CUBO, A Mathematical Journal
Vol. 27, no. 2, pp. 285–306, Agosto 2025
DOI: 10.56754/0719-0646.2702.285

Representaciones lineales irreducibles de grupos finitos en cuerpos de números

Rubí E. Rodríguez[1]
Anita M. Rojas[2,✉]
Matías Saavedra-Lagos[2]

[1] *Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile.*
rubi.rodriguez@ufrontera.cl

[2] *Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile.*
anirojas@uchile.cl[✉]
matias.saavedra.l@ug.uchile.cl

RESUMEN

En esta breve nota, presentamos un método para construir explícitamente todas las representaciones irreducibles de grupos finitos sobre un cuerpo de números, salvo equivalencia. Como subproducto, describimos cómo encontrar las representaciones irreducibles del grupo de cuaterniones generalizado $Q(2^n)$, de orden 2^n, sobre un cuerpo L, con $\mathbb{Q} \leq L \leq \mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$ y $\xi_{2^{n-1}}$ una raíz 2^{n-1}-ésima primitiva de la unidad.

Palabras clave: Representaciones irreducibles, grupos finitos.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 20C05.

Publicado: 17 de septiembre de 2025
Aceptado: 10 de julio de 2025
Recibido: 17 de noviembre de 2024

CUBO, A Mathematical Journal
Vol. 27, no. 2, pp. 285–306, August 2025
DOI: 10.56754/0719-0646.2702.285

Linear irreducible representations of finite groups over number fields

Rubí E. Rodríguez[1]
Anita M. Rojas[2,✉]
Matías Saavedra-Lagos[2]

[1] *Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile.*
rubi.rodriguez@ufrontera.cl

[2] *Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile.*
anirojas@uchile.cl✉
matias.saavedra.l@ug.uchile.cl

ABSTRACT

In this brief note, we present a method to construct explicitly all irreducible representations of finite groups over a number field, up to equivalence. As a byproduct, we describe how to find the irreducible representations of the generalized quaternion group $Q(2^n)$, of order 2^n, over a field L, where $\mathbb{Q} \leq L \leq \mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$ and $\xi_{2^{n-1}}$ a primitive 2^{n-1}-root of unity.

Keywords and Phrases: Irreducible representations, finite groups

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 20C05

Published: 17 September, 2025
Accepted: 10 July, 2025
Received: 17 November, 2024

1. Introducción

La teoría de representaciones lineales de grupos finitos tiene diferentes aplicaciones a las más diversas áreas de la Matemática. Allí donde se estudien objetos con simetrías, allí esta teoría puede dar luz para describir más en profundidad dichos objetos.

Un ejemplo concreto de ello son los fructíferos resultados sobre variedades abelianas que han surgido de llevar la teoría de representaciones a ese campo. Vea por ejemplo [2–4, 7–9].

Recordemos algunas definiciones que usaremos en esta nota. Sea G un grupo finito y K un subcuerpo del cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. Una K-representación de G es un homomorfismo de grupos $\rho : G \to GL(V)$, donde V un espacio vectorial finito dimensional sobre el cuerpo K. Dos tales representaciones $\rho_1 : G \to GL(V_1)$ y $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ se dicen equivalentes si existe un K-isomorfismo $T : V_1 \to V_2$ que conmuta con las acciones inducidas por ρ_j en V_j.

Usando la terminología de módulos, vea [6, §29] para detalles, se tiene que V es un KG-módulo (a izquierda), y se dice que V *sustenta* a ρ. Una K-representación, o el módulo que la sustenta, se dice *K-irreducible* si no tiene G-submódulos (sobre K) aparte de los triviales y *descomponible* si todo G-submódulo (no trivial) tiene un G-submódulo complementario; esto es, si W es un G-submódulo de V, existe un G-submódulo W^c tal que $V = W \oplus W^c$. Irreducible e indescomponible (no descomponible) no son equivalentes sobre cuerpos arbitrarios. En esta nota estamos considerando representaciones sobre subcuerpos de $\mathbb{C}$, y en este caso, estas propiedades sí lo son.

Dada $K \subseteq L$ una extensión (finita) de cuerpos, por extensión de escalares se define el L-módulo

$$V^L := V \otimes_K L.$$

Se tiene que V^L contiene (una copia isomorfa) de V, $\dim_L V^L = \dim_K V$ y V^L es un LG-módulo de forma natural. Se tiene entonces una representación, que denotaremos por la misma letra ρ, de G sustentada ahora por V^L.

Emmy Noether [6, Theorem 29.7] respondió afirmativamente a la pregunta natural: ¿Si V_1 y V_2 son KG-módulos que son L equivalentes, entonces también lo son sobre K ? Esta observación abre la puerta a estudiar las representaciones irreducibles de un grupo G en cuerpos entre los racionales y los complejos. Se necesita fijar lenguaje para esto [6, Def. 29.12]: Sea $\rho : G \to GL(V)$ una K-representación irreducible (sobre K), se dice que

- V (o ρ) es *absolutamente irreducible* si V^L es L-irreducible para toda extensión $K \subseteq L$ de K.
- Un cuerpo L se llama *cuerpo de descomposición* para el grupo (finito) G si y sólo si toda L-representación L-irreducible es absolutamente irreducible.

Por [6, Theorem 29.16], dado un grupo finito G, existe un cuerpo de números que es cuerpo de descomposición de G. Más aún, [6, §41] Maschke conjeturó alrededor del 1900 y Brauer probó en 1945, que un cuerpo de descomposición para G es $L_t := \mathbb{Q}(\xi_t)$, donde t es el exponente de G y ξ_t es una raíz t-ésima primitiva de la unidad. Este cuerpo de descomposición muchas veces no es el preciso, en el sentido de mínima extensión de $\mathbb{Q}$. Por ejemplo, para el grupo simétrico S_3, que tiene exponente 6, el cuerpo de los racionales es un cuerpo de descomposición y está estrictamente contenido en L_6.

1.1. Teoría de caracteres

A cada K-representación $\rho : G \to GL(V)$, le corresponde un K-caracter $\chi_\rho : G \to K$ definido por $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$ en alguna base de V, $\mathrm{tr}(A)$ siendo la traza de la matriz A. Paralelo a la teoría de representaciones, se desarrolla la teoría de caracteres. Esta tiene varias ventajas; cuando se trata de $\mathbb{C}$-representaciones se tienen las siguientes: representaciones equivalentes tienen el mismo caracter, se define un producto interno entre caracteres que captura la equivalencia e irreducibilidad de las representaciones asociadas [10, §2.3].

Aprovechando la correspondencia entre K-representaciones irreducibles y K-caracteres irreducibles, se encuentran los K-caracteres irreducibles de G a partir de los L-caracteres irreducibles de G, donde L es un cuerpo de descomposición de G. La técnica descansa en Teoría de Galois para la extensión de cuerpos

$$K \subseteq K(\{\chi(g) : g \in G\}) \subseteq L,$$

vea [6, §70] para detalles.

Si bien para muchas de esas aplicaciones, basta conocer los caracteres de un grupo finito G en un cuerpo K, por ejemplo en [4] usan $K = \mathbb{Q}$ o $K = \mathbb{C}$ para descomponer variedades abelianas, para otras aplicaciones se necesita la expresión matricial de la representación. Vea por ejemplo [10, §2.7], donde se construyen *proyectores* usando los coeficientes de las matrices correspondientes a una representación para descomponer explícitamente un G-módulo. O el trabajo [1, pág. 270], donde para demostrar el Lema de Selberg; a saber, todo grupo finitamente generado de matrices en un cuerpo de característica cero tiene un subgrupo de índice finito libre de torsión, usa que hay un homomorfismo inyectivo de $GL(n, F)$ a $GL(nk, K)$ donde F es una extensión algebraica finita de grado k sobre K. Sin embargo, hasta donde alcanza nuestro conocimiento, no hay en la literatura métodos explícitos y programables para construir tales representaciones matriciales.

2. Preliminaries

En esta sección repasamos algunos de los resultados de [6, §42] que serán útiles en nuestra construcción.

Sea m un entero positivo, ξ_m una raíz m-ésima primitiva de la unidad, y K un subcuerpo de $\mathbb{C}$. Entonces $K(\xi_m)$ es una extensión normal y finita de K, y cada automorfismo de $K(\xi_m)$ que fija los elementos de K está dado por una función

$$\xi_m \xrightarrow{\varphi_m} \xi_m^r,$$

donde r es algún entero relativamente primo a m. Se define $I_m(K)$ como el grupo multiplicativo de enteros r (módulo m) para los cuales φ_m es un automorfismo de $K(\xi_m)$.

Entonces el grupo de Galois $\mathrm{Gal}\big(K(\xi_m)/K\big)$ se identifica naturalmente con $I_m(K)$. Se verifica que, por ejemplo, $I_m(\mathbb{C}) = \{1\}$ e $I_m(\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

Definición 2.1. *Con las definiciones de arriba. Sea G un grupo finito de exponente t, dos elementos $a, b \in G$ se dicen K-conjugados si*

$$x^{-1}bx = a^r,$$

para algún $x \in G$ y algún $r \in I_t(K)$.

Existe una notable relación que permite contar las representaciones de un grupo G sobre un cuerpo $K \subseteq \mathbb{C}$.

Teorema 2.2 ([6, Theorem 42.8])**.** *El número de KG-módulos irreducibles no isomorfos es el mismo que el número de K-clases de conjugación en G.*

Observe que para el caso en que $K = \mathbb{Q}(\xi_t)$, t el exponente de G, se tiene que la K-conjugación es la conjugación usual. Por otro lado, si $K = \mathbb{Q}$ dos elementos son K-conjugados si y sólo si generan grupos conjugados. Se recuperan así los teoremas de *conteo* de representaciones irreducibles conocidos para $\mathbb{C}$ y $\mathbb{Q}$, [6, Theorem 27.22, Theorem 39.5] respectivamente.

Con este teorema podemos contar todos los KG-módulos irreducibles de un grupo G, pero no construirlos. Sin embargo, es ya un resultado clásico que los K-caracteres irreducibles de G en los diferentes subcuerpos K de un cuerpo de descomposición L para G, el cual es una extensión finita normal de $\mathbb{Q}$, se construyen a partir de los L-caracteres irreducibles. Esto está desarrollado, por ejemplo, en [6, §70], particularmente en los teoremas (70.12) y (70.15), junto al Ejercicio 70.2.

El propósito de esta nota breve es entregar un método que permite encontrar explícitamente las representaciones irreducibles de G, en una forma matricial, en los cuerpos intermedios K con $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L_t$. Esto es, realizar matricialmente la construcción a nivel de caracteres, por ejemplo en [6, §70], que es lo que se realiza usualmente.

3. Construyendo K-representaciones irreducibles

En esta sección G es un grupo finito de exponente t, ξ_t es una raíz t-ésima primitiva de la unidad y todos los cuerpos que consideraremos son cuerpos de números contenidos en $L_t := \mathbb{Q}(\xi_t)$.

Recordemos que,

- Dos elementos $a, b \in G$ son $\mathbb{Q}(\xi_t)$-conjugados si y solo si son conjugados en el sentido usual.
- Dos elementos $a, b \in G$ son $\mathbb{Q}$-conjugados si y solo si $g\langle a\rangle g^{-1} = \langle b\rangle$.

Definición 3.1. *Sean $[L : K] = m$ y $\beta = \{e_1, \ldots, e_m\}$ una K-base de L. Todo $l \in L$ determina una transformación lineal $\pi_l : L \to L$, dada por $\pi_l(x) = lx$. Denotamos por $\Pi_l = [\pi_l]_\beta$ la matriz de $m \times m$ correspondiente a π_l en la base β. Para una matriz $A = (a_{ij}) \in M(s \times s, L)$ definimos su transformada a K, denotada $K(A)$, reemplazando cada coeficiente a_{ij} por la matriz correspondiente $\Pi_{a_{ij}}$. En otras palabras, definimos la función $K : M(s \times s, L) \to M(sm \times sm, K)$ dada por $K(A) = \left([\pi_{a_{ij}}]_\beta\right)_{1\leq i,j,\leq s}$.*

Ilustramos esta definición con un ejemplo sencillo.

Ejemplo 3.2. *Sean $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(i)$ y $\beta = \{1, i\}$. Entonces la transformada a K de la matriz $A = (i) \in M(1 \times 1, L)$ es*

$$K(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La Definición 3.1 nos permite obtener una K representación de un grupo G a partir de una L representación de él. Lo explicamos en el siguiente lema.

Lema 3.3. *Considere la notación de la Definición 3.1. Sea $\rho : G \to GL(r, L)$ una L-representación matricial de G, entonces $\psi : G \to GL(mr, K)$ dada por $\psi(g) = K(\rho(g))$ es una K-representación de G.*

Demostración. Esto es inmediato de la contención

$$\mathbb{M}_r(L) \cong \mathbb{M}_r(K) \otimes_K L \subseteq \mathbb{M}_r(K) \otimes_K \mathbb{M}_m(K) \cong \mathbb{M}_{mr}(K),$$

donde $\mathbb{M}_r(K)$ es el anillo de matrices cuadradas de r-por-r. □

Hablamos de que la K-representación ψ es la *transformada a K* de la L-representación ρ. Note que cada matriz $\psi(g)$ tiene sus coeficientes en el cuerpo K. El caracter de ψ está relacionado con el de ρ de la siguiente forma.

Lema 3.4. *Bajo las condiciones del Lema 3.3, si χ es el caracter asociado a la representación ρ, χ' es el caracter asociado a ψ y si $\sigma_1, \ldots, \sigma_{[L:K]}$ son todas las incrustaciones de L en $\bar{K}$, entonces $\chi' = \sum_{i=1}^{[L:K]} \sigma_i(\chi)$.*

Demostración. Siempre que una matriz cuadrada se descompone en bloques cuadrados del mismo tamaño, la traza de la matriz es igual a la suma de las trazas de los bloques diagonales. Se sigue que χ' es igual a la suma de las trazas de los coeficientes diagonales l de ρ interpretado como matrices Π_l. Por definición, la traza $\mathrm{tr}_{L/K}(l)$ es la traza de la matriz Π_l. Se sigue que $\chi' = \mathrm{tr}_{L/K}(\chi)$, y el resultado sigue de la fórmula usual de la traza. □

Finalmente, presentamos el resultado que permite construir las K-representaciones irreducibles de G a partir de las L-representaciones irreducibles de él.

Teorema 3.5. *Bajo las condiciones del Lema 3.4 anterior, si L/K es una extensión abeliana de grado primo, y si ρ es una representación irreducible sobre L que no está definida sobre K, entonces ψ es una representación irreducible de K.*

Demostración. Sean $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(L/K) = \langle \sigma \rangle$ el grupo de Galois de la extensión $K \subset L$, $p = [L : K] = \sharp\mathcal{G}$ (primo). Además, como antes, denote por χ al caracter asociado a la representación ρ y χ' al caracter asociado a ψ. Entonces las órbitas de Galois de χ tienen p elementos o un elemento. En el primer caso $\chi' = \sum_{i=0}^{p-1} \sigma^i(\chi)$, y entonces es irreducible por ser la suma de una órbita de Galois. En el segundo caso se tiene que $\chi' = p\chi$, entonces si m es el índice de Schur de χ sobre K, este debe dividir a p. Como $m > 1$, pues ρ no está definido sobre K, se concluye que $m = p$. □

4. Aplicación 1: Grupos de orden pequeño.

Sea G un grupo finito de exponente t y, como antes, $L_t := \mathbb{Q}(\xi_t)$ con ξ_t raíz t-ésima primitiva de 1. En esta sección encontraremos todas las representaciones irreducibles en los cuerpos K entre $\mathbb{Q}$ y L_t para todos los grupos hasta orden 8. Llegamos hasta ese orden pues es el orden donde aparece el primer elemento de la familia de grupos que estudiaremos en la sección siguiente. Usaremos la notación C_s para el grupo cíclico de orden s.

Los grupos C_2 y $C_2 \times C_2$ tiene todas sus representaciones racionales absolutamente irreducibles.

Para $C_3 = \langle x : x^3 = 1 \rangle$ la situación es distinta. Tiene 3 representaciones irreducibles complejas, todas realizables sobre $L_3 = \mathbb{Q}(\xi_3)$. La representación trivial χ_0 es realizable sobre $\mathbb{Q}$. Las otras dos representaciones, χ_1 y χ_2 dadas por $\chi_1(x) = (\xi_3)$ y $\chi_2(x) = (\xi_3^2)$ respectivamente, no están definidas sobre $\mathbb{Q}$. De hecho, corresponden a una única representación de grado 2 irreducible sobre $\mathbb{Q}$: La *transformada a* $\mathbb{Q}$ de χ_1 (o χ_2), que está definida por

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad x \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ella se obtiene a partir de la $\mathbb{Q}$-base $\{1, \xi_3\}$ de $\mathbb{Q}(\xi_3)$.

El grupo $C_4 = \langle x : x^4 = 1 \rangle$ tiene 4 representaciones irreducibles todas realizables en $L_4 = \mathbb{Q}(i)$. Dos de ellas realizables en $\mathbb{Q}$ y las otras dos sumadas son equivalentes a la representación del Ejemplo 3.2.

La situación para C_5 comienza a ser más interesante. Tiene cinco representaciones irreducibles complejas, todas realizables sobre el cuerpo $L_5 = \mathbb{Q}(\xi_5)$. Note que en este caso tenemos al cuerpo intermedio, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\xi_5)$. La representación trivial está definida sobre $\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ está contenida en $\mathbb{R}$, ninguna de las otras representaciones está definida sobre este cuerpo. Las representaciones que envían el generador a (ξ_5) y (ξ_5^4) son conjugados complejos, por lo que corresponden a una única representación sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Usando la base $\beta = \{1, \xi_5\}$ obtenemos la representación

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix},$$

donde $u = \xi_5 + \xi_5^4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, pues ξ_5 satisface la ecuación $x^2 = ux - 1$. Similarmente, las representaciones que mandan el generador a (ξ_5^2) y (ξ_5^3) son conjugados complejos, y corresponden a la representación de dimensión dos,

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & u \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -u \\ u & u^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -u \\ u & -u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Como la traza de cada matriz en las últimas dos representaciones es irracional, hay solo dos representaciones irreducibles sobre $\mathbb{Q}$, la representación trivial y la que es dada por

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

en donde usamos la $\mathbb{Q}$-base $\{1, u\}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(u)$. Note que $u^2 = -u + 1$, entonces está última representación corresponde a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

En orden 6 tenemos el grupo cíclico C_6 que tiene sus representaciones irreducibles complejas realizables en $L_6 = \mathbb{Q}(\xi_6)$. Dos de ellas con cuerpo de descomposición $\mathbb{Q}$ y las otras cuatro se combinan de a dos para determinar dos $\mathbb{Q}$-representaciones irreducibles de grado 2. Para el estudio del grupo dihedral referimos a [4].

4.1. El grupo de orden 7

Llegamos a $C_7 = \langle x : x^7 = 1 \rangle$ que tiene siete representaciones complejas irreducibles, todas realizables sobre $L_7 = \mathbb{Q}(\xi_7)$. Este caso ya tiene más ingredientes. El reticulado de los cuerpos intermedios es el siguiente:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{Q}(\xi_7) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\mathbb{Q}\left(i\sqrt{7}\right) \arrow[dr, dash] & & \mathbb{Q}\Big(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\Big) \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbb{Q} &
\end{tikzcd}$$

en donde los dos subcuerpos intermedios corresponden a los subgrupos de orden 3 y 2 del grupo $\mathcal{G}_7 = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_7)/\mathbb{Q})$, que es el cíclico de orden 6.

Análogo a lo anterior, tenemos siete representaciones complejas χ_j dadas por $\chi_j(x) = (\xi_7^j)$ con $0 \leq j \leq 6$.

Primero consideremos las representaciones irreducibles sobre el cuerpo $\mathbb{Q}\Big(\cos(\frac{2\pi}{7})\Big)$. Para eso note que $\cos(\frac{2\pi}{7}) = \frac{1}{2}(\xi_7+\xi_7^6)$. Concluimos que $L = \mathbb{Q}\Big(\cos(\frac{2\pi}{7})\Big)$ es el cuerpo invariante del automorfismo dado por $\sigma(\xi_7) = \xi_7^{-1}$. Hay cuatro L-clases de conjugación (Definición 2.1), estas son $\{1\}$, $\{x, x^6\}$, $\{x^2, x^5\}$ and $\{x^3, x^4\}$. Así que debemos encontrar cuatro representaciones. La representación trivial está definida sobre $\mathbb{Q}$, para las restantes, escogemos una representación en cada clase de Galois y aplicamos el método de la Definición 3.1 y Lema 3.3. Tenemos las siguientes matrices:

$$[\pi_{\xi_7}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\frac{2\pi}{7}) \end{pmatrix}, \qquad \left[\pi_{\xi_7^2}\right]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & -2\cos(\frac{2\pi}{7}) \\ 2\cos(\frac{2\pi}{7}) & -1+4\cos^2(\frac{2\pi}{7}) \end{pmatrix},$$

$$\left[\pi_{\xi_7^3}\right]_\beta = \begin{pmatrix} -2\cos(\frac{2\pi}{7}) & 1-4\cos^2(\frac{2\pi}{7}) \\ -1+4\cos^2(\frac{2\pi}{7}) & 1-4\cos^2(\frac{2\pi}{7}) \end{pmatrix}.$$

Para el coeficiente de la esquina de abajo y derecha de la última matriz usamos el hecho de que $u = 2\cos(\frac{2\pi}{7})$ satisface $u^3 + u^2 - 2u - 1 = 0$, y por lo tanto $u^3 - 2u = 1 - u^2$.

Ahora consideramos las representaciones irreducibles sobre el cuerpo $E = \mathbb{Q}(i\sqrt{7})$. Note que $i\sqrt{7} = 2(\xi_7 + \xi_7^2 + \xi_7^4) + 1$, por lo tanto E es el cuerpo fijo del automorfismo dado por $\sigma(\xi_7) = \xi_7^2$. Note que ξ_7 y ξ_7^3 están en diferentes órbitas de Galois. De nuevo, podemos escribir las representaciones sobre E de dimensión tres enviando el generador a las matrices $[\pi_{\xi_7}]_\beta$ o $\left[\pi_{\xi_7^3}\right]_\beta$ en una base dada. Para poder calcular estas matrices nececitamos encontrar el polinomio irreducible de ξ_7 sobre E. Sea $b = \xi_7 + \xi_7^2 + \xi_7^4 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$. Entonces ξ_7 es una raíz de $x^4 + x^2 + x - b = 0$. También se tiene que $\xi_7^3 + \xi_7^5 + \xi_7^6 = -1 - b$. Multiplicando por ξ_7^4 obtenemos $(1 + b)\xi_7^4 + 1 + \xi_7^2 + \xi_7^3 = 0$. En particular ξ_7 es una raíz de $(1+b)x^4+x^3+x^2+1 = 0$. Multiplicando la primera ecuación por $b+1$ y restándola con la segunda ecuación obtenemos, $x^3 - bx^2 - (1 + b)x + (b^2 + b + 1) = 0$. Como es una ecuación cúbica, esta deber ser el polinomio irreducible de ξ_7. Note que además $b = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ es una raíz de $x^2 + x + 2 = 0$, entonces podemos reescribir el polinomio minimal de ξ_7 sobre E como $x^3 - bx^2 - (1 + b)x - 1$. Esto nos entrega la matriz

$$[\pi_{\xi_7}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b+1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix},$$

y también

$$\left[\pi_{\xi_7^3}\right]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b+1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ b+1 & -1 & -1 \\ b & -1 & -1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} & -1 \\ \frac{1+i\sqrt{7}}{2} & -1 & -1 \\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} & -1 & \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix}.$$

En donde para computar la última matriz, la identidad $b^2 + b + 1 = -1$ fue usada varias veces.

Finalmente, encontraremos las representaciones irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ a partir de las representaciones irreducibles de la extensión cúbica $L/\mathbb{Q}$. Primero note que las $\mathbb{Q}$-clases de conjugación son $\{1\}$ y $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$, entonces hay precisamente dos representaciones irreducibles sobre $\mathbb{Q}$. Considere la $\mathbb{Q}$-base de L dada por $\beta = \left\{1, \cos(\frac{2\pi}{7}), \cos^2(\frac{2\pi}{7})\right\}$. Entonces se tiene que

$$[\pi_{\pm1}]_\beta = \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix}, \qquad \left[\pi_{2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)}\right]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

en donde para la última matriz, usamos que $u = 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ satisface $u^3 = -u^2 + 2u + 1$, y por lo tanto $u\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) = -\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 1/4$. Ahora la representación irreducible no trivial sobre $\mathbb{Q}$ está dada por

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.2. Grupos de orden 8

Para los dos grupos abelianos $C_4 \times C_2$ y $C_2 \times C_2 \times C_2$ construimos sus representaciones como producto directo de las representaciones de sus factores, las que fueron descritas arriba. Para D_4 referimos a [4]. Queda entonces por analizar las representaciones de C_8 y Q_8. Vamos por casos.

- Sea $G = C_8 = \langle x : x^8 = 1 \rangle$. Todas sus representaciones complejas irreducibles están definidas sobre $L_8 = \mathbb{Q}(\xi_8)$. El reticulado de este cuerpo es

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Q}(\xi_8) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \mathbb{Q}(i) \arrow[dr, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \arrow[d, dash] & \mathbb{Q}(\sqrt{-2}) \arrow[dl, dash] \\ & \mathbb{Q} & \end{tikzcd}.$$

  Hay ocho representaciones irreducibles sobre el cuerpo $\mathbb{Q}(\xi_8)$, cada una de la forma $\chi_r(x) = \xi_8^r$ con $0 \leq r \leq 7$. Para $r = 0, 4$ la representación está definida sobre $\mathbb{Q}$. Misma situación para $\mathbb{Q}(i)$ y representaciones correspondientes a $r = 2, 6$.

  Las otras cuatro se separan en dos pares de órbitas de Galois y por lo tanto se obtienen a partir de las representaciones que envían el generador a ξ_8 y ξ_8^3, esto pues $\mathbb{Q}(i)$ es el cuerpo invariante del automorfismo $\xi_8 \mapsto -\xi_8 = \xi_8^5$.

  Concluimos que las representaciones irreducibles restantes sobre $\mathbb{Q}(i)$, se obtienen mandando el generador a las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

  El cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es el cuerpo invariante del automorfismo que envía ξ_8 a ξ_8^7, pues es la intersección de $\mathbb{Q}(\xi_8)$ con el cuerpo de números reales. En este caso, las órbitas de Galois de las raíces de la unidad son $\{i, -i\}$, $\{\xi_8, \xi_8^7\}$ y $\{\xi_8^3, \xi_8^5\}$. Más aún, ξ_8 satisface la ecuación $x^2 - x\sqrt{2} + 1 = 0$, mientras que i satisface la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Obtenemos, entonces, tres representaciones irreducibles de dimensión dos sobre este cuerpo, donde las imágenes de x es alguna de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, el cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ es el cuerpo invariante del automorfismo que envía ξ_8 a ξ_8^3. En este caso, las órbitas de Galois de las raíces de la unidad son $\{i, -i\}$, $\{\xi_8, \xi_8^3\}$ y $\{\xi_8^5, \xi_8^7\}$. Más aún, ξ_8 satisface la ecuación $x^2 - x\sqrt{-2} - 1 = 0$, mientras i satisface la ecuación $x^2 + 1 = 0$, como antes. Obtenemos, nuevamente, tres representaciones irreducibles de dimensión dos sobre este cuerpo, donde la imagen de x es una de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{-2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{-2} \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{-2} & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las representaciones irreducibles racionales se pueden obtener a partir de las de $\mathbb{Q}(i)$, y obtenemos las representaciones que envían x a:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Sea $G = \langle x, y | x^4 = y^4 = 1, x^2 = y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$, el grupo cuaternio Q_8. Todas las representaciones irreducibles complejas [6, Ex. §70.13] están definidas sobre $\mathbb{Q}(i)$. Hay cuatro representaciones irreducibles de dimensión uno que envían los generadores a (1) o (-1) y están definidas sobre $\mathbb{Q}$ y una representación de dimensión 2 dada por:

$$\rho_5(x) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \rho_5(y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando el Lema 3.3 y Ejemplo 3.2, vemos que esta última corresponde a una representación irreducible sobre $\mathbb{Q}$ dada por

$$\rho_5(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_5(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Aplicación 2: Cuaterniones generalizados

Estudiaremos ahora las representaciones irreducibles, en los distintos cuerpos de números entre $\mathbb{Q}$ y el cuerpo de descomposición $L_{exp(G)}$, para G en la familia de cuaterniones generalizados. Su presentación es la siguiente:

$$Q(2^n) = \langle x, y : x^{2^{n-1}} = 1, y^2 = x^{2^{n-2}}, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle, \quad \text{with } n \geq 3.$$

Este grupo tiene orden 2^n. Cada elemento se puede escribir como $x^\alpha y^\beta$ con $\alpha \in \{0, \ldots, 2^{n-1} - 1\}$ y $\beta \in \{0, 1\}$, el exponente de este grupo es $t = 2^{n-1}$, así que las representaciones irreducibles complejas de este grupo son realizables en $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$. Como además se conocen sus representaciones irreducibles sobre $\mathbb{C}$, o lo mismo sobre $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$, sólo tenemos que aplicar los resultados de la sección anterior, Lema 3.3 y Teorema 3.5, para obtener lo deseado.

De [5, §4.1], y las referencias allí citadas, se obtiene que el grupo $Q(2^n)$ tiene $3 + 2^{n-2}$ representaciones irreducibles sobre $\mathbb{C}$, cuatro de ellas son racionales pues mandan los generadores a (1) o (-1), y las otras están dadas por

$$\theta_s : x \mapsto \begin{pmatrix} \omega^s & 0 \\ 0 & \omega^{-s} \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^s & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\omega = \exp(2\pi i / 2^{n-1})$ y $s \in \{1, \ldots, 2^{n-2} - 1\}$. Note que θ_s tiene, en su diagonal, una órbita de la acción natural de -1 sobre las raíces 2^{n-1}-ésimas de la unidad, excepto 1 y -1.

Recuerde que si $\mathcal{U}_n$ es el conjunto de raíces n-ésimas de la unidad y $\mathcal{PU}_n$ es el conjunto de raíces n-ésimas primitivas de la unidad, entonces

$$\mathcal{U}_{2^{n-1}} = \sqcup_{k|2^{n-1}} \mathcal{PU}_k.$$

Definición 5.1. *Considerando la notación anterior, se define*

$$Irr(2^k) = \{\theta_s \in Irr_{\mathbb{C}}(Q(2^n)) : \omega^s \in \mathcal{PU}_{2^k}\},$$

con $2 \leq k \leq n - 1$.

Note que $\mathrm{Irr}(2^k)$ tiene 2^{k-2} elementos, una representación por cada $\langle -1\rangle$-órbita sobre $\mathcal{PU}_{2^k}$.

En esta sección tenemos tres objetivos. El primero es *contar*, vea la Sección 5.1. Es decir, determinar la cantidad de representaciones irreducibles (salvo equivalencia) sobre los distintos subcuerpos de $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$. Recordemos que K es un subcuerpo de $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$ entonces $\mathrm{Gal}{=}\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/K)$ actúa sobre cada representación por la acción sobre cada entrada de las matrices correspondientes. El número de órbitas de esta acción es el número de representaciones irreducibles sobre K [6, §70].

El segundo objetivo (Sección 5.2) es describir explícitamente las representaciones matriciales sobre $\mathbb{Q}$ del grupo $Q(2^n)$. Si bien en [5, §3.1] las describen como representaciones complejas, aquí queremos exhibir las matrices con sus entradas efectivamente en $\mathbb{Q}$.

El tercer objetivo es entregar un procedimiento algorítmico que permite construir todas las representaciones irreducibles del grupo $Q(2^n)$ en los cuerpos intermedios entre $\mathbb{Q}$ y su cuerpo de descoposición $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$. El cual es fácilmente generalizable a cualquier grupo (finito) G.

5.1. Cantidad de representaciones irreducibles del grupo cuaternio generalizado

Aplicando los resultados expuestos en la sección anterior, primero comenzamos por determinar la cantidad de representaciones irreducibles en los distintos cuerpos de interés del grupo $Q(2^n)$.

Primero, recuperamos, por completitud y a nuestro contexto, un resultado obtenido en [5, §4].

Proposición 5.2 ([5, §4.1])**.** *Considere el grupo $Q(2^n)$, con $n \geq 3$. El número de representaciones irreducibles sobre $\mathbb{Q}$ es $n+2$.*

Demostración. Considere $\phi \in \mathrm{Irr}(2^k)$, entonces si $\tau \in \mathrm{Gal} \cong (\mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z})^*$ actúa sobre ϕ, como para todo $\omega \in \mathcal{PU}_{2^k}$, $\omega^\tau \in \mathcal{PU}_{2^k}$, tenemos que $\tau.\phi \in \mathrm{Irr}(2^k)$. Más aún, la acción del grupo de Galois correspondiente en $\mathcal{PU}_{2^k}$ es transitiva, entonces para todo $\omega \in \mathcal{PU}_{2^k}$ tenemos que $\mathrm{Gal}(\omega) = \mathcal{PU}_{2^k}$, así que concluimos que la acción de Gal sobre $\mathrm{Irr}(2^k)$ es transitiva. Por otro lado, como las representaciones irreducibles de dimensión uno están definidas sobre $\mathbb{Q}$, estas están fijas por cada elemento del grupo de Galois. Luego concluimos que hay $n+2$ órbitas, cuatro de ellas son singletons que consisten en las representaciones de dimensión uno y las otras $n-2$ corresponden a los conjuntos $\mathrm{Irr}(2^k)$. □

Ahora calcularemos la cantidad de representaciones irreducibles, salvo equivalencia, sobre los otros subcuerpos de $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$.

Proposición 5.3. *Considere el grupo $Q(2^n)$, con $n \geq 3$, el número de representaciones irreducibles sobre $\mathbb{Q}(\xi_{2^k})$, con $2 \leq k \leq n-1$ es $(n-k+1)2^{k-2}+3$*

Demostración. Para este resultado recordemos que la notación $ord_b(a)$ se refiere al orden multiplicativo del elemento a visto en $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$.

Si Gal= $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^k}))$ entonces $|\mathrm{Gal}| = 2^{n-2}/2^{k-1} = 2^{n-k-1}$. Ahora, como las representaciones irreducibles en los conjuntos $\mathrm{Irr}(2^q)$, con $2 \leq q \leq k$ están definidas sobre $\mathbb{Q}(\xi_{2^k})$ los estabilizadores de la representación en estos conjuntos son todos los elementos de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^k}))$.

Para calcular los estabilizadores de las otras representaciones note que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^k}))$ es un subgrupo de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q})$ y este último es isomorfo a $(\mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z})^*$. De hecho, usando el resultado de que para todo $k \geq 2$ $ord_{2^k}(5) = 2^{k-2}$, se puede ver que la acción de $5^{2^{k-2}}$ fija el elemento ξ_{2^k}, es decir que si $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q})$ es tal que $\tau(\xi_{2^{n-1}}) = \xi_{2^{n-1}}^{5^{2^{k-2}}}$ entonces $\tau(\xi_{2^k}) = \xi_{2^k}$ y por lo tanto $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^k}))$, más aún, se tiene que $|\tau| = 2^{n-k-1}$, y por lo tanto podemos concluir que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^k}))$ es isomorfo a $\langle \bar{5}^{2^{k-2}} \rangle \subseteq (\mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z})^*$. Así que considere $\phi \in \mathrm{Irr}(2^q)$, con $k+1 \leq q \leq n-1$. Esta representación tiene asociada una raíz 2^q-ésima primitiva de la unidad ω. Entonces si identificamos a los elementos de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^k}))$ con sus respectivas imágenes en $(\mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z})^*$ se cumple que $\tau^i \in Stab_{\mathrm{Gal}}(\phi)$ si y solo si $\omega^{\tau^i} = \omega$ o $\omega^{-\tau^i} = \omega$, y esto pasa si y solo si $\tau^i \equiv 1(\mathrm{mod}(2^q))$ o $\tau^i \equiv -1(\mathrm{mod}(2^q))$, recuerde que $\tau^i = \bar{5}^{2^{k-2}i}$ para algún $1 \leq i \leq 2^{n-k-1}$. Esta última condición no pasa ya que $5 \equiv 1(\mathrm{mod}(4))$ y entonces se tendría que $1 \equiv -1(\mathrm{mod}(4))$, lo que es una contradicción. Así es que queremos conocer cuándo $5^{2^{k-2}i} \equiv 1(\mathrm{mod}(2^q))$, esto pasa si y solo si $2^{k-2}i = 2^{q-2}r$, para algún $r \in \mathbb{Z}$, entonces se tiene que $i = 2^{q-k}r$, y como $1 \leq i \leq 2^{n-k-1}$, existen 2^{n-q-1} posibilidades para r. Concluimos que $|Stab_{\mathrm{Gal}}(\phi)| = 2^{n-q-1}$.

Usando el lema de conteo de Burnside, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Gal}\backslash\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(Q(2^n))| &= \frac{1}{|\mathrm{Gal}|}\sum_{\phi\in\mathrm{Irr}} |Stab_{\mathrm{Gal}}\phi| \\
&= \frac{1}{|\mathrm{Gal}|}(4|\mathrm{Gal}| + \sum_{q=2}^{k} |\mathrm{Irr}(2^q)||\mathrm{Gal}| + \sum_{q=k+1}^{n-1} |\mathrm{Irr}(2^q)|2^{n-q-1}) \\
&= 4 + \sum_{q=2}^{k} 2^{q-1} + \frac{1}{2^{n-k-1}} \sum_{q=k+1}^{n-1} 2^{q-2}2^{n-q-1} \\
&= 4 + 2^{k-1} - 1 + (n-k-1)2^{k-2} = (n-k+1)2^{k-2} + 3.
\end{aligned}$$

Y con esto se concluye el resultado. □

5.2. Representaciones irreducibles matriciales racionales para el cuaternio generalizado

Una vez que conocemos la cantidad de representaciones irreducibles racionales de un grupo G y su descomposición en irreducibles complejas, nos interesa describir explícitamente las matrices correspondientes en cada una de ellas. Para eso usamos el método del Teorema 3.5.

Para el caso de $G = Q(2^n)$ sabemos obtener explícitamente las $n+2$ representaciones irreducibles racionales sobre $Q(2^n)$ como representaciones complejas, ver [5, §3.1]. Ahora queremos exhibir cómo se ven matricialmente con coeficientes efectivamente en el cuerpo $\mathbb{Q}$. Recordemos que, técnicamente, el resultado en [6] escribe cómo construir cada irreducible racional como suma directa de complejas, luego estas no se verán necesariamente como matrices con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Lo que se sabe, en ese punto, es que es *realizable* sobre $\mathbb{Q}$; es decir, es $\mathbb{C}$-equivalente a una representación racional.

Vamos entonces a la construcción explícita de las representaciones irreducibles racionales de $Q(2^n)$ (salvo isomorfismo). Primero, sabemos que las cuatro representaciones (de grado 1) son realizables sobre $\mathbb{Q}$. Para obtener las otras $n-2$ representaciones irreducibles racionales de forma efectiva en los racionales, escogeremos un elemento del conjunto $\mathrm{Irr}(2^k)$ para cada $2 \leq k \leq n-1$. Luego, con el procedimiento descrito en el Lema 3.3 y Teorema 3.5, obtenemos explícitamente una representación racional irreducible φ. Esta, al tensorizarla con $\mathbb{C}$, se descompone en suma de algunas de las irreducibles que tenemos. Repetimos el proceso con otra de las representaciones irreducibles complejas de $Q(2^n)$ que no es componente de φ. Con este procedimiento encontramos todas las representaciones irreducibles racionales del grupo.

Proposición 5.4. *Sea θ_{2^k} la representación en $Irr(2^k)$ que envía x a la matriz $\begin{pmatrix} \xi_{2^k} & 0 \\ 0 & \xi_{2^k}^{-1} \end{pmatrix}$, con ξ_{2^k} una raíz 2^k-ésima primitiva de la unidad. Entonces, la transformada $\mathbb{Q}$ de $\theta_{2^k}(x)$ corresponde a la matriz*

$$\mathbb{Q}(\theta_{2^k}(x)) = \begin{pmatrix} [\xi_{2^k}]_\beta & 0 \\ 0 & [\xi_{2^k}^{-1}]_\beta \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \cdots & 0 & -1 & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & I_{2^{k-1}-1} & & \vdots & & \mathbf{0} & & \\ & & & 0 & & & & \\ \hline & & & & 0 & & & \\ & & & & \vdots & & I_{2^{k-1}-1} & \\ & \mathbf{0} & & & 0 & & & \\ & & & & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

y la transformada $\mathbb{Q}$ de $\theta_{2^k}(y)$ corresponde a la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ (-I_n)^s & 0 \end{pmatrix}.$$

En ambos casos $I_\star$ denota la matriz identidad de tamaño $\star$.

Demostración. Considere la $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}(\xi_{2^k})$, $\beta = \{1, \xi_{2^k}, \ldots, \xi_{2^k}^{2^{k-1}-1}\}$. Como se cumple que $\xi_{2^k}^{2^{k-1}} = -1$ y $\xi_{2^k}^{-1} = -\xi_{2^k}^{2^{k-1}-1}$, la representación resultante de aplicar la transformada $K = \mathbb{Q}$ a θ_{2^k} es tal que $g \mapsto \mathbb{Q}(\theta_{2^k}(g))$ para todo $g \in Q(2^n)$. Recuerde que esta transformada consiste en aplicar la Definición 3.1 a cada entrada de cada matriz correspondiente a $\theta_{2^k}(g)$.

Para ver que esta representación es irreducible calculamos su caracter.

Note que los elementos de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^k})/\mathbb{Q})$ actúan enviando ξ_{2^k} a $\xi_{2^k}^{\alpha}$ con α un número impar. Entonces si χ es el caracter de la representación $\theta_{2^k} \in \mathrm{Irr}(2^k)$ escogida y χ' es el caracter de la representación $\mathbb{Q}(\theta_{2^k})$ después de aplicar la transformada a $\mathbb{Q}$ (Definición 3.1), por el Lema 3.4 sabemos que para todo $g \in Q(2^n)$ se cumple que $\chi'(g) = \sum_{i=1}^{2^{k-1}} \sigma_i(\chi(g))$ con σ_i los elementos de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^k})/\mathbb{Q})$. Entonces como $\rho(x^\alpha) = \begin{pmatrix} \xi_{2^k}^{\alpha} & 0 \\ 0 & \xi_{2^k}^{-\alpha} \end{pmatrix}$ se tiene que $\chi'(x^\alpha) = \sum_{i=1}^{2^{k-1}} \xi_{2^k}^{\alpha(2i-1)} + \xi_{2^k}^{-\alpha(2i-1)}$.

Hay distintos casos,

- si α no es congruente a 0 ni a 2^{k-1} módulo 2^k entonces siempre que aparezca un sumando, estará su inverso aditivo, luego en este caso tenemos que $\chi'(x^\alpha) = 0$.
- Si α es congruente a 2^{k-1} módulo 2^k entonces todos los sumandos son -1, por lo tanto, $\chi'(x^\alpha) = -2^k$.
- Por último si α es congruente a 0 módulo 2^k entonces $\chi'(x^\alpha) = 2^k$. Calculando explícitamente las matrices asociadas a los elementos y y xy vemos que $\chi'(y) = \chi'(xy) = 0$, y con esto sabemos los caracteres de un representante en cada clase de conjugación de $Q(2^n)$, y por lo tanto, conocemos toda la tabla de caracteres.

Luego comparamos este caracter con el obtenido de aplicar *transformadas a K*, ver la Definición 3.1, de forma inductiva. Esto es, se toma θ_{2^k} y, para obtener la representación racional irreducible asociada iremos bajando de cuerpo uno a uno a partir de $\mathbb{Q}(2^{n-1})$. Así, en un paso, de la representación ρ que está definida en $\mathbb{Q}(2^k)$, obtenemos una representación en $\mathbb{Q}(2^{k-1})$ y así sucesivamente, bajando en la cadena de cuerpos hasta llegar a la representación racional. Este proceso nos asegura obtener una representación irreducible en cada paso, por el Teorema 3.5.

Note que el grupo de Galois de la extensión $\mathbb{Q}(\xi_{2^k})/\mathbb{Q}(\xi_{2^{k-1}})$ es un grupo de orden 2 generado por el automorfismo $\xi_{2^k} \mapsto -\xi_{2^k}$. Luego si χ es el caracter de la reprentación ρ del conjunto $\mathrm{Irr}(2^k)$ y χ'' es el caracter de la representación transformada a $\mathbb{Q}(\xi_{2^{k-1}})$, se tendrá que si α no es congruente a 0 ni a 2^{k-1} módulo 2^k entonces $\chi''(x^\alpha) = \xi_{2^k}^\alpha + \xi_{2^k}^{-\alpha} + (-\xi_{2^k})^\alpha + (-\xi_{2^k})^{-\alpha}$.

Si α es impar entonces $\chi''(x^\alpha) = 0$. Si no lo fuera, entonces $\chi''(x^\alpha) = 2(\xi_{2^q}^\beta + \xi_{2^q}^{-\beta})$ con β impar y $2 \leq q$. Entonces, para los α que son impares, el caracter de la representación racional obtenida evaluado en x^α es 0, pues al ir bajando de cuerpo los caracteres serán sumas de 0.

Para el caso en donde α no es impar, la imagen del caracter se irá duplicando cada vez que bajemos a otro cuerpo hasta llegar a la representación sobre $\mathbb{Q}(\xi_{2^q})$. Entonces, en este cuerpo el caracter asociado evaluado en x^α es $2^r(\xi_{2^q}^\beta + \xi_{2^q}^{-\beta})$.

Para la siguiente etapa el grupo de Galois actuará enviando $\xi_{2^q} \mapsto -\xi_{2^q}$. Por lo tanto, como β es impar, el caracter asociado evaluado en x^α es 0.

Luego, de todas formas cuando lleguemos en este proceso inductivo a la representación sobre los racionales, se tendrá que el caracter de x^α es 0. Luego para x^α con α no congruente a 0 ni a 2^{k-1} módulo 2^k, la imagen del caracter racional es igual a la del caracter racional de la representación obtenida en la Proposición, calculado más arriba.

Si α es congruente a 2^{k-1} módulo 2^k es fácil ver que el caracter de la representación racional obtenida evaluado en x^α es -2^k. Similarmente, si α es congruente a 0 módulo 2^k, entonces el caracter evaluado en x^α es 2^k.

Por último como $\chi(y) = \chi(xy) = 0$, el caracter racional obtenido también es 0 al evaluarlo en y y xy. Concluimos que esta representación racional, obtenida inductivamente haciendo el proceso de K-transfomada con K desde $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$ a $\mathbb{Q}$, que sabemos que es irreducible, tiene el mismo caracter que la representación racional que calculamos directamente y por lo tanto son equivalentes. Eso implica que la representación que calculamos es irreducible. De esta forma, tenemos de forma efectiva las $n+2$ representaciones irreducibles racionales del grupo $Q(2^n)$. $\square$

5.3. Algoritmo constructivo y explícito

El siguiente procedimiento es claramente generalizable a un grupo finito G y permite encontrar sus K-representaciones irreducibles salvo K-equivalencia. Donde, al igual que antes, K es un cuerpo de números contenido en un cuerpo de descomposición de G que es una extensión algebraica finita de $\mathbb{Q}$. Por ejemplo, el cuerpo de descomposición $L_t = \mathbb{Q}(\xi_t)$ con t el exponente de G y ξ_t una raíz t-ésima primitiva de 1. Sin embargo, lo redactamos para el grupo $G = Q(2^n)$ cuaternio generalizado con el propósito de simplificar la ilustración.

Sea $\mathbb{Q} \subset K \subset L$ una extensión finita algebraica de cuerpos, considere que si ρ es una L-representación, llamamos al conjunto $\{\rho^\sigma : \sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)\}$ la *clase de Galois de L sobre K* de ρ. El conjunto de L-representaciones irreducibles de G se particiona en estas clases de Galois, hablamos de *un representante de las clases de Galois* cuando se considera un representante por cada una de estas clases.

Para el procedimiento que sigue, consideramos $L = \mathbb{Q}(\xi_{2^{k-1}})$ y $K = \mathbb{Q}(\xi_{2^{k-2}})$, con k *bajando* desde $k = n$ hasta $k = 2$ en cada paso.

Algoritmo 5.5. *Procedimiento para la construcción explícita de K-representaciones irreducibles a partir de las L-representaciones irreducibles de G, con L extensión finita algebraica de K.*
Entrada: *El conjunto U constituido por un representante θ por cada órbita de Galois, para Gal(L/K), de representaciones irreducibles.*
Salida: *Las representaciones irreducibles sobre K.*
Procedimiento:

1. *Tome $\theta \in U$, luego es irreducible y definida sobre $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$.*
2. *Si θ está definida sobre $\mathbb{Q}(\xi_{2^{k-2}})$, o un cuerpo K de grado menor sobre $\mathbb{Q}$, no hace nada pues θ ya está definida por matrices con coeficientes en el cuerpo buscado.*
3. *Si no, entonces*
   - *Realice la transformada a K para $K = \mathbb{Q}(\xi_{2^{k-2}})$ a θ usando la base $\beta = \{1, \xi_{2^{k-1}}\}$.*
   - *Obtenga la representación $K(\theta)$ con coeficientes en K, para $K = \mathbb{Q}(\xi_{2^{k-2}})$.*
4. *Repita el procedimiento con cada $\theta \in U$.*

Demostración. El algoritmo comienza seleccionando entre las representaciones irreducibles sobre $L := \mathbb{Q}(\xi_{2^{k-1}})$, cada una en una órbita de Galois distinta, considerando el grupo de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{k-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^{k-2}}))$, para obtener todas las representaciones irreducibles sobre $\mathbb{Q}(\xi_{2^{k-2}})$ no equivalentes entre sí.

Como el grupo de Galois de la extensión $\mathbb{Q}(\xi_{2^{k-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^{k-2}})$ es el grupo de orden 2 que contiene al automorfismo que envía $\xi_{2^{k-1}}$ a $-\xi_{2^{k-1}}$, una base apropiada para realizar la transformada es la base $\beta = \{1, \xi_{2^{k-1}}\}$. El Teorema 3.5 nos asegura que las representaciones obtenidas en cada paso son irreducibles. □

Observe que el algoritmo comienza seleccionando una de las $3 \cdot 2^{n-4} + 3$ representaciones irreducibles sobre $L = \mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$, cada una en una órbita de Galois distinta, considerando el grupo de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-2}}))$, para obtener representaciones irreducibles sobre $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-2}})$ no equivalentes entre sí.

Una vez que tenemos este conjunto de representaciones, cambiamos los cuerpos, por lo tanto el grupo de Galois, al paso inferior. Es decir, $L = \mathbb{Q}(\xi_{2^{n-2}})$, $K = \mathbb{Q}(\xi_{2^{n-3}})$ y el grupo de Galois ahora es $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-2}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-3}}))$ y encuentra las representaciones irreducibles sobre $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-3}})$ y así sucesivamente hasta $\mathbb{Q}$.

Para ilustrar cómo funciona el Algoritmo 5.5, obtenemos las representaciones irreducibles en los distintos cuerpos intermedios para $Q(2^4)$.

Ejemplo 5.6. *Sea $G = Q(2^4)$ el grupo cuaternio de orden 16. En este caso $n = 4$ y G tiene $3 + 2^{n-2} = 7$ representaciones irreducibles complejas, todas realizables en $L_8 = \mathbb{Q}(\xi_8)$ Como antes, G tiene cuatro representaciones irreducibles de grado 1 definidas sobre $\mathbb{Q}$ que mandan los generadores a (1) y (−1). Las otras representaciones irreducibles están dadas por*

$$\theta_s : x \mapsto \begin{pmatrix} \xi_8^s & 0 \\ 0 & \xi_8^{-s} \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^s & 0 \end{pmatrix}$$

con $s \in \{1, 2, 3\}$.

Para encontrar las representaciones irreducibles sobre $\mathbb{Q}(i)$, ya tenemos las cuatro definidas sobre $\mathbb{Q}$ y la representación que envía x a $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, falta una más, para eso escogemos la representación que envía x a $\begin{pmatrix} \xi_8 & 0 \\ 0 & \xi_8^{-1} \end{pmatrix}$ y ocuparemos el Algoritmo 5.5 con la base $\beta = \{1, \xi_8\}$ entonces con esto la representación está dada por

$$\psi : x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y las representaciones de $\mathbb{Q}$ ya las calculamos anteriormente. Y serán las cuatro representaciones de dimensión uno y dos representaciones más que están dadas por

$$\rho_1 : x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2 : x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agradecimientos

Agradecemos las valiosas observaciones de quienes revisaron nuestro trabajo, ellas mejoraron la presentación. El tercer autor agradece a Luis Arenas-Carmona por fructíferas conversaciones.

Parcialmente financiado por ANID Fondecyt Regular 1230708 y 1230034 (primer y segundo autor, respectivamente). El tercer autor está financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) / ANID Becas / Magíster Nacional 22240434.

Referencias

[1] R. C. Alperin, "An elementary account of Selberg's lemma," *Enseign. Math. (2)*, vol. 33, no. 3-4, pp. 269–273, 1987.

[2] R. Auffarth, S. Reyes-Carocca, y A. M. Rojas, "On the Jacobian variety of the Accola-Maclachlan curve of genus four," in *New tools in mathematical analysis and applications*, ser. Trends Math. Birkhäuser/Springer, Cham, 2025, pp. 3–15, doi: 10.1007/978-3-031-77050-0_1.

[3] A. Behn, R. E. Rodríguez, y A. M. Rojas, "Adapted hyperbolic polygons and symplectic representations for group actions on Riemann surfaces," *J. Pure Appl. Algebra*, vol. 217, no. 3, pp. 409–426, 2013, doi: 10.1016/j.jpaa.2012.06.030.

[4] A. Carocca, S. Recillas, y R. E. Rodríguez, "Dihedral groups acting on Jacobians," in *Complex manifolds and hyperbolic geometry (Guanajuato, 2001)*, ser. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, vol. 311, pp. 41–77, doi: 10.1090/conm/311/05446.

[5] A. Carocca, S. Reyes-Carocca, y R. E. Rodríguez, "Abelian varieties and Riemann surfaces with generalized quaternion group action," *J. Pure Appl. Algebra*, vol. 227, no. 11, 2023, Art. ID 107398, doi: 10.1016/j.jpaa.2023.107398.

[6] C. Curtis e I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, ser. AMS Chelsea Publishing Series. Interscience Publishers, 1966.

[7] H. Lange y S. Recillas, "Abelian varieties with group action," *J. Reine Angew. Math.*, vol. 575, pp. 135–155, 2004, doi: 10.1515/crll.2004.076.

[8] S. Recillas y R. E. Rodríguez, "Jacobians and representations of S_3," in *Workshop on Abelian Varieties and Theta Functions (Spanish) (Morelia, 1996)*, ser. Aportaciones Mat. Investig. Soc. Mat. Mexicana, México, 1998, vol. 13, pp. 117–140.

[9] R. E. Rodríguez y A. M. Rojas, "A fruitful interaction between algebra, geometry, and topology: varieties through the lens of group actions," *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 71, no. 6, pp. 715–723, 2024, doi: 10.1090/noti2950.

[10] J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, vol. 42.