

C O M P E N D I O

Ciclos límite en el plano: Contribuciones desde Chile

J. D. GARCÍA-SALDAÑA¹ S. REBOLLO-PERDOMO^{2,✉} 

¹ *Departamento de Matemática y Física Aplicadas, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción, Chile.*

jgarcias@ucsc.cl

² *Departamento de Matemática, Universidad del Bío-Bío, Concepción, Chile.*

srebollo@ubiobio.cl✉

RESUMEN

El objetivo de este artículo es destacar algunas contribuciones significativas realizadas desde Chile al estudio de ciclos límite en sistemas diferenciales polinomiales en el plano real, en relación con la segunda parte del problema 16 de Hilbert. Este trabajo se fundamenta en dos motivaciones principales: por una parte, algunos de los resultados analizados no han recibido la difusión que merecen; por otra, se anticipa un nuevo impulso en las próximas décadas en el estudio de los ciclos límite en sistemas diferenciales polinomiales. Los aportes presentados se sitúan dentro del panorama internacional y se examinan desafíos de investigación en este campo.

Palabras claves: Ciclo límite, órbita periódica, sistema diferencial, problema 16 de Hilbert.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 34C07, 34C08, 34C25, 37G15.

Publicado: 15 de octubre de 2025

Aceptado: 26 de mayo de 2025

Recibido: 30 de noviembre de 2024



©2025 J. D. García-Saldña *et al.* Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

S U R V E Y

Limit cycles in the plane: Contributions from Chile

J. D. GARCÍA-SALDAÑA¹ S. REBOLLO-PERDOMO^{2,✉} 

¹ *Departamento de Matemática y Física
Aplicadas, Universidad Católica de la
Santísima Concepción, Concepción,
Chile.*

jgarcias@ucsc.cl

² *Departamento de Matemática,
Universidad del Bío-Bío, Concepción,
Chile.*

srebollo@ubiobio.cl 

ABSTRACT

This article aims to highlight some important contributions made from Chile to the study of limit cycles of polynomial differential systems in the real plane, concerning the second half of Hilbert's sixteenth problem. This work is based on two main motivations: on the one hand, some of the results we analyze have not received the attention they deserve; and on the other hand, we expect renewed momentum in the coming decades in the study of limit cycles of polynomial differential systems. The results we present are situated within the international landscape, and we examine research challenges in this field.

Keywords and Phrases: Limit cycle, periodic orbit, differential system, Hilbert's sixteenth problem.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 34C07, 34C08, 34C25, 37G15.

Published: 15 October, 2025

Accepted: 26 May, 2025

Received: 30 November, 2024



©2025 J. D. García-Saldaña *et al.* This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

1. Introducción

Consideremos un *sistema diferencial polinomial autónomo en el plano real*, esto es, un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son polinomios en dos variables reales con coeficientes en $\mathbb{R}$ y donde t es una variable independiente real, considerada usualmente como el tiempo. Recordemos que una *solución del sistema diferencial* (1) es una función

$$\phi : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \phi(t) = (x(t), y(t)),$$

que satisface (1) en todo (a, b) , esto es,

$$\frac{d}{dt}(\phi(t)) = \left(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t) \right) = (P(\phi(t)), Q(\phi(t))), \quad \forall t \in (a, b).$$

En tal caso, a medida que t varía, $\phi(t) = (x(t), y(t))$ describe una curva en $\mathbb{R}^2$ llamada *órbita del sistema diferencial* (1). Esta órbita depende de la *condición inicial* $\phi(0) = (x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, y al considerar todas las condiciones iniciales posibles se obtiene una colección de órbitas llamada *retrato fase del sistema diferencial*.

Dentro de las posibles soluciones que un sistema diferencial puede tener, hay dos tipos especiales: las soluciones constantes y las soluciones periódicas. La órbita definida por una solución constante es una *singularidad* del sistema diferencial y la órbita definida por una solución periódica es un *ciclo* u *órbita periódica* del sistema diferencial, la cual es homeomorfa a la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1 := \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Cualquier sistema diferencial (1) tiene solo tres tipos de órbitas: singularidades, órbitas periódicas y órbitas homeomorfas al intervalo unitario $(0, 1) \subset \mathbb{R}$. Por lo cual, la configuración de todas las órbitas de un sistema diferencial determina una foliación (singular) de dimensión uno en $\mathbb{R}^2$ y el retrato fase del sistema diferencial es una descripción geométrico-topológica de tal foliación.

Fue Henri Poincaré, en su trabajo seminal sobre la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales [34–37], quien descubrió la existencia de ciclos límite, un tipo especial de órbitas periódicas; ver §2 para más detalles. Este tipo de órbitas llamaron poderosamente la atención de Poincaré, por lo cual desarrolló varias herramientas para su estudio, como la ahora llamada aplicación de primer retorno de Poincaré, el teorema de la región anular, el método de parámetros pequeños, etc. Además, demostró que existen sistemas diferenciales (1) que pueden tener ciclos límite y que éstos tienen un papel esencial en la determinación del retrato fase del sistema diferencial.

Después del trabajo de Poincaré, David Hilbert presentó, en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos de 1900, una lista de 23 problemas que consideraba fundamentales para la investigación matemática del siglo XX; ver [18]. La segunda parte del problema 16 de la lista de problemas de Hilbert plantea la siguiente pregunta:

¿Cuál es el número máximo y la posición relativa de los ciclos límite que puede presentar un sistema diferencial polinomial (1) de grado fijo?

De este modo, Hilbert anticipó que el estudio de los ciclos límite en sistemas diferenciales polinomiales en el plano sería uno de los problemas más trascendentales del siglo XX. No se equivocó: aunque este problema sigue siendo uno de los más desafiantes de su célebre lista y permanece abierto incluso para sistemas diferenciales polinomiales de grado dos, su investigación ha impulsado el desarrollo de diversas áreas fundamentales de la teoría moderna de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos, como la teoría de bifurcaciones, la teoría de formas normales y la teoría de foliaciones, entre otras; ver [20].

El interés y la relevancia de la investigación sobre los ciclos límite en sistemas diferenciales han sido tan significativos que, en 1998, Steve Smale destacó este mismo problema, pero restringido a los sistemas diferenciales polinomiales de Liénard, como uno de los problemas más desafiantes para el siglo XXI; ver [45].

Por otra parte, muchos fenómenos de las ciencias aplicadas que son modelados por sistemas diferenciales tienen movimientos periódicos, por lo cual la investigación de las órbitas periódicas, en general, y los ciclos límite, en particular, es esencial también desde el punto de vista aplicado. Por ejemplo, en biología, los ciclos límite pueden representar las fluctuaciones periódicas en poblaciones de animales, mientras que en ingeniería y física, describen comportamientos cíclicos en sistemas mecánicos o eléctricos. Resolver la segunda parte del problema 16 de Hilbert proporcionaría no solo una respuesta teórica, sino también herramientas prácticas para entender y predecir el comportamiento de sistemas dinámicos en múltiples contextos científicos.

En este trabajo, queremos destacar algunas contribuciones relevantes de matemáticos que desarrollan su investigación en Chile a la teoría de ciclos límite y su relación con la segunda parte del problema 16 de Hilbert.

2. El concepto de ciclo límite

El primer ejemplo concreto de un sistema diferencial exhibiendo un ciclo límite fue dado por Poincaré en [35, p. 278]. Usando nuestra notación, tal sistema es

$$\frac{dx}{dt} = x(x^2 + y^2 - 1) - y(x^2 + y^2 + 1), \quad \frac{dy}{dt} = y(x^2 + y^2 - 1) + x(x^2 + y^2 + 1).$$

Poincaré demostró que la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1$ es un ciclo límite del sistema diferencial mostrando que todas las circunferencias centradas en el origen con radio positivo y diferente de 1 son curvas sin contacto para el sistema diferencial, es decir, son curvas que son atravesadas transversalmente por las órbitas del sistema diferencial. Además, el sistema tiene una única singularidad en el origen. Con esto, Poincaré construyó el retrato fase del sistema diferencial mostrado en la Figura 1 a). Notar que el retrato fase está dado en lo que hoy llamamos *disco de Poincaré*, una compactificación de $\mathbb{R}^2$ a través de la proyección central sobre la esfera de Poincaré; ver [32, §3.10]. Esto permite describir y entender el comportamiento de las órbitas del sistema diferencial cuando las órbitas son no acotadas y “tienden a infinito”. De esta manera, el interior del disco de Poincaré se corresponde con el plano $\mathbb{R}^2$ y su frontera representa los llamados “puntos al infinito”.

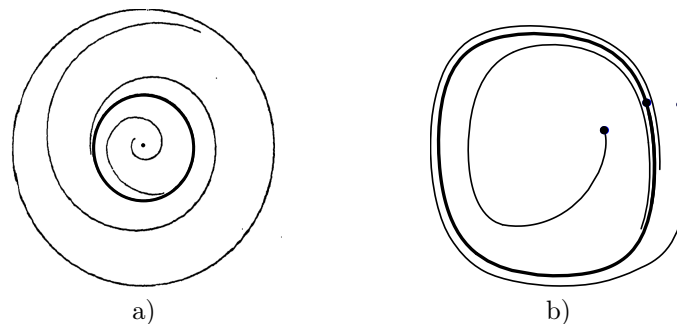


Figura 1: En a) primer ciclo límite de Poincaré [35, p. 279]. En b) comportamiento típico de las órbitas cercanas a un ciclo límite (en negrita); los puntos son condiciones iniciales.

De acuerdo con lo descrito por Poincaré, un ciclo límite es un ciclo del sistema diferencial que es asintóticamente abordado, en tiempo pasado ($t \rightarrow -\infty$) o tiempo futuro ($t \rightarrow +\infty$), por otras órbitas del mismo sistema diferencial pero sin llegar a él; ver Figura 1 b). De forma más precisa, un *ciclo límite* de un sistema diferencial es una órbita periódica del sistema que es topológicamente aislada en el conjunto de todas las órbitas periódicas del sistema.

3. Segunda parte del problema 16 de Hilbert

El objetivo principal de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, introducida y desarrollada por Poincaré, es describir los retratos fase de sistemas diferenciales autónomos. Para lograr este objetivo en el caso planar, resulta fundamental determinar la configuración de sus ciclos límite, es decir, el número y la posición relativa de los ciclos límite en cada sistema diferencial planar autónomo. En [35], Poincaré demostró que un sistema diferencial (1) sin conexiones de silla tiene solo un número finito de ciclos límite. El problema más famoso relacionado con el estudio de ciclos límite es la segunda parte del problema 16 de Hilbert, que se ha fragmentado en diferentes subproblemas y actualmente se plantea de la siguiente manera.

Segunda parte del problema 16 de Hilbert. Considere un sistema diferencial polinomial arbitrario

$$\frac{dx}{dt} = P_n(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_n(x, y), \quad (2)$$

de grado $n = \max\{\text{grado } P_n, \text{grado } Q_n\}$.

Parte A. Para cada $n \in \mathbb{N}$, ¿cada sistema diferencial (2) tiene un número finito, $\mathcal{H}(P_n, Q_n)$, de ciclos límite?

Parte B. Para cada $n \in \mathbb{N}$, ¿existe $\mathcal{H}(n) \in \mathbb{N}$, que dependa solo de n , tal que $\mathcal{H}(P_n, Q_n) \leq \mathcal{H}(n)$?

Parte C. Para cada $n \in \mathbb{N}$, hallar el valor de $\mathcal{H}(n)$ (si existe).

Parte D. Para cada $n \in \mathbb{N}$, obtener todas las configuraciones posibles (topológicamente distintas) de ciclos límite, al variar P_n y Q_n en (2).

Si $n = 1$, cualquier sistema diferencial de la forma (2) es lineal y no posee ciclos límite (resultado elemental, ver [32, §1.5]). Así, $\mathcal{H}(1) = 0$. Para $n \geq 2$, la situación se complica considerablemente. De hecho, podemos afirmar que la investigación sobre este problema ha tenido una historia dramática, casi digna de una novela. A continuación mencionaremos algunos de los eventos más relevantes.

3.1. Hitos clave hasta 1980

En 1923, Henri Dulac afirmó que la respuesta a la Parte A era afirmativa [11]. En 1952, Nicolai Bautin demostró la existencia de sistemas diferenciales cuadráticos (sistemas (2) de grado $n = 2$) con tres ciclos límite [2] y a finales de la década de 1950, Ivan Petrovskiĭ y Yevgueni Landis afirmaron que $\mathcal{H}(2) = 3$ [33]. Sin embargo, en la década de 1960 su afirmación fue refutada [24], y en 1979 se construyeron ejemplos de sistemas diferenciales cuadráticos con cuatro ciclos límite [9, 44]. Bajo este escenario, el avance en la solución del problema sufrió un retroceso significativo.

3.2. Hitos clave entre 1980 y 1999

A principios de la década de 1980, Yulij Ilyashenko descubrió una falla en la prueba de Dulac [19], y en 1984 demostró que los sistemas diferenciales (2) con solo singularidades no degeneradas tienen un número finito de ciclos límite [22]. A principios de la década de 1990, tanto Ilyashenko [23] como Jean Écalle [14] afirmaron, de manera independiente, haber encontrado una prueba de la afirmación de Dulac para la Parte A. Pocos años después de la publicación de estos trabajos, Smale escribía: “estos dos artículos aún no han sido completamente asimilados por la comunidad matemática”. Hasta donde sabemos, esta afirmación sigue siendo válida hasta el día de hoy.

Con el fin de profundizar en la comprensión de la dificultad del problema, en 1994, Fredy Dumortier, Robert Roussarie y Christiane Rousseau plantearon un programa [12, 13] para resolver la Parte B

en el caso cuadrático. Sin embargo, a pesar de los esfuerzos realizados por investigadores tan destacados como los mencionados arriba, la Parte B y la Parte C del problema permanecen abiertas, incluso en el caso $n = 2$.

Debido a la complejidad inherente a la investigación sobre ciclos límite, se han planteado varios subproblemas. Un ejemplo de esto es la restricción de la segunda parte del problema 16 de Hilbert a la familia de sistemas de Liénard, propuesta por Smale. Otro subproblema de gran relevancia es la versión “tangencial” o “infinitesimal” de la segunda parte del problema 16 de Hilbert, que se refiere al estudio de la bifurcación de ciclos límite bajo perturbaciones de un sistema integrable que tiene un conjunto foliado por órbitas periódicas. Además, en las últimas décadas, se ha desarrollado el estudio de ciclos límite en diversas familias especiales de sistemas diferenciales polinomiales, como las de Kukles, Kolmogórov y otras; ver siguiente sección para más detalles.

4. Versiones de la segunda parte del problema 16 de Hilbert

4.1. Sistemas Hamiltonianos perturbados

Supongamos que $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es un polinomio real de grado $m + 1$. Consideremos el *sistema Hamiltoniano planar*

$$\dot{x} = H_y(x, y), \quad \dot{y} = -H_x(x, y), \quad (3_0)$$

donde $H_x(x, y) := \frac{\partial}{\partial x} H(x, y)$ y $H_y(x, y) := \frac{\partial}{\partial y} H(x, y)$, el cual es un sistema diferencial polinomial de grado m . Una idea clásica, debida a Poincaré y que fue continuada por L. Pontryagin, A. Andronov, Ilyashenko, V. Melnikov, etc., es estudiar el *sistema Hamiltoniano perturbado*:

$$\dot{x} = H_y(x, y) + \varepsilon B(x, y; \varepsilon), \quad \dot{y} = -H_x(x, y) - \varepsilon A(x, y; \varepsilon), \quad (3_\varepsilon)$$

donde $A(x, y; \varepsilon)$ y $B(x, y; \varepsilon)$ son polinomios de grado n en las variables x e y , cuyos coeficientes son funciones analíticas en ε , un parámetro real que pertenece a una vecindad del 0 suficientemente pequeña: $\varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)$. Aquí el problema central es saber qué tan diferente es el retrato de fase del sistema perturbado (3_ε) , para $\varepsilon \neq 0$, en comparación con el retrato fase del sistema no perturbado (3_0) , el cual se entiende completamente pues de la teoría clásica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias sabemos que las órbitas de este sistema Hamiltoniano están contenidas en las curvas de nivel, $H^{-1}(c)$, de la función H , la cual recibe el nombre de *Hamiltoniano* asociado al sistema.

El interés en estos sistemas dentro del contexto de ciclos límite radica en la siguiente idea: supongamos que la foliación definida en $\mathbb{R}^2$ por las órbitas de (3_0) posee una familia de ciclos $\gamma_c \subset H^{-1}(c)$, que depende continuamente del parámetro c variando en algún intervalo (a, b) . Entonces bajo la perturbación, a veces, algunos de estos ciclos no se rompen mientras que todos sus ciclos vecinos si lo hacen. Este tipo de ciclos que persisten bajo la perturbación dan origen a ciclos límite del sistema perturbado (3_ε) , con $\varepsilon \neq 0$, y representan una clase de las órbitas que más interesan en el estudio de sistemas Hamiltonianos perturbados. Esta propiedad establece una conexión entre la segunda parte del problema 16 de Hilbert y el estudio de los ciclos límite de (3_ε) . De esta manera, obtenemos el siguiente problema

Versión infinitesimal de la segunda parte del problema 16 de Hilbert. Hallar la cota superior $\mathcal{H}(m, n)$, que dependa únicamente de m y n , para el número de ciclos límite del sistema perturbado (3_ε) , con $\varepsilon \neq 0$, que pueden generarse a partir de ciclos de (3_0) bajo la perturbación.

De hecho, esta conexión es muy importante ya que los sistemas diferenciales (3_ε) son más manejables y han dado excelente información sobre el problema general. Por ejemplo, han permitido obtener cotas inferiores para $\mathcal{H}(n)$ y posibles configuraciones de ciclos límite; ver [10, 21].

4.2. Sistemas de Liénard

Un *sistema de Liénard polinomial (generalizado)* es un sistema diferencial planar de la forma

$$\dot{x} = y - F_n(x), \quad \dot{y} = -x - g_m(x), \quad (4)$$

donde $F_n(x)$ y $g_m(x)$ son polinomios de grados n y m , respectivamente, tal que $n \geq 2$ y $F_n(0) = 0$. Si $g_m(x) \equiv 0$, entonces (4) es un *sistema de Liénard polinomial clásico*. La pregunta principal sobre estos sistemas es:

¿cuál es el número máximo, $\mathcal{H}_{\text{Lie}}(n, m)$, de ciclos límite de (4)?

La versión de la segunda parte del problema 16 de Hilbert que planteó Smale respecto de los sistemas de Liénard, en su lista de problemas para el siglo XXI, consiste en hallar $\mathcal{H}_{\text{Lie}}(n, 0)$.

4.3. Sistemas de Kukles

Un *sistema de Kukles* es un sistema diferencial polinomial planar de la forma

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = Q_n(x, y), \quad (5)$$

donde $Q_n(x, y)$ es un polinomio real de grado $n \geq 2$ y tal que y no lo divide.

El estudio de los ciclos límite en esta familia ha sido abordado por varios autores en las últimas tres décadas, convirtiéndola en una familia relevante dentro de los sistemas diferenciales polinomiales planares. La principal pregunta sobre estos sistemas es:

¿cuál es el número máximo, $\mathcal{H}_{\text{Kuk}}(n)$, de ciclos límite de (5)?

4.4. Sistemas de Kolmogórov

Un *sistema de Kolmogórov polinomial planar* es un sistema diferencial de la forma

$$\dot{x} = x P_{n-1}(x, y), \quad \dot{y} = y Q_{n-1}(x, y), \quad (6)$$

donde $P_{n-1}(x, y)$ y $Q_{n-1}(x, y)$ son polinomios reales de grado $n - 1$, con $n \geq 2$.

Al igual que en las familias anteriores, la pregunta principal es:

¿cuál es el número máximo, $\mathcal{H}_{\text{Kol}}(n)$, de ciclos límite de (6)?

5. Contribuciones desde Chile

A pesar de los desafíos que presenta la resolución de la segunda parte del problema 16 de Hilbert, investigadores de universidades chilenas han realizado contribuciones valiosas que han enriquecido el estudio de este complejo problema. Estos avances, fruto de un esfuerzo colectivo y continuo, han permitido ampliar la comprensión de los ciclos límite en sistemas diferenciales polinomiales. A continuación, se destacan algunos de los logros más relevantes en este ámbito.

5.1. Aportes entre 1980 y 1999

Con la aparición, en 1979-80, de ejemplos de sistemas cuadráticos con cuatro ciclos límite, se reforzó aún más la sospecha de que la demostración de Dulac de 1923, que afirmaba la finitud del número de ciclos límite, era incorrecta.

Por esas fechas, Rodrigo Bamón partió de la Universidad de Chile para continuar su doctorado en el Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) en Brasil, bajo la dirección de Jorge Sotomayor, quien, según las palabras de Bamón¹ consideraba errónea la prueba de Dulac. Bamón se sintió atraído (nunca mejor dicho) por los ciclos límite y, hacia su tercer año de doctorado, decidió intentar ofrecer una nueva demostración de la finitud de los ciclos límite en sistemas diferenciales cuadráticos. Cabe destacar que, para entonces, ya se reconocía ampliamente que la prueba de Dulac

¹Un especial agradecimiento a Rodrigo Bamón por la enriquecedora conversación en la que compartió su valiosa experiencia y perspectiva del problema en esa época.

no estaba completa, aunque el error evidente en su demostración, identificado por Ilyashenko, no fue publicado hasta 1985.

El problema de la finitud del número de ciclos límite en sistemas diferenciales en el plano real se reduce a probar la no acumulación de ciclos límite en los llamados *ciclos singulares* (acotados y no acotados). A esto se le pasó a llamar el *Problema de Dulac*.

Bamón cuenta que clasificó todos los ciclos singulares de sistemas diferenciales cuadráticos en el plano y probó que todos ellos, salvo dos, no podían ser acumulados por ciclos límite. Esto fue su tesis doctoral (1983). Para uno de estos ciclos singulares sabía como probar que no era acumulado por ciclos límite, sin embargo, no lo incluyó en su tesis. Para el otro ciclo singular (hiperbólico acotado) no tenía idea de como probar que no era acumulado por ciclos límite, hasta que en el verano de 1985, en el IMPA, escuchó una charla de Robert Moussu sobre un reciente trabajo de Ilyashenko donde mostraba que todo ciclo singular hiperbólico, de cualquier sistema diferencial polinomial en el plano, no podía ser acumulado por ciclos límite [22]. Bamón se dio cuenta que usando este resultado de Ilyashenko y su propia tesis resolvía el Problema de Dulac para sistemas diferenciales cuadráticos, en otras palabras, completaba la prueba de la finitud del número de ciclos límite para sistemas diferenciales cuadráticos. Bamón contó con el apoyo del IMPA para que concluyera su trabajo y para publicarlo en 1986 en la prestigiosa revista *Publications Mathématiques de l'IHÉS*. Rodrigo Bamón mostraba al mundo su aporte a la segunda parte del problema 16 de Hilbert:

Teorema 5.1 (Bamón [1]). *Cada sistema diferencial cuadrático en $\mathbb{R}^2$ tiene un número finito de ciclos límite.*

Moussu conoció el resultado de Bamón durante su estancia en el IMPA y cuando regresó a Francia expuso en el prestigioso *Seminaire Bourbaki* sobre “Le Problème de la finitude du nombre de cycles limites [d’après R. Bamón et Yu. S. Il’yashenko]”. Este hecho reflejó el considerable interés que el resultado de Bamón suscitó en su momento.

Con sus resultados, Bamón generó un creciente interés por los ciclos límite entre diversos investigadores en sistemas dinámicos, tanto en Santiago como en otras regiones. Así, a finales de la década de 1980 y a principios de la década de 1990, se publicaron varios trabajos sobre ciclos límite de sistemas diferenciales polinomiales planares. Sin pretender ser exhaustivos, a continuación se mencionaran algunos de estos estudios.

Myrna Wallace, de la Universidad de Concepción, Jorge Billeke, de la Universidad de Santiago de Chile, y Hernán Burgos, de la Universidad de la Frontera, realizaron una serie de trabajos sobre sistemas de Liénard polinomiales, tanto clásicos como generalizados [3–6]. Uno de esos trabajos trata sobre sistemas de Liénard clásicos perturbados, es decir, sistemas de la forma (3_ε) que son de Liénard. Concretamente, en [5] (1992), consideran el sistema de Liénard perturbado:

$$\dot{x} = y - \varepsilon(a_1x + a_2z^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5), \quad \dot{y} = -x. \quad (7_\varepsilon)$$

Aquí, el Hamiltoniano asociado al sistema no perturbado es $H(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ y al sistema no perturbado (7_0) , se le conoce como el *centro lineal* o el *oscilador armónico*.

Sistemas de Liénard polinomiales de grado arbitrario, provenientes de perturbaciones del centro lineal, ya habían sido estudiados en 1977 por Alcides Lins-Neto, Welington de Melo y Charles C. Pugh [25]. Sus resultados prueban que existen sistemas (7_ε) con dos ciclos límite. Wallace, Billeke y Burgos realizaron un estudio detallado en el disco de Poincaré de (7_ε) y uno de sus resultados principales en [5] se puede enunciar como:

Teorema 5.2. *Cada sistema de Liénard (7_ε) tiene a lo más dos ciclos límite.*

Con este resultado se completaba el estudio del número máximo de ciclos límite para sistemas de Liénard polinomiales perturbados de grado cinco.

Por aquella misma época, Ana María Urbina, Mario y Guillermo León de la Barra así como Moisés Cañas, todos ellos de la Universidad Técnica Federico Santa María de Valparaíso, realizaron varios trabajos en sistemas diferenciales polinomiales planares. En particular, entre 1991 y 1992 estudiaron los sistemas de Liénard generalizados

$$\dot{x} = y - (a_m x^m + \cdots + a_N x^N), \quad \dot{y} = -x^{2n-1}, \quad (8)$$

donde $m \geq 2$ y $N \geq m$, y también el sistema de Liénard perturbado

$$\dot{x} = 2y - \varepsilon(a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N), \quad \dot{y} = -4x^3, \quad (9_\varepsilon)$$

cuyo Hamiltoniano asociado al sistema no perturbado es $H(x, y) = y^2 + x^4$.

El sistema (8) fue estudiado en [47] y representó una generalización del trabajo de Lins-Neto, de Melo y Pugh, de 1977. El sistema (9_ε) se estudió en [46], usando el enfoque de integrales Abelianas, ver siguiente subsección y [10]. Los resultados principales de cada uno de estos trabajos los podemos enunciar de la siguiente forma:

Teorema 5.3. *Supongamos $s \in \mathbb{N}$.*

- *Si $n = 2s$, y $N \geq 2s + 3$, entonces $\mathcal{H}_{Lie}(N, 2s) \geq \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - s$.*
- *Si $n = 2s - 1$ y $N \geq 2s + 1$, entonces $\mathcal{H}_{Lie}(N, 2s - 1) \geq \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor - s$.*

Teorema 5.4. *Existen sistemas (9_ε) con al menos $\left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor - 1$ ciclos límite.*

Víctor Guíñez, de la Universidad de Chile, Eduardo Sáez e Iván Szántó, de la Universidad Técnica Federico Santa María de Valparaíso, trabajaron sobre bifurcación de ciclos límite de sistemas diferenciales polinomiales. En particular, en 1990 estudiaron el número máximo, $S(n)$, de puntos singulares aislados contenidos en la región acotada determinada por un ciclo límite de un sistema

diferencial polinomial planar de grado n . Uno de sus resultados principales en [17] se puede enunciar como:

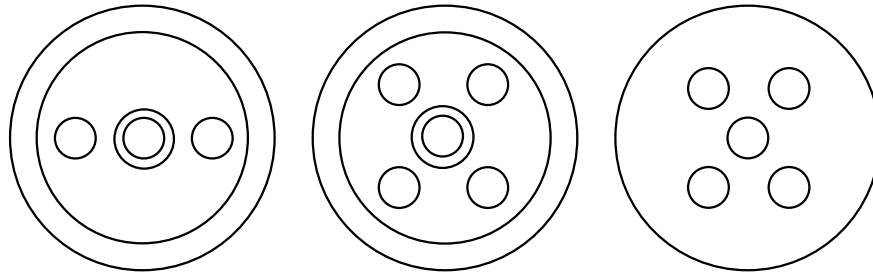
Teorema 5.5. *Existe un sistema diferencial polinomial planar de grado $2k+1$, tal que $S(2k+1) = (2k+1)^2$.*

La prueba de este resultado se basa en la construcción de un sistema Hamiltoniano perturbado que es polinomial. Siguiendo la misma idea, en 1993 estudian posibles configuraciones de ciclos límite del sistema diferencial cúbico perturbado

$$\dot{x} = -y - 2cy^2 + ax^2y + y^3 + \varepsilon xy(y-4), \quad \dot{y} = x + 2dx^2 - x^3 - bxy^2 + \varepsilon xy(x-4), \quad (10_\varepsilon)$$

y uno de sus principales resultados en [16] lo podemos enunciar de la siguiente manera:

Teorema 5.6. *Existen $a > b > 1$, $c, d, \varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)$ tal que el sistema (10_ε) tiene una de las siguientes configuraciones de ciclos límite en el disco de Poincaré.*



Este resultado es una contribución a la Parte D de la segunda parte del problema 16 de Hilbert. El primer resultado general relativo a esta parte apareció en [27], donde proporcionan una cota sobre el grado del sistema diferencial polinomial que puede realizar una configuración de ciclos límite. De acuerdo con [27] las tres configuraciones del teorema anterior pueden ser realizadas por un sistema diferencial polinomial de grado a lo más 15, 23 y 19, respectivamente. El teorema anterior proporciona sistemas diferenciales polinomiales del grado mínimo posible que realizan esas configuraciones, por ello es un resultado relevante, sin embargo, no fue citado en [27].

En la segunda parte de la década de 1990, Sáez y Szántó, realizaron algunos estudios sobre sistemas de Kolmogórov polinomiales planares [28, 41]. En particular, uno de sus resultados en [28] lo podemos enunciar como sigue.

Teorema 5.7. $\mathcal{H}_{\text{Kol}}(3) \geq 4$.

5.2. Aportes entre 2000 y 2009

Con la publicación de los resultados de Écalle e Ilyashenko sobre la finitud del número de ciclos límite de cualquier sistema diferencial polinomial de grado n , surgió una gran efervescencia mundial

en torno al estudio de los ciclos límite. El interés de Sáez y Szántó por estos objetos no solo se mantuvo, sino que también se amplió con la incorporación de colaboradores internacionales. En la década de 2000, publicaron más de quince trabajos sobre ciclos límite y curvas algebraicas invariantes de sistemas diferenciales. Recordamos que una *curva algebraica invariante* de un sistema diferencial es una curva en $\mathbb{R}^2$ definida por los ceros de un polinomio real $f(x, y)$ que esta formada por órbitas del sistema diferencial. Aquí recordamos solo algunos resultados destacados de cuatro de esos trabajos. En 2002 publicaron [29], cuyo resultado principal lo podemos enunciar como:

Teorema 5.8. $\mathcal{H}_{\text{Kol}}(3) \geq 6$.

Este fue su último resultado sobre sistemas de Kolmogórov. Después, trabajaron en sistemas provenientes de modelos de carácter aplicado y en sistemas de Kukles. En este último tema publicaron varios artículos [7, 8, 26]. En 2008, consideraron el sistema de Kukles de grado cinco:

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = -a + bx + q_3(x, y)f(x, y), \quad (11)$$

donde $b = 1 + 2a$, $f(x, y) = a - 2ax + bx^2 + y^2$, cuyos ceros definen una elipse invariante, y $q_3(x, y) = 1 + \lambda y + b_{30}x^3 + b_{11}xy + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3$. El resultado principal de su investigación, publicado en [42], lo podemos enunciar de la siguiente manera:

Teorema 5.9. *En el espacio de parámetros del sistema diferencial existe un conjunto abierto tal que (11) tiene al menos seis ciclos límite, uno de ellos es un ciclo límite (algebraico), que corresponde a la elipse invariante.*

Guñez, Wallace y Billeke, por otro lado, prácticamente abandonaron el estudio de ciclos límite a partir del 2000. No obstante, su trabajo inspiró a varios estudiantes a continuar sus estudios de doctorado en temas relacionados con la segunda parte del problema 16 de Hilbert. Marco Uribe Santibañez fue uno de estos estudiantes. Realizó su doctorado en la Université de Bourgogne, Francia, el cual concluyó en 2006 bajo la dirección de Pavao Mardešić. A su regreso a Chile, desde la Universidad de Católica de la Santísima Concepción, ha centrado su trabajo en temas relacionados con los ciclos límite. Sus principales contribuciones han sido en el ámbito de los sistemas Hamiltonianos perturbados. Para poder expresarlas de manera adecuada, es necesario introducir algunos conceptos adicionales.

Recordemos que, en un sistema Hamiltoniano perturbado, el objetivo es estudiar los ciclos límite que se originan a partir de los ciclos del sistema no perturbado. Una herramienta común para controlar estos ciclos límite es la *función de desplazamiento asociada a* (3_ε) *y la familia* $\{\gamma_c\}$: una función analítica que tiene la forma

$$L(\varepsilon, c) = \varepsilon L_1(c) + \varepsilon^2 L_2(c) + \varepsilon^3 L_3(c) + \cdots.$$

El coeficiente $L_i(c)$ es la *función de Poincaré–Pontryagin–Melnikov (PPM)* de i -ésimo orden. Los ciclos límite de (3_ε) , $\varepsilon \neq 0$, que bifurcan de los ciclos de (3_0) se estudian a través de la ceros de la primera función de PPM que no se anula $L_k(c)$, con $k \geq 1$. De hecho, el número máximo de ceros aislados, contando multiplicidades, de $L_k(c)$ es una cota superior para el número de ciclos límite de (3_ε) , $\varepsilon \neq 0$, que bifurcan de los ciclos $\{\gamma_c\}$ de (3_0) ; además, el número de ceros distintos de $L_k(c)$ puede proporcionar una cota inferior para el número de estos ciclos límite.

Por conveniencia, el sistema diferencial (3_ε) lo escribimos en su versión Pffafiana, esto es, como la ecuación diferencial perturbada

$$dH + \varepsilon\omega = 0,$$

con $\omega = A(x, y; \varepsilon) dx + B(x, y; \varepsilon) dy$ (una 1-forma diferencial polinomial). Se sabe que $L_1(c)$ esta dada siempre por una *integral Abeliana*, i.e., la integral de una 1-forma racional sobre una curva algebraica, más precisamente

$$L_1(c) = - \int_{\gamma_c} \omega.$$

Si se calcula $L_1(c)$ y no es idénticamente cero, entonces se conocerá el número máximo de ciclos límite que bifurcan de los ciclos $\{\gamma_c\}$. Si $L_1(c) \equiv 0$, entonces las funciones de PPM de orden $2, 3, \dots$ deben estudiarse hasta encontrar la primera que no se anula o concluir que el sistema no tiene ciclos límite. Si $H(x, y) = (x^2 + y^2)/2$, entonces $L_k(c)$ siempre se puede calcular por una integral Abeliana, esto fue demostrado en 1996 por Françoise [15].

En 2006, Uribe estudió la ecuación Hamiltoniana perturbada

$$dH + \varepsilon\omega = 0, \tag{12_\varepsilon}$$

donde $H(x, y) = x(y^2 - (x - 3)^2)$, $\varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)$ y ω una 1-forma diferencial polinomial. Este sistema Hamiltoniano tiene tres rectas invariantes, $H^{-1}(0)$, que forman un triángulo, cuyo interior esta foliado por ciclos. Uribe probó en [48] el siguiente resultado.

Teorema 5.10. *La primera función de PPM no nula asociada al sistema (12_ε) y a la familia de ciclos $\{\gamma_c\}$, que folian el interior del triángulo, pertenece al módulo $\mathbb{C}[t, 1/t]$ generado por las integrales*

$$I_1(c) := \int_{\gamma_c} y dx, \quad I_2(c) := \int_{\gamma_c} x^2 y dx, \quad I^*(c) := \int_{\gamma_c} \ln x d \left(\ln \frac{y - x + 3}{y + x - 3} \right).$$

Este fue uno de los primeros ejemplos de sistemas diferenciales cuadráticos perturbados, para los cuales será difícil resolver la versión infinitesimal del problema 16 de Hilbert, debido a que $I^*(c)$ no es una integral Abeliana. En 2009, Uribe generalizó este resultado para sistemas de la forma (12_ε) , con $H(x, y)$ el producto de $d + 1$ rectas [49].

5.3. Aportes entre 2010 y 2019

Dado lo reciente de este período y la facilidad con la que se pueden acceder a las publicaciones, no detallaremos resultados específicos como en los casos anteriores. Nos limitaremos a proporcionar una descripción general del contenido de dichas publicaciones y su relación con los temas discutidos en las secciones previas.

Sáez y Szántó continuaron su interés por los ciclos límite de sistemas de Kukles. En 2012, consideraron sistemas de Kukles perturbados y obtuvieron cotas inferiores para el número de ciclos límite de tales sistemas [43].

Por otro lado, Mariana Saavedra fue otra de las personas inspiradas por el grupo chileno de sistemas dinámicos. Estudió su doctorado en la Université de Bourgogne, Francia, el cual concluyó en 1995 bajo la dirección de Moussu. A su regreso a la Universidad de Concepción orientó su investigación principalmente en las propiedades del desarrollo asintótico de la aplicación de primer tiempo de retorno y de la función de periodo para ciclos singulares. Estos temas, aunque análogos y relacionados con el problema de Dulac, se desarrollaron sin considerar explícitamente las posibles implicancias sobre los ciclos límite. Sus resultados fueron publicados en [38–40].

En 2012, Saavedra, Wallace y Uribe, en colaboración con Mardešić, estudiaron las perturbaciones cuadráticas del triángulo Hamiltoniano [30] y determinaron el desarrollo de la función desplazamiento del sistema perturbado, lo cual es útil para establecer cotas superiores para el número de ciclos límite de estos sistemas. Posteriormente, Saavedra, Uribe y Mardešić extendieron estos resultados para perturbaciones de sistemas Hamiltonianos más generales [31].

6. Desafíos en la segunda parte del problema 16 de Hilbert

Como mencionamos en la introducción, el objetivo principal de este trabajo es destacar algunos de los aportes relevantes realizados desde Chile a la segunda parte del problema 16 de Hilbert, tarea que hemos llevado a cabo en la sección anterior. Sin embargo, un segundo objetivo, que también constituye la motivación inicial para la elaboración de este artículo, es reflexionar sobre uno de los progresos más recientes en torno a la cuestión de la finitud del número de ciclos límite en sistemas diferenciales polinomiales. La noticia en cuestión es la siguiente.

Recientemente, Melvin Yeung ha encontrado un contraejemplo [50] a uno de los argumentos utilizados por Ilyashenko para demostrar que todo sistema diferencial polinomial posee un número finito de ciclos límite.

Yeung presentó su construcción en diversos centros especializados en el tema, sin que se haya identificado error alguno en sus argumentos. Esto significa que la prueba de Ilyashenko está incompleta. Esta hallazgo abre una amplia gama de desafíos y nuevas perspectivas en el estudio de ciclos límite.

Recordemos que, a inicios de la década de 1990, se publicaron dos pruebas distintas sobre la finitud del número de ciclos límite. La prueba propuesta por Écalle podría ser correcta; sin embargo, como señaló Smale, esta no ha sido comprendida completamente en más de treinta años. En este contexto, parece natural plantear los siguientes desafíos:

- Obtener una nueva prueba de la finitud del número máximo de ciclos límite en sistemas diferenciales polinomiales en el plano.
- Desarrollar una demostración de dicha finitud utilizando métodos o herramientas suficientemente generales y adaptables para abordar también las tres primeras partes del problema 16 de Hilbert.
- Determinar el sistema diferencial polinomial de grado más pequeño que realice como ciclos límite una configuración dada de curvas cerradas aisladas en el plano (salvo homeomorfismos).

7. Conclusión

A lo largo de este trabajo hemos revisado algunos de los aportes significativos realizados desde Chile al estudio de los ciclos límite, con especial énfasis en su relación con la segunda parte del problema 16 de Hilbert. Estos avances han sido posibles gracias a la labor de destacados matemáticos chilenos, quienes, a través de sus investigaciones y de los vínculos establecidos con investigadores internacionales, han dejado un legado que continúa inspirando a nuevas generaciones.

Además, hemos discutido los principales desafíos actuales en torno a la segunda parte del problema 16 de Hilbert, destacando cómo la reciente identificación de posibles debilidades en la prueba de Ilyashenko reaviva el interés en este problema clásico, abriendo nuevas líneas de investigación y renovando la relevancia de métodos más generales que puedan abordar otras partes del problema.

El estudio de ciclos límite sigue siendo un campo fértil y desafiante, cuya resolución no solo enriquecerá la teoría matemática, sino que también impulsará avances en áreas relacionadas. El panorama actual, aunque complejo, invita a las nuevas generaciones de matemáticos a seguir explorando, construyendo sobre los logros previos y enfrentando con creatividad los retos aún abiertos.

Agradecimientos

La primera autora es financiada por la Dirección de Investigación de la UCSC a través del proyecto DIREG 01/2024 y el Proyecto Ingeniería 2030 (ING222010004). El segundo autor es financiado por el proyecto RE2320122 de la Universidad del Bío-Bío.

Referencias

- [1] R. Bamón, “Quadratic vector fields in the plane have a finite number of limit cycles,” *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, vol. 64, pp. 111–142, 1986, doi: 10.1007/BF02699193.
- [2] N. N. Bautin, “On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type,” in *American Mathematical Society Translations, Series 1, Vol. 100*. American Mathematical Society, 1954, pp. 397–413, translation from *Mat. Sbornik* (new series), vol. 30(72), no. 1, pp. 181–196 (1952).
- [3] J. Billeke y H. Burgos, “Consideraciones generales sobre campos polinomiales $(y - f(x))\frac{\partial}{\partial x} + (-x + g(x, y))\frac{\partial}{\partial y}$, problemas de estabilidad y ejemplos,” *Cubo*, vol. 6, pp. 25–46, 1990.
- [4] J. Billeke, H. Burgos, y M. Wallace, “Some theorems on the non existence, uniqueness and existence of two limit cycles for the Lienard equation of degree five,” *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena*, vol. 39, no. 1, pp. 11–27, 1991.
- [5] J. Billeke, H. Burgos, y M. Wallace, “Melnikov deviations and limit cycles for Liénard equations,” *Rev. Colomb. Mat.*, vol. 26, no. 1-4, pp. 1–24, 1992.
- [6] H. Burgos y J. Billeke, “Stability problems of perturbed Liénard equations by polynomials in $\frac{\partial}{\partial y}$ direction,” in *Las Matemáticas en Costa Rica. Memorias del tercer congreso nacional de matemáticas, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica, Octubre 15-19, 1990. Vol. 2*. San José: Universidad de Costa Rica, 1990, pp. 29–47.
- [7] J. Chavarriga, I. A. García, E. Sáez, e I. Szántó, “Limit cycles in Kukles systems of arbitrary degree with invariant ellipse,” *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods*, vol. 67, no. 4, pp. 1005–1014, 2007, doi: 10.1016/j.na.2006.06.035.
- [8] J. Chavarriga, E. Sáez, I. Szántó, y M. Grau, “Coexistence of limit cycles and invariant algebraic curves for a Kukles system,” *Nonlinear Anal.*, vol. 59, no. 5, pp. 673–693, 2004, doi: 10.1016/j.na.2004.07.028.
- [9] L. S. Chen y M. S. Wang, “The relative position, and the number, of limit cycles of a quadratic differential system,” *Acta Math. Sinica*, vol. 22, no. 6, pp. 751–758, 1979.
- [10] C. Christopher y C. Li, *Limit cycles of differential equations*, ser. Adv. Courses in Math. – CRM Barc. Basel: Birkhäuser, 2007.
- [11] H. Dulac, “Sur les cycles limites.” *Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 51, pp. 45–188, 1923, doi: 10.24033/bsmf.1031.
- [12] F. Dumortier, R. Roussarie, y C. Rousseau, “Elementary graphics of cyclicity 1 and 2,” *Nonlinearity*, vol. 7, no. 3, pp. 1001–1043, 1994, doi: 10.1088/0951-7715/7/3/013.

- [13] F. Dumortier, R. Roussarie, y C. Rousseau, “Hilbert’s 16th problem for quadratic vector fields,” *J. Differ. Equations*, vol. 110, no. 1, pp. 86–133, 1994, doi: 10.1006/jdeq.1994.1061.
- [14] J. Écalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*. Paris: Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts., 1992.
- [15] J. P. Francoise, “Successive derivatives of a first return map, application to the study of quadratic vector fields,” *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, vol. 16, no. 1, pp. 87–96, 1996, doi: 10.1017/S0143385700008725.
- [16] V. Guíñez, E. Sáez, e I. Szántó, “Small amplitude limit cycles for cubic systems,” *Can. Math. Bull.*, vol. 36, no. 1, pp. 54–63, 1993, doi: 10.4153/CMB-1993-009-4.
- [17] V. Guíñez, E. Sáez, e I. Szántó, “Limit cycles close to infinity of certain nonlinear differential equations,” *Can. Math. Bull.*, vol. 33, no. 1, pp. 55–59, 1990, doi: 10.4153/CMB-1990-009-8.
- [18] D. Hilbert, “Mathematical problems.” *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, vol. 37, no. 4, pp. 407–436, 2000, doi: 10.1090/S0273-0979-00-00881-8. Reprinted from *Bull. Am. Math. Soc.* 8, 437–479 (1902).
- [19] Y. Ilyashenko, “Dulac’s memoir “On limit cycles” and related questions of the local theory of differential equations.” *Russian Math. Surveys*, vol. 40, no. 6, pp. 1–49, 1969, doi: 10.1070/RM1985v040n06ABEH003701.
- [20] Y. Ilyashenko, “Centennial history of Hilbert’s 16th Problem,” *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, vol. 39, no. 3, pp. 301–354, 2002, doi: 10.1090/S0273-0979-02-00946-1.
- [21] Y. S. Ilyashenko, “The origin of limit cycles under perturbation of the equation $dw/dz = -R_z/R_w$, where $R(z, w)$ is a polynomial,” *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 7, pp. 353–364, 1969, doi: 10.1070/SM1969v007n03ABEH001094.
- [22] Y. S. Il’yashenko, “Limit cycles of polynomial vector fields with nondegenerate singular points on the real plane,” *Funct. Anal. Appl.*, vol. 18, pp. 199–209, 1984, doi: 10.1007/BF01086157.
- [23] Y. S. Il’yashenko, *Finiteness theorems for limit cycles*, ser. Transl. Math. Monogr. Providence, RI: American Mathematical Society, 1991, vol. 94.
- [24] E. M. Landis e I. G. Petrovskiĭ, “A letter to the editors,” *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 73(115), no. 1, p. 160, 1967, doi: 10.1070/SM1967v002n01ABEH002332.
- [25] A. Lins, W. de Melo, y C. Pugh, “On Liénard’s equation with linear damping,” in *Geometry and Topology*, ser. Lecture Notes in Mathematics, J. Palis y M. do Carmo, Eds. Berlin: Springer-Verlag, 1977, vol. 597, pp. 335–357.

- [26] Z. Liu, E. Sáez, e I. Szántó, “Limit cycles and invariant parabola in a Kukles systems of degree three,” *Acta Math. Sci., Ser. B, Engl. Ed.*, vol. 28, no. 4, pp. 865–869, 2008, doi: 10.1016/S0252-9602(08)60087-9.
- [27] J. Llibre y G. Rodríguez, “Configurations of limit cycles and planar polynomial vector fields.” *J. Differ. Equations*, vol. 198, no. 2, pp. 374–380, 2004, doi: 10.1016/j.jde.2003.10.008.
- [28] N. G. Lloyd, J. M. Pearson, E. Sáez, e I. Szántó, “Limit cycles of a cubic Kolmogorov system,” *Appl. Math. Lett.*, vol. 9, no. 1, pp. 15–18, 1996, doi: 10.1016/0893-9659(95)00095-X.
- [29] N. G. Lloyd, J. M. Pearson, E. Saéz, e I. Szántó, “A cubic Kolmogorov system with six limit cycles,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 44, no. 3-4, pp. 445–455, 2002, doi: 10.1016/S0898-1221(02)00161-X.
- [30] P. Mardešić, M. Saavedra, M. Uribe, y M. Wallace, “Unfolding of the Hamiltonian triangle vector field,” *J. Dyn. Control Syst.*, vol. 17, no. 2, pp. 291–310, 2011, doi: 10.1007/s10883-011-9120-5.
- [31] P. Mardešić, M. Saavedra, y M. Uribe, “Principal part of multi-parameter displacement functions,” *Bull. Sci. Math.*, vol. 136, no. 7, pp. 752–762, 2012, doi: 10.1016/j.bulsci.2012.02.006.
- [32] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, 3rd ed., ser. Texts Appl. Math. New York, NY: Springer, 2001, vol. 7.
- [33] I. G. Petrovskij y E. M. Landis, “On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, where P and Q are polynomials of the second degree,” *Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc.*, vol. 10, pp. 177–221, 1958, doi: 10.1090/trans2/010/06.
- [34] H. Poincaré, “Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle I,” *J. Math. Pures Appl.*, vol. 7, pp. 375–422, 1881.
- [35] H. Poincaré, “Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle II,” *J. Math. Pures Appl.*, vol. 8, pp. 251–296, 1882.
- [36] H. Poincaré, “Sur les courbes définies par une équation différentielle III,” *J. Math. Pures Appl.*, vol. 1, pp. 167–244, 1885.
- [37] H. Poincaré, “Sur les courbes définies par une équation différentielle IV,” *J. Math. Pures Appl.*, vol. 2, pp. 151–217, 1886.
- [38] M. Saavedra, “The return time function near a polycycle,” *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math.*, vol. 330, no. 9, pp. 781–784, 2000, doi: 10.1016/S0764-4442(00)00277-9.
- [39] M. Saavedra, “Asymptotic expansion of the period function.” *J. Differ. Equations*, vol. 193, no. 2, pp. 359–373, 2003, doi: 10.1016/S0022-0396(03)00091-3.

- [40] M. Saavedra, “Asymptotic expansion of the period function. II.” *J. Differ. Equations*, vol. 222, no. 2, pp. 476–486, 2006, doi: 10.1016/j.jde.2005.04.011.
- [41] E. Sáez e I. Szántó, “One-parameter family of cubic Kolmogorov systems with an isochronous center,” *Collect. Math.*, vol. 48, no. 3, 1997.
- [42] E. Sáez e I. Szántó, “Coexistence of algebraic and nonalgebraic limit cycles in Kukles systems,” *Period. Math. Hung.*, vol. 56, no. 1, pp. 137–142, 2008, doi: 10.1007/s10998-008-5137-y.
- [43] E. Sáez e I. Szántó, “Bifurcations of limit cycles in Kukles systems of arbitrary degree with invariant ellipse,” *Appl. Math. Lett.*, vol. 25, no. 11, pp. 1695–1700, 2012, doi: 10.1016/j.aml.2012.01.039.
- [44] S. Shi, “A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems,” *Sci. Sin.*, vol. 23, pp. 153–158, 1980.
- [45] S. Smale, “Problemas matemáticos para el próximo siglo.” *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 3, no. 3, pp. 413–434, 2000.
- [46] A. M. Urbina, M. León de la Barra, G. León de la Barra, y M. Cañas, “Elliptic integrals and limit cycles,” *Bull. Aust. Math. Soc.*, vol. 48, no. 2, pp. 195–200, 1993, doi: 10.1017/S0004972700015641.
- [47] A. M. Urbina, G. León de la Barra, M. León de la Barra, y M. Cañas, “Limit cycles of Liénard equations with nonlinear damping,” *Can. Math. Bull.*, vol. 36, no. 2, pp. 251–256, 1993, doi: 10.4153/CMB-1993-036-x.
- [48] M. Uribe, “Principal Poincaré-Pontryagin function of polynomial perturbations of the Hamiltonian triangle,” *J. Dyn. Control Syst.*, vol. 12, no. 1, pp. 109–134, 2006, doi: 10.1007/s10450-006-9687-4.
- [49] M. Uribe, “Principal Poincaré-Pontryagin function associated to polynomial perturbations of a product of $(d + 1)$ straight lines,” *J. Differ. Equations*, vol. 246, no. 4, pp. 1313–1341, 2009, doi: 10.1016/j.jde.2008.11.014.
- [50] M. Yeung, “Dulac’s theorem revisited,” *Qual. Theory Dyn. Syst.*, vol. 24, no. 2, 2025, Art. ID 57, doi: 10.1007/s12346-025-01220-2.