclusión

$$\|M_u\| = \|u\|_\infty. \qquad \square$$

4.2. Rango cerrado de M_u

En esta sección, caracterizaremos los casos en los cuales M_u tiene rango cerrado. Iniciamos con un resultado del análisis funcional.

Teorema 4.5. *Sea $T : X \to Y$ un operador acotado, en donde X y Y son espacios de Banach. Entonces T es acotado inferiormente si y sólo si T es inyectivo y tiene rango cerrado.*

Una demostración del Teorema 4.5 se puede encontrar en [2].

Corolario 4.6. *$M_u : \Lambda_{\varphi,w}(\operatorname{supp} u) \to \Lambda_{\varphi,w}(\operatorname{supp} u)$ tiene rango cerrado si y sólo si M_u es acotado inferiormente sobre $\Lambda_{\varphi,w}(\operatorname{supp} u)$.*

Este resultado es claro dado que M_u es inyectivo en $\Lambda_{\varphi,w}(\operatorname{supp} u)$. Además, si $u \neq 0$ μ-c.t.p. en X, siendo μ una medida completa, entonces se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.7. *Si $\mu \neq 0$ μ-c.t.p. en X y μ es una medida completa, entonces*

$$M_u : \Lambda_{\varphi,w}(X, \mathcal{A}, u) \to \Lambda_{\varphi,w}(X, \mathcal{A}, u)$$

tiene rango cerrado si y sólo si M_u es acotado inferiormente sobre $\Lambda_{\varphi,w}(X, \mathcal{A}, u)$.

Teorema 4.8. *$M_u : \Lambda_{\varphi,w}(\operatorname{supp} u) \to \Lambda_{\varphi,w}(\operatorname{supp} u)$ tiene rango cerrado si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que $|u(x)| > \delta$ μ-c.t.p. sobre $\operatorname{supp} \mu$.*

Demostración. Si existe $\delta > 0$ tal que $|u(x)| \geq \delta$ μ-c.t.p. sobre $\operatorname{supp}(u)$, entonces para $f \in \Lambda_{\varphi,w}$ y $t > 0$ tenemos

$$\{x : |\delta f \chi_{\operatorname{supp}(u)}(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : |uf \chi_{\operatorname{supp}(u)}(x)| > \lambda\}$$

y así

$$D_{\delta f \chi_{\operatorname{supp}(u)}}(\lambda) \leq D_{uf \chi_{\operatorname{supp}(u)}}(\lambda),$$

entonces

$$\{\lambda > 0 : D_{uf \chi_{\operatorname{supp}(u)}}(\lambda) \leq s\} \subseteq \{\lambda > 0 : D_{\delta f \chi_{\operatorname{supp}(u)}}(\lambda) \leq s\},$$

de aquí obtenemos

$$\inf\{\lambda > 0 : D_{\delta f \chi_{\operatorname{supp}(u)}}(\lambda) \leq s\} \leq \inf\{\lambda > 0 : D_{uf \chi_{\operatorname{supp}(u)}}(\lambda) \leq s\},$$

luego

$$(uf \chi_{\operatorname{supp}(u)})^*(s) \geq \delta (f \chi_{\operatorname{supp}(u)})^*(s),$$

integrando desde 0 hasta t y multiplicando por $\frac{1}{t}$,

$$\frac{1}{t}\int_0^t (uf\chi_{\text{supp}(u)})^*(s)\,ds \geq \frac{1}{t}\int_0^t \delta(f\chi_{\text{supp}(u)})^*(s)\,ds,$$

es decir

$$(uf\chi_{\text{supp}(u)})^{**}(t) \geq \delta(f\chi_{\text{supp}(u)})^{**}(t),$$

entonces se tiene que

$$\left\{k>0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(uf\chi_{\text{supp}(u)})^{**}(t)}{k}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\} \subseteq \left\{k>0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(\delta f\chi_{\text{supp}(u)})^{**}(t)}{k}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\}.$$

Así

$$\text{ínf}\left\{k>0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(\delta f\chi_{\text{supp}(u)})^{**}(t)}{k}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\} \leq \text{ínf}\left\{k>0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(uf\chi_{\text{supp}(u)})^{**}(t)}{k}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\},$$

lo cual significa que

$$\|\delta f\chi_{\text{supp}(u)}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \leq \|M_u f\chi_{\text{supp}(u)}\|_{\Lambda_{\varphi,w}},$$

luego

$$\|M_u f\chi_{\text{supp}(u)}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \geq \delta\|f\chi_{\text{supp}(u)}\|_{\Lambda_{\varphi,w}}.$$

Por lo tanto M_u tiene rango cerrado.

Recíprocamente, supongamos que M_u tiene rango cerrado sobre $\Lambda_{\varphi,w}(\text{supp}(u))$. Dado que $M_u : \Lambda_{\varphi,w}(\text{supp}(u)) \to \Lambda_{\varphi,w}(\text{supp}(u))$ es inyectivo, entonces M_u es acotado inferiormente, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|M_u f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \geq \varepsilon\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}$$

para toda $f \in \Lambda_{\varphi,w}(\text{supp}(u))$. Sea $E = \{x \in \text{supp}(u) : |u(x)| < \varepsilon/2\}$.

Si $\mu(E) > 0$, podemos hallar un conjunto medible $F \subseteq E$ tal que $\chi_F \in \Lambda_{\varphi,w}(\text{supp}(u))$. Entonces

$$\{x : |u\chi_F| > \lambda\} \subseteq \left\{x : \left|\frac{\varepsilon}{2}\chi_F\right| > \lambda\right\}$$

y así

$$D_{u\chi_F}(\lambda) \leq D_{\frac{\varepsilon}{2}\chi_F}(\lambda),$$

de esto obtenemos

$$\{\lambda > 0 : D_{\frac{\varepsilon}{2}\chi_F}(\lambda) \leq s\} \subseteq \{\lambda > 0 : D_{u\chi_F}(\lambda) \leq s\},$$

entonces

$$\text{ínf}\{\lambda > 0 : D_{u\chi_F}(\lambda) \leq s\} \leq \text{ínf}\{\lambda > 0 : D_{\frac{\varepsilon}{2}\chi_F}(\lambda) \leq s\},$$

esto es

$$(u\chi_F)^*(s) \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\chi_F\right)^*(s),$$

integrando desde 0 hasta t y multiplicando por $\frac{1}{t}$, obtenemos

$$\frac{1}{t}\int_0^t (u\chi_F)^*(s)\,ds \leq \frac{1}{t}\int_0^t \left(\frac{\varepsilon}{2}\chi_F\right)^*(s)\,ds,$$

es decir

$$(u\chi_F)^{**}(t) \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\chi_F\right)^{**}(t).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\|M_u\chi_F\|_{\Lambda_{\varphi,w}} &= \text{ínf}\left\{\varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(u\chi_F)^{**}(t)}{\varepsilon}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\}\\ &\leq \text{ínf}\left\{\varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\chi_F\right)^{**}(t)}{\varepsilon}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\} = \left\|\frac{\varepsilon}{2}\chi_F\right\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = \frac{\varepsilon}{2}\cdot\|\chi_F\|_{\Lambda_{\varphi,w}}\end{aligned}$$

lo cual es contradictorio. Así que $\mu(E) = 0$. Esto completa la demostración. □

Corolario 4.9. *Si $\mu \neq 0$ μ-c.t.p. en X y μ es una medida completa, entonces M_u tiene rango cerrado sobre $\Lambda_{\varphi,w}(X, \mathcal{A}, \mu)$ si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que $|u(x)| \geq \delta$ μ-c.t.p. en X.*

Demostración. El resultado se dá como consecuencia de que

$$\Lambda_{\varphi,w}(X, \mathcal{A}, \mu) = \Lambda_{\varphi,w}(\operatorname{supp} u).$$ □

4.3. Invertibilidad de M_u

En esta sección, caracterizaremos la invertibilidad de M_u en términos de la invertibilidad de u (en el sentido multiplicativo). Iniciamos con el siguiente resultado.

Teorema 4.10. *El conjunto de todos los operadores multiplicación sobre $\Lambda_{\varphi,w}$ es una subálgebra maximal abeliana del conjunto $B(\Lambda_{\varphi,w})$, el álgebra de todos los operadores lineales acotados sobre $\Lambda_{\varphi,w}$.*

Demostración. Sea

$$\mathcal{H} = \{M_u : u \in L_\infty\}$$

y considere el operador multiplicación

$$M_u \cdot M_v = M_{uv},$$

donde $M_u, M_v \in \mathcal{H}$. Verifiquemos que ésta es un álgebra de Banach. Sean $u, v \in L_\infty$, entonces $|u| \leq \|u\|_\infty$ y $|v| \leq \|v\|_\infty$, luego

$$\|uv\|_\infty \leq \|u\|_\infty \|v\|_\infty,$$

esto implica que el producto es una operación cerrada, además como el producto usual de funciones es asociativo, conmutativo y distributivo respecto a la suma y al producto por escalar, concluimos que $\mathcal{H}$ es una subálgebra de $B(\Lambda_{\varphi,w})$. Ahora, vamos a verificar que es una subálgebra maximal, es decir, dado $N \in B(\Lambda_{\varphi,w})$, si N conmuta con $\mathcal{H}$, debemos demostrar que $N \in \mathcal{H}$. Consideremos la función unitaria $e : X \to \mathbb{C}$ definida por $e(x) = 1$ para todo $x \in X$. Sea $N \in B(\Lambda_{\varphi,w})$ un operador que conmuta con $\mathcal{H}$ y sea χ_E la función característica de un conjunto medible E. Entonces

$$N(\chi_E) = N[M_{\chi_E}(e)] = M_{\chi_E}[N(e)] = \chi_E \cdot N(e) = N(e) \cdot \chi_E = M_w \cdot \chi_E,$$

donde $w = N(e)$. De manera similar

$$N(s) = M_w(s) \tag{4.3}$$

para cualquier función simple.

Ahora, verificaremos que $w \in L_\infty$. Por contradicción, supongamos que $w \notin L_\infty$, entonces el conjunto

$$E_n = \{x \in X : |w(x)| > n\}$$

tiene medida positiva para cada $n \in \mathbb{N}$. Note que

$$M_w(\chi_{E_n})(x) = w\chi_{E_n}(x) \geq n\chi_{E_n}(x)$$

para todo $x \in X$. Por la monotonicidad de la función distribución tenemos que

$$D_{w\chi_{E_n}}(\lambda) \geq D_{\chi_{E_n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right).$$

De aquí

$$\{\lambda > 0 : D_{w\chi_{E_n}}(\lambda) \leq s\} \subseteq \left\{\lambda > 0 : D_{\chi_{E_n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) \leq s\right\}.$$

Entonces

$$\inf\left\{\lambda > 0 : D_{\chi_{E_n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) \leq s\right\} \leq \inf\{\lambda > 0 : D_{w\chi_{E_n}}(\lambda) \leq s\}.$$

Tomando $\alpha = \frac{\lambda}{n}$, obtenemos

$$\|w\chi_{E_n}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \geq n\|\chi_{E_n}\|_{\Lambda_{\varphi,w}},$$

como χ_E es una función simple, por (4.3) tenemos

$$M_w(\chi_{E_n}) = N(\chi_{E_n}).$$

Así que

$$\|N(\chi_{E_n})\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \geq n\|\chi_{E_n}\|_{\Lambda_{\varphi,w}}.$$

Entonces N es un operador no acotado. Esto contradice el hecho que N es acotado.

Por lo tanto $w \in L_\infty$ y por el Teorema 4.4 M_w es acotado.

Ahora, dada $f \in \Lambda_{\varphi,w}$, existe una sucesión no decreciente $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples medibles tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = f$ y por (4.3) tenemos

$$N(f) = N(\lim s_n) = \lim N(s_n) = \lim M_w(s_n) = M_w(\lim s_n) = M_w(f).$$

Luego $N(f) = M_w(f)$ para toda $f \in \Lambda_{\varphi,w}$ y así concluimos que $N \in \mathcal{H}$. $\square$

Corolario 4.11. *El operador multiplicación es invertible sobre $B(\Lambda_{\varphi,w})$ si y sólo si u es invertible sobre L_∞.*

Demostración. Supongamos que M_u es invertible. Entonces existe $N \in B(\Lambda_{\varphi,w})$ tal que

$$M_u \cdot N = N \cdot M_u = I \tag{4.4}$$

donde I representa el operador identidad. Verifiquemos que N conmuta con $\mathcal{H}$.

Sea $M_w \in \mathcal{H}$, entonces

$$M_w \cdot M_u = M_u \cdot M_w. \tag{4.5}$$

Aplicando N a (4.4) y por (4.5) obtenemos

$$\begin{aligned} N \cdot M_w \cdot M_u \cdot N &= N \cdot M_u \cdot M_w \cdot N, \\ N \cdot M_w \cdot I &= I \cdot M_w \cdot N, \\ N \cdot M_w &= M_w \cdot N, \end{aligned}$$

y así concluimos que N conmuta con $\mathcal{H}$. Por el Teorema 4.10 $N \in \mathcal{H}$, entonces existe $g \in L_\infty$ tal que $N = M_g$, así

$$M_u \cdot M_g = M_g \cdot M_u = I,$$

esto implica que $ug = gu = 1$ μ-c.t.p., lo cual significa que u es invertible sobre L_∞.

Por otro lado, supongamos que u es invertible sobre L_∞, es decir, $\frac{1}{u} \in L_\infty$, entonces

$$M_u \cdot M_{\frac{1}{u}} = M_{\frac{1}{u}} \cdot M_u = M_{\left(\frac{1}{u}\right)u} = M_1 = I,$$

lo cual significa que M_u es invertible sobre $B(\Lambda_{\varphi,w})$. $\square$

4.4. Compacidad de M_u

Para finalizar este artículo, caracterizaremos la compacidad del operador M_u. La siguiente definición y el lema subsecuente, tendrán un papel importante en los resultados posteriores.

Definición 4.12. *Sea $T : X \to X$ un operador. Un subespacio V de X se dice invariante bajo T (o simplemente T-invariante) si*

$$T(V) \subseteq V.$$

Lema 4.13. *Sea $T : X \to X$ un operador. Si T es compacto y M es un subespacio cerrado T-invariante de X, entonces $T\,|_M$ es compacto.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $M \subseteq X$. Entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$, así que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $T(x_{n_k})$ converge in X, pero $T(x_{n_k}) \subseteq T(M)$ pues $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq M$. Entonces $T(x_{n_k})$ converge en $\overline{T(M)} \subseteq \overline{M} = M$. Así $T(x_{n_k})$ converge en M, luego $T\,|_M$ es compacto. $\square$

Teorema 4.14. *Sea M_u un operador compacto. Para $\varepsilon > 0$ defina*

$$A_\varepsilon(u) = \{x \in X : |u(x)| \geq \varepsilon\},$$

y

$$\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u)) = \{f\chi_{A_\varepsilon(u)} : f \in \Lambda_{\varphi,w}\}.$$

Entonces $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ es un subespacio cerrado invariante de $\Lambda_{\varphi,w}$ bajo M_u. Además

$$M_u \Big|_{\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))}$$

es un operador compacto.

Demostración. Sean $h, s \in \Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces $h = f\chi_{A_\varepsilon(u)}$ y $s = g\chi_{A_\varepsilon(u)}$ donde $f, g \in \Lambda_{\varphi,w}$ así

$$\alpha h + \beta s = \alpha(f\chi_{A_\varepsilon(u)}) + \beta(g\chi_{A_\varepsilon(u)}) = (\alpha f + \beta g)\chi_{A_\varepsilon(u)} \in \Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u)),$$

lo cual significa que $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ es un subespacio $\Lambda_{\varphi,w}$.

Ahora, para todo $h \in \Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ tenemos

$$M_u h = uh = u(f\chi_{A_\varepsilon(u)}) = (uf)\chi_{A_\varepsilon(u)},$$

donde $uf \in \Lambda_{\varphi,w}$. Por consiguiente $M_u \in \Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$, lo cual significa que $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ es un subespacio invariante de $\Lambda_{\varphi,w}$ bajo M_u.

Ahora, verificaremos que $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ es un conjunto cerrado. En efecto, sea g en la clausura de $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$, entonces existe una sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ tal que

$$g_n \to g \text{ en } \Lambda_{\varphi,w}.$$

Debemos demostrar que g pertenece a $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$. Note que

$$g = g\chi_{A_\varepsilon(u)} + g\chi_{A_\varepsilon^c(u)}.$$

Demostraremos que $g\chi_{A_\varepsilon^c(u)} = 0$. Para esto, dado $\varepsilon_1 > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|g\chi_{A_\varepsilon^c(u)}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = \|(g - g_{n_0} + g_{n_0})\chi_{A_\varepsilon^c(u)}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = \|(g - g_{n_0})\chi_{A_\varepsilon^c(u)}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \leq \|g - g_{n_0}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} < \varepsilon_1.$$

Así, $g\chi_{A_\varepsilon^c(u)} = 0$ lo cual significa que $g = g\chi_{A_\varepsilon(u)}$, es decir, $g \in \Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$. Finalmente por el Lema 4.13, tenemos que

$$M_u\big|_{\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))},$$

es un operador compacto. Con esto termina la demostración. $\square$

Teorema 4.15. *Sea $M_u \in B(\Lambda_{\varphi,w})$. Entonces M_u es compacto si y sólo si $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ es de dimensión finita para todo $\varepsilon > 0$.*

Demostración. Si $|u(x)| \geq \varepsilon$, observe que

$$|uf\chi_{A_\varepsilon}(x)| \geq \varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)}(x)$$

y así

$$\{x : \varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)}(x) > \lambda\} \subseteq \{x : \left|uf\chi_{A_\varepsilon(u)}(x)\right| > \lambda\},$$

luego

$$D_{\varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)}}(\lambda) \leq D_{uf\chi_{A_\varepsilon(u)}}(\lambda),$$

entonces

$$\{\lambda > 0 : D_{uf\chi_{A_\varepsilon(u)}}(\lambda) \leq s\} \subseteq \{\lambda > 0 : D_{\varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)}}(\lambda) \leq s\}$$

de aquí obtenemos

$$\text{ínf}\{\lambda > 0 : D_{\varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)}}(\lambda) \leq s\} \leq \text{ínf}\{\lambda > 0 : D_{uf\chi_{A_\varepsilon(u)}}(\lambda) \leq s\},$$

es decir

$$(\varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)})^*(s) \leq (uf\chi_{A_\varepsilon(u)})^*(s),$$

integrando de 0 a t y multiplicando por $\frac{1}{t}$ obtenemos

$$\frac{1}{t}\int_0^t (\varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)})^*(s)\,dt \leq \frac{1}{t}\int_0^t (uf\chi_{A_\varepsilon(u)})^*(s)\,ds,$$

o sea

$$(\varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)})^{**}(t) \leq (uf\chi_{A_\varepsilon(u)})^{**}(t),$$

multiplicando la anterior desigualdad por $\frac{1}{k} > 0$,

$$\frac{(\varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)})^{**}(t)}{k} \leq \frac{(uf\chi_{A_\varepsilon(u)})^{**}(t)}{k}.$$

Dado que φ es no decreciente y el peso w es una función no negativa, esto conduce a

$$\varphi\left((\varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)})^{**}(t)\right) w(t) \leq \varphi\left((uf\chi_{A_\varepsilon(u)})^{**}(t)\right) w(t).$$

Integrando la anterior desigualdad de 0 a ∞,

$$\int_0^\infty \varphi\left((\varepsilon f\chi_{A_\varepsilon(u)})^{**}(t)\right) w(t)\,dt \leq \int_0^\infty \varphi\left((uf\chi_{A_\varepsilon(u)})^{**}(t)\right) w(t)\,dt.$$

Entonces

$$\left\{k > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(uf\chi_{A_\varepsilon(u)})^{**}(t)}{k}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\} \subseteq \left\{k > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\varepsilon(f\chi_{A_\varepsilon(u)})^{**}(t)}{k}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\}.$$

Por lo tanto

$$\text{ínf}\left\{k > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\varepsilon(f\chi_{A_\varepsilon(u)})^{**}(t)}{k}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\} \leq \text{ínf}\left\{k > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(uf\chi_{A_\varepsilon(u)})^{**}(t)}{k}\right) w(t)\,dt \leq 1\right\}.$$

Y así

$$\|M_u f\chi_{A_\varepsilon(u)}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \geq \varepsilon\|f\chi_{A_\varepsilon(u)}\|_{\Lambda_{\varphi,w}}. \tag{4.6}$$

Ahora, si M_u es un operador compacto, entonces $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ es un subespacio cerrado invariante de $\Lambda_{\varphi,w}$ bajo M_u y por el Lema 4.13

$$M_u\big|_{\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))}$$

es un operador compacto. Entonces por (4.6) $M_u\big|_{\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))}$ tiene rango cerrado en $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ y además es invertible, siendo compacto $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ tiene dimensión finita.

Recíprocamente, supongamos que $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ es de dimensión finita para cada $\varepsilon > 0$. En particular, para cada n, $\Lambda_{\varphi,w}\left(A_{\frac{1}{u}}(u)\right)$ es de dimensión finita, entonces para cada n, definamos $u_n : X \to \mathbb{C}$ como

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) & \text{if } |u(x)| \geq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{if } |u(x)| < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$((u_n - u) \cdot f)^*(s) \leq \|u_n - u\|_\infty f^*(s), \quad \forall\ s > 0.$$

Integrando desde 0 hasta t y multiplicando por $\frac{1}{t}$, obtenemos

$$\frac{1}{t}\int_0^t ((u_n - u) \cdot f)^*(s)\, ds \leq \frac{1}{t}\int_0^t \|u_n - u\|_\infty f^*(s)\, ds, \quad \forall\ s > 0,$$

es decir

$$((u_n - u) \cdot f)^{**}(t) \leq \|u_n - u\|_\infty f^{**}(t).$$

Multiplicando por $\frac{1}{\varepsilon}$ con $\varepsilon > 0$ tenemos

$$\frac{((u_n - u) \cdot f)^{**}(t)}{\varepsilon} \leq \frac{\|u_n - u\|_\infty f^{**}(t)}{\varepsilon}.$$

Como φ es no decreciente y el peso w es no negativo, lo anterior conduce a

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{((u_n - u) \cdot f)^{**}(t)}{\varepsilon}\right) w(t)\, dt \leq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\|u_n - u\|_\infty f^{**}(t)}{\varepsilon}\right) w(t)\, dt.$$

Entonces

$$\left\{\varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\|u_n - u\|_\infty f^{**}(t)}{\varepsilon}\right) w(t)\, dt \leq 1\right\} \subseteq \left\{\varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{((u_n - u) \cdot f)^{**}(t)}{\varepsilon}\right) w(t)\, dt \leq 1\right\}.$$

Por lo tanto

$$\text{ínf}\left\{\varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{((u_n - u)\cdot f)^{**}(t)}{\varepsilon}\right) w(t)\,dt \le 1\right\} \le$$
$$\text{ínf}\left\{\varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\|u_n - u\|_\infty f^{**}(t)}{\varepsilon}\right) w(t)\,dt \le 1\right\}.$$

Consecuentemente

$$\|M_{u_n} f - M_u f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \le \|u_n - u\|_\infty \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \le \frac{1}{n}\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}},$$

lo cual implica que M_{u_n} converge a M_u uniformemente. Como $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ es de dimensión finita, entonces M_{u_n} es un operador de rango finito. Luego, M_{u_n} es un operador compacto y así M_u es un operador compacto. □

Agradecimientos

Los autores agradecen a los revisores anónimos por sus sugerencias, las cuales mejoraron la calidad del artículo.

Referencias

[1] M. B. Abrahamse, *Multiplication operators*, ser. Lecture notes in Math. Springer Verlag, 1978.

[2] Y. A. Abramovich y C. D. Aliprantis, *An invitation to operator theory*, ser. Grad. Stud. Math. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2002, vol. 50.

[3] S. C. Arora, G. Datt, y S. Verma, "Multiplication operators on Lorentz spaces," *Indian J. Math.*, vol. 48, no. 3, pp. 317–329, 2006.

[4] S. Axler, "Multiplication operators on bergman spaces," *J. Reine Angew. Math.*, vol. 336, pp. 26–44, 1982, doi: 10.1515/crll.1982.336.26.

[5] C. Bennett y R. Sharpley, *Interpolation of operators*, ser. Pure Appl. Math., Academic Press. Boston, MA etc.: Academic Press, Inc., 1988, vol. 129.

[6] R. E. Castillo y H. C. Chaparro, *Classical and multidimensional Lorentz spaces.* Berlin: De Gruyter, 2021, doi: 10.1515/9783110750355.

[7] R. E. Castillo, H. C. Chaparro, y J. C. Ramos-Fernández, "Orlicz-Lorentz spaces and their multiplication operators," *Hacet. J. Math. Stat.*, vol. 44, no. 5, pp. 991–1009, 2015, doi: 10.15672/HJMS.2015449663.

[8] R. E. Castillo, R. León, y E. Trousselot, "Multiplication operator on $L_{(p,q)}$ spaces," *Panam. Math. J.*, vol. 19, no. 1, pp. 37–44, 2009.

[9] P. Foralewski y J. Kończak, "Orlicz-Lorentz function spaces equipped with the Orlicz norm," *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat., RACSAM*, vol. 117, no. 3, p. 23, 2023, Art. ID 120, doi: 10.1007/s13398-023-01449-z.

[10] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis*, 2nd ed., ser. Grad. Texts Math. New York, NY: Springer, 2008, vol. 249, doi: 10.1007/978-0-387-09432-8.

[11] H. Hudzik, A. Kamińska, y M. Mastyło, "On geometric properties of Orlicz-Lorentz spaces," *Can. Math. Bull.*, vol. 40, no. 3, pp. 316–329, 1997, doi: 10.4153/CMB-1997-038-6.

[12] H. Hudzik, A. Kaminska, y M. Mastylo, "On the dual of Orlicz-Lorentz space," *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 130, no. 6, pp. 1645–1654, 2002, doi: 10.1090/S0002-9939-02-05997-X.

[13] B. S. Komal y S. Gupta, "Multiplication operators between Orlicz spaces," *Integral Equations Oper. Theory*, vol. 41, no. 3, pp. 324–330, 2001, doi: 10.1007/BF01203174.

[14] S. J. Montgomery-Smith, "Orlicz-Lorentz spaces," in *Proceedings of the Orlicz memorial conference, held in Oxford, MS, USA, March 21-23, 1991.* Oxford, MS: The University of Mississippi, Department of Mathematics, 1991.

[15] E. T. Oklander, *Interpolation, Lorentz spaces and the theorem of Marcinkiewicz. (Interpolacion, espacios de Lorentz y teorema de Marcinkiewicz)*, ser. Cursos Semin. Math. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemática, 1965, vol. 20.

[16] M. M. Rao y Z. D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, ser. Pure Appl. Math., Marcel Dekker. New York etc.: Marcel Dekker, Inc., 1991, vol. 146.

[17] R. K. Singh y A. Kumar, "Multiplication operators and composition operators with closed ranges," *Bull. Aust. Math. Soc.*, vol. 16, pp. 247–252, 1977, doi: 10.1017/S0004972700023261.

[18] H. Takagi, "Fredholm weighted composition operators," *Integral Equations Oper. Theory*, vol. 16, no. 2, pp. 267–276, 1993, doi: 10.1007/BF01358956.

[19] A. Torchinsky, "Interpolation of operations and Orlicz classes," *Stud. Math.*, vol. 59, pp. 177–207, 1976, doi: 10.4064/sm-59-2-177-207.