

Parámetros especiales y deformaciones lineales de la familia $(\wp(z))^2 + c$

ADRIÁN ESPARZA-AMADOR^{1,✉} 

¹ *Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Austral de Chile, Valdivia, Chile.*
adrian.esparza@uach.cl[✉]

RESUMEN

En este trabajo, examinamos el espacio de parámetros de una familia de funciones elípticas de orden cuatro. Para el caso de retículas cuadradas, rectangulares y triangulares, determinamos parámetros para los cuales el conjunto de Fatou es vacío, consta de una componente atractora, o bien consta de una componente parabólica.

Palabras clave: Dinámica de funciones meromorfas, conjuntos de Fatou y Julia, aplicaciones quasi-conformes

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 37F10, 33E05, 37F31.

Publicado: 06 de octubre de 2025

Aceptado: 30 de agosto de 2025

Recibido: 31 de octubre de 2024



©2025 Adrián Esparza-Amador. Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

Special parameters and linear deformations of the family $(\wp(z))^2 + c$

ADRIÁN ESPARZA-AMADOR^{1,✉} 

¹ *Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Austral de Chile, Valdivia, Chile.*
adrian.esparza@uach.cl[✉]

ABSTRACT

In this work, we examine the space of parameters of a family of elliptic functions of order four. For the case of square, rectangular, and triangular lattices, we determine parameters for which the Fatou set is empty, consists of an attractive component, or consists of a parabolic component.

Keywords and Phrases: Dynamics of meromorphic functions, Fatou and Julia sets, quasiconformal mappings.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 37F10, 33E05, 37F31.

Published: 06 October, 2025

Accepted: 30 August, 2025

Received: 31 October, 2024



©2025 A. Esparza-Amador. This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

1. Introducción

De la periodicidad de las funciones elípticas, sabemos que el conjunto de valores singulares es un conjunto finito, en otras palabras, toda función elíptica pertenece a la llamada *clase de Speiser* o *clase \mathcal{S}* . De los resultados de Eremenko y Lyubich [5] se sigue que tales funciones exhiben un comportamiento dinámico similar al de las funciones racionales: no existen dominios errantes ni dominios de Baker.

La iteración de funciones elípticas ha sido objeto de estudio en las últimas décadas. Los trabajos [7] y [16] son considerados pioneros en el estudio y ahora existe una vasta literatura sobre el tema, mencionamos los trabajos [6–10, 13–17, 19] como referencias.

La mayoría de los trabajos se enfocan en estudiar funciones elípticas que están directamente relacionadas con la función \wp de Weierstrass asociada a ciertas retículas particulares. Este estudio está orientado en la misma dirección.

En el presente trabajo se estudia la familia paramétrica de funciones elípticas definidas por $F_{\Lambda,c}(z) = (\wp_{\Lambda}(z))^2 + c$, para $c \in \mathbb{C}$, donde \wp_{Λ} denota la función elíptica de Weierstrass (véanse las secciones 2.2 y 2.3). En [13], la familia más general $f_{n,\Lambda,c}(z) = (\wp_{\Lambda}(z))^n + c$ es estudiada, obteniendo valores particulares de parámetros para los cuales el conjunto de Fatou de la función correspondiente es un conjunto vacío. Y en [11] el caso $n = 1$ ha sido estudiado obteniendo resultados similares. Ahora buscamos extender algunos de los resultados obtenidos en [11] de la familia $f_{1,\Lambda,c}(z) = \wp_{\Lambda}(z) + c$ a nuestra familia. Además, utilizando algunos de los resultados en [8] podemos obtener parámetros para los cuales la función correspondiente presenta una dinámica prescrita.

La organización del escrito es la siguiente. En la Sección 2 presentamos los preliminares de la teoría de iteración de funciones meromorfas, los fundamentos de las funciones elípticas y en particular algunas propiedades de la función \wp_{Λ} . La familia $F_{\Lambda,c}$ es definida en la Sección 3 y los primeros resultados son presentados. En la Sección 4 construimos algunos parámetros con dinámica prescrita. Finalmente, en la Sección 5 consideramos deformaciones quasi-conformes simples de funciones elípticas.

2. Teoría preliminar

2.1. Teoría de Fatou y Julia para funciones meromorfas

Denotemos por $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a la esfera de Riemann y sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa trascendente. La iteración de la función f genera una dicotomía en la esfera de Riemann. El *conjunto de Fatou*, denotado por $\mathcal{F}(f)$, está compuesto por los puntos $z \in \mathbb{C}$ para los cuales existe una vecindad en la que la sucesión de iteradas $\{f^n\}_{n \geq 0}$ está bien definida y es normal en el sentido

de Montel. El *conjunto de Julia*, denotado por $\mathcal{J}(f)$, consiste en el complemento del conjunto de Fatou en la esfera de Riemann. Si f posee al menos un polo que no es un valor omitido, el conjunto de Julia está determinado por la siguiente relación

$$\mathcal{J}(f) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\infty)}.$$

Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ es llamado *periódico* si existe un $p \geq 1$ tal que $f^p(z_0) = z_0$. Al mínimo p con esta propiedad, se le llama *periodo* de z_0 y el conjunto $\{z_0, f(z_0), \dots, f^{p-1}(z_0)\}$ es llamado el p -*ciclo* de z_0 . Si $p = 1$, z_0 es un *punto fijo*. El *multiplicador* de un punto p -periódico está dado por la derivada $(f^p)'(z_0)$. El multiplicador proporciona información dinámica local de los ciclos periódicos. Decimos así que un punto p -periódico es *atractor*, *repulsor* o *neutro* si $|(f^p)'(z_0)|$ es menor, mayor o igual a 1, respectivamente. Si $(f^p)'(z_0) = 0$, z_0 es llamado *súper-atractor* y si el multiplicador es una raíz de la unidad, el ciclo es llamado *parabólico*. Es un hecho conocido que el conjunto de puntos periódicos repulsores es denso en el conjunto de Julia.

De la definición, el conjunto de Fatou es abierto en \mathbb{C} . Además, tanto $\mathcal{F}(f)$ como $\mathcal{J}(f)$ son completamente invariantes. Sea $U \subset \mathcal{F}(f)$ una componente conexa. Decimos que U es *pre-periódica* si existen $m > n \geq 0$ tales que $f^m(U) = f^n(U)$. Si $n = 0$, U es una componente *periódica* de periodo $p = m - n$, y si $m = 1$, U es llamada una componente *invariante*. Una componente que no es pre-periódica, es llamada un *dominio errante*. Análogo al caso racional, existe una clasificación de las componentes periódicas de una función meromorfa trascendente, aunque en el contexto trascendente aparece un nuevo tipo de componente periódica de Fatou que no existe para funciones racionales, los llamados *dominios de Baker*. $U \subset \mathcal{F}(f)$ es un dominio de Baker de periodo p , si existe un punto $z_0 \in \partial U$ tal que $f^{np}(z) \rightarrow z_0$ cuando $n \rightarrow \infty$, pero $f^p(z_0)$ no está definido. En particular, si $p = 1$ tenemos que $z_0 = \infty \in \widehat{\mathbb{C}}$.

Denotemos por $\text{Crit}(f)$ al conjunto de puntos críticos de la función f . Además de los valores críticos, en el contexto meromorfo existen otros puntos en \mathbb{C} , en los cuales la rama inversa f^{-1} puede no estar bien definida. Un punto w se denomina un *valor asintótico* para f si existe una trayectoria $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\alpha(t)) = w$. Definimos así el *conjunto singular* de f , denotado por $\text{sing}(f^{-1})$, como el conjunto de valores críticos y valores asintóticos de f . Existe una fuerte relación entre cuencas atractoras o parabólicas y el conjunto singular de f . Si $C = \{U_0, U_1, \dots, U_{p-1}\}$ es un p -ciclo de componentes atractoras o parabólicas, entonces $U_j \cap \text{sing}(f^{-1}) \neq \emptyset$ para algún $0 \leq j < p$. Si C es un ciclo de discos de Siegel o anillos de Herman, entonces $\partial U_j \subset \mathcal{P}(f)$ para todo $0 \leq j < p$, donde $\mathcal{P}(f)$ denota el conjunto *post-singular* el cual está dado por

$$\mathcal{P}(f) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^n(\text{sing}(f^{-1}))}.$$

Una descripción más detallada de los resultados en iteración de funciones meromorfas se puede encontrar en [1, 2] para funciones meromorfas en general y en [7, 8, 10] para funciones elípticas.

2.2. Funciones elípticas

Existen varias formas de definir una función elíptica. En el presente trabajo, consideramos la definición más simple que se basa en una propiedad de periodicidad. Siendo el conjunto de periodos, una retícula en el plano complejo.

Definición 2.1. Una retícula Λ de números complejos, es un subconjunto de \mathbb{C} con dos propiedades:

- i. Λ es un grupo aditivo.
- ii. Las normas de los elementos distintos de cero, están acotadas por abajo, es decir, existe $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, tal que $|\lambda| \geq k$ para todo $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$.

Existen tres tipos de retículas:

- i. Trivial: consiste solo del cero.
- ii. Simple: consiste de todos los múltiplos enteros de un solo elemento generador, que es único salvo el signo.
- iii. Doble: consiste de todas las combinaciones lineales con coeficientes enteros de dos elementos generadores λ_1 y λ_2 , cuya razón es no real. Estos generadores no son únicos; si λ_1 y λ_2 generan Λ , también lo hacen

$$\lambda'_1 = p\lambda_1 + q\lambda_2, \quad \lambda'_2 = r\lambda_1 + s\lambda_2$$

donde p, q, r, s son enteros con $pr - qs = 1$.

Es usual elegir el orden de λ_1 y λ_2 de tal manera que $\text{Im}(\lambda_2/\lambda_1) > 0$. En lo sucesivo, consideraremos retículas de tipo doble con esta propiedad. Así, si Λ es una retícula doble, generado por λ_1 y λ_2 , entonces

$$\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2] = \{m\lambda_1 + n\lambda_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Definición 2.2. Un subconjunto $P \subset \mathbb{C}$ cerrado y conexo es una región fundamental para Λ si para cada $z \in \mathbb{C}$, P contiene al menos un punto en la misma Λ -órbita de z y no existen dos puntos en el interior de P en una misma Λ -órbita. Si P es un paralelogramo, es llamado un paralelogramo periodo para Λ .

Los puntos retícula, son los vértices de un patrón de paralelogramos que llenan todo el plano y cuyos lados pueden ser tomados como cualquier par de generadores.

2.2.1. Formas

Dada una retícula $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$, su apariencia en el plano complejo, está determinada por la razón $\tau = \lambda_2/\lambda_1$ (por convención, elegimos los generadores de tal manera que $\text{Im}(\tau) > 0$). Es usual referirse al tipo de retícula por la forma del paralelogramo periodo correspondiente. Si Λ es una retícula y $k \neq 0$ es un número complejo, $k\Lambda$ denota el subconjunto de valores $k\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Ésta también es una retícula, que es llamada *similar* a Λ ; la similitud es una relación de equivalencia entre retículas y a una clase de equivalencias se le llama la *forma* de la retícula. Como ejemplo, dado que $\lambda_1 \neq 0$, la retícula $\Lambda_\tau = [1, \tau]$ es similar a la retícula $\Lambda = \lambda_1\Lambda_\tau$.

Sin embargo, si los generadores de una retícula arbitraria Λ no son especificados, el valor τ no está determinado de manera única. La acción del *grupo modular clásico* Γ actuando en el semi-plano superior brinda la relación entre las posibles elecciones de τ para una sola forma de retícula. Entonces cada forma de retícula está representada por un solo punto en una región fundamental del grupo Γ . La *región fundamental primitiva* del grupo modular Γ se muestra en la Figura 1 y está definida por

$$B = \left\{ \text{Im}(\tau) > 0, -\frac{1}{2} \leq \text{Re}(\tau) < \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1, \text{ con } |\tau| > 1 \text{ si } \text{Re}(\tau) > 0 \right\}. \quad (2.1)$$

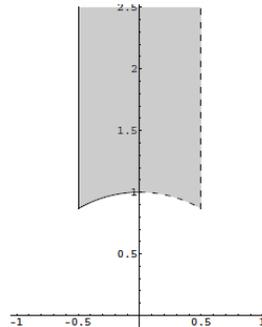


Figura 1: La región fundamental B .

Definición 2.3. Sea $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$ una retícula.

- (1) Λ es rectangular real si los generadores pueden ser elegidos (bajo similitud) como $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_2 \in i\mathbb{R}$.
- (2) Λ es rómbica real si los generadores pueden ser elegidos (bajo similitud) como complejos conjugados, i.e. $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.

(3) Λ es cuadrada si $\Lambda = i\Lambda$.

(4) Λ es triangular si $e^{2\pi i/3}\Lambda = \Lambda$. En este caso el paralelogramo periodo consta de dos triángulos equiláteros.

En cada caso (1)–(3), el paralelogramo periodo con vértices en $0, \lambda_1, \lambda_2$ y $\lambda_1 + \lambda_2$ puede ser elegido como un paralelogramo rectangular, rómbico o cuadrado respectivamente.

Lema 2.4 ([7]). Λ es una retícula triangular si y solo si $\Lambda = [\lambda e^{\pi i/3}, \lambda e^{-\pi i/3}]$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$.

Toda retícula satisface $\Lambda = -\Lambda$, los únicos casos donde $\Lambda = k\Lambda$, con $k \neq \pm 1$, son las retículas cuadradas ($\Lambda = i\Lambda$) y las retículas triangulares ($\Lambda = \omega\Lambda$, donde $\omega^3 = 1$).

Definición 2.5. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ una función meromorfa. Decimos que f es una función elíptica si f es periódica con respecto a una retícula Λ . Equivalentemente, f es periódica de periodo Λ si $f(z + \lambda) = f(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $\lambda \in \Lambda$.

2.3. La función \wp de Weierstrass

Nos referimos a [4, 7, 8] para mayor información sobre resultados y propiedades de la función \wp de Weierstrass.

Dada una retícula Λ arbitraria, el ejemplo típico de una función elíptica con respecto a Λ es la función \wp de Weierstrass, definida por

$$\wp_{\Lambda}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right).$$

\wp es una función elíptica par con polos de orden 2. Además, la derivada \wp' es una función elíptica impar de orden 3, periódica con respecto a Λ . Ambas funciones están relacionadas por la ecuación diferencial

$$(\wp'_{\Lambda}(z))^2 = 4(\wp_{\Lambda}(z))^3 - g_2\wp_{\Lambda}(z) - g_3, \tag{2.2}$$

donde $g_2(\Lambda) = 60 \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \lambda^{-4}$ y $g_3(\Lambda) = 140 \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \lambda^{-6}$. Si $g_2(\Lambda) = g_2(\Lambda')$ y $g_3(\Lambda) = g_3(\Lambda')$ para retículas Λ y Λ' , entonces $\Lambda = \Lambda'$. Por lo que $g_2(\Lambda)$ y $g_3(\Lambda)$ son llamados invariantes de la retícula Λ . Además, si $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ son tales que $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$, entonces existe una retícula Λ con $g_2 = g_2(\Lambda)$ y $g_3 = g_3(\Lambda)$ como sus invariantes. Para $\Lambda_{\tau} = [1, \tau]$, las funciones $g_i(\tau) = g_i(\Lambda_{\tau})$ son funciones de τ analíticas en el semi-plano superior $\text{Im}(\tau) > 0$.

Los invariantes g_2 y g_3 cumplen la siguiente propiedad de homogeneidad con respecto a retículas similares.

Lema 2.6 ([8]). *Para retículas Λ y Λ' , tenemos que $\Lambda' = k\Lambda$, para algún $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ si y solo si*

$$g_2(\Lambda') = k^{-4}g_2(\Lambda) \quad y \quad g_3(\Lambda') = k^{-6}g_3(\Lambda).$$

Una retícula Λ es llamada *real* si $\Lambda = \bar{\Lambda} := \{\bar{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$. Aquí, \bar{z} denota el conjugado complejo de $z \in \mathbb{C}$. Tenemos la siguiente caracterización para retículas reales.

Proposición 2.7 ([12]). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. Λ es un retícula real;
2. $\wp_\Lambda(\bar{z}) = \overline{\wp_\Lambda(z)}$;
3. $g_2, g_3 \in \mathbb{R}$.

Sean Λ y $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, al sustituir k en la definición correspondiente de las funciones \wp_Λ y $\wp_{k\Lambda}$ se obtiene la siguiente propiedad de homogeneidad

$$\wp_{k\Lambda}(kz) = \frac{1}{k^2}\wp_\Lambda(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (2.3)$$

Observación 2.8. *Mencionamos un par de propiedades adicionales que relacionan los puntos críticos, los valores críticos y los invariantes de una función de Weierstrass para una retícula Λ fija.*

1. *Para toda retícula $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$, \wp_Λ tiene una infinidad de puntos críticos simples, uno en cada punto medio de la retícula. Denotamos este conjunto por $\text{Crit}(\wp_\Lambda) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} + \Lambda$, donde*

$$\omega_1 = \frac{\lambda_1}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\lambda_2}{2} \quad y \quad \omega_3 = \omega_1 + \omega_2.$$

2. *Sabemos que \wp_Λ no contiene valores asintóticos finitos, por lo que el conjunto singular de la función \wp_Λ está dado por los valores críticos $w = \wp_\Lambda(c)$, $c \in \text{Crit}(\wp_\Lambda)$. De la periodicidad de \wp_Λ , el conjunto singular es finito y consta de los valores:*

$$e_1 = \wp_\Lambda(\omega_1), \quad e_2 = \wp_\Lambda(\omega_2) \quad y \quad e_3 = \wp_\Lambda(\omega_3). \quad (2.4)$$

3. *Dado que los e_i son soluciones distintas a la ecuación (2.2), al factorizar e igualar, obtenemos las siguientes relaciones:*

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_3 + e_1e_2 + e_2e_3 = -\frac{g_2}{4}, \quad e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}. \quad (2.5)$$

2.4. $\wp_\Lambda(z)$ y retículas triangulares

Los siguientes resultados relacionan las formas de las retículas con los valores críticos de \wp_Λ , véase [4, 7]. Sea $p(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$ el polinomio asociado a Λ por (2.2) y defínase $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ como su discriminante.

Proposición 2.9 ([4]). *Sea Λ una retícula real.*

- Si Λ es cuadrada, $g_3 = 0$ y las raíces de p son $0, \pm\sqrt{g_2}/2$. Así $e_1 = \sqrt{g_2}/2$ y $e_2 = -e_1$.
- Si Λ es triangular, $g_2 = 0$ y las raíces de p son las raíces cúbicas de $g_3/4$ siendo todas distintas de cero. Entonces e_1, e_2, e_3 tienen el mismo módulo y $e_i \in \mathbb{R}$ para algún $i = 1, 2, 3$ si y solo si $g_3 \in \mathbb{R}$.

La simetría de las retículas está reflejada en el comportamiento del conjunto post-crítico.

Proposición 2.10 ([7]). *Sea Λ una retícula real.*

- Si Λ es cuadrada, $\mathcal{P}(\wp_\Lambda)$ incluye al punto al infinito y $e_3 \in \mathcal{J}(\wp_\Lambda)$. De hecho, $\mathcal{P}(\wp_\Lambda) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} \wp_\Lambda^n(e_1) \cup \{e_2, 0, \infty\}}$. Por lo que dicho conjunto está determinado por la órbita de e_1 .
- $\mathcal{P}(\wp_\Lambda)$ está contenido en tres conjuntos positivamente invariantes: el conjunto $\alpha = \overline{\bigcup_{n \geq 0} \wp_\Lambda^n(e_1)}$, y los conjuntos $e^{2\pi i/3}\alpha$ y $e^{4\pi i/3}\alpha$. (Estos conjuntos no son necesariamente disjuntos.)

2.5. El conjunto de Fatou

Los siguientes resultados clasifican todas las posibilidades del conjunto de Fatou para la función de Weierstrass con retículas triangulares y cuadradas, respectivamente.

Proposición 2.11 ([8]). *Para toda retícula triangular $\Lambda = [\lambda, e^{2\pi i/3}\lambda]$, uno de los siguientes casos debe ocurrir:*

1. $\mathcal{J}(\wp_\Lambda) = \widehat{\mathbb{C}}$.
2. Para algún periodo p y algún multiplicador μ , $0 \leq \mu \leq 1$ existen exactamente tres ciclos periódicos (super)atractores o parabólicos en el conjunto de Fatou de periodo p y multiplicador μ .
3. Existe exactamente un ciclo periódico (super)atractor o parabólico en el conjunto de Fatou que contiene los tres valores críticos.
4. Los únicos ciclos de Fatou son discos de Siegel.

Proposición 2.12. *Para una retícula cuadrada Λ , uno de los siguientes casos ocurre:*

1. $\mathcal{J}(\wp_\Lambda) = \widehat{\mathbb{C}}$.
2. *Existe exactamente un ciclo periódico (súper)atractor o parabólico del conjunto de Fatou.*
3. *Los únicos ciclos periódicos de Fatou son discos de Siegel.*

La siguiente definición será utilizada al estudiar las familias paramétricas $\wp_\Lambda^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$ y Λ una retícula.

Definición 2.13. *Dos funciones elípticas $f = f_\Lambda$ y $g = g_{\Lambda'}$ sobre retículas Λ y Λ' respectivamente, son conformemente conjugadas si existe una aplicación $\phi(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha \neq 0$ tal que $f \circ \phi = \phi \circ g$.*

3. La familia $F_{\Lambda,c}(z) = (\wp_\Lambda(z))^2 + c$

En este trabajo buscamos extender algunos de los resultados obtenidos en [8] y [11] para la familia $F_{\Lambda,c}$, definida por

$$F_{\Lambda,c}(z) = (\wp_\Lambda(z))^2 + c, \quad (3.1)$$

donde $c \in \mathbb{C}$ y Λ es una retícula real. Dado que $F'_{\Lambda,c} = 2\wp_\Lambda \cdot \wp'_\Lambda$, se cumple

$$\text{Crit}(F_{\Lambda,c}) = \text{Crit}(\wp_\Lambda) \cup \{\wp_\Lambda^{-1}(0)\}.$$

y los valores críticos están dados por $v_1 = e_1^2 + c$, $v_2 = e_2^2 + c$, $v_3 = e_3^2 + c$ y $v_4 = c$. De las relaciones en (2.5), tenemos la siguiente relación

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 4c + \frac{g_2(\Lambda)}{2}. \quad (3.2)$$

Para cada retícula fija Λ , decimos que la familia holomorfa de aplicaciones meromorfas $F_{\Lambda,c}$, parametrizada sobre $c \in \mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ es *reducida* si para todo $c \neq c'$ en \mathcal{A} , $F_{\Lambda,c}$ y $F_{\Lambda,c'}$ no son conformemente conjugadas. Siguiendo las ideas en [11], probamos que es suficiente restringirse a un paralelogramo periodo P como una familia reducida.

Proposición 3.1. *Dada una retícula Λ si $F_{\Lambda,c}(z) = (\wp_\Lambda(z))^2 + c$, entonces para todo $\lambda \in \Lambda$, $F_{\Lambda,c}$ es conformemente conjugada a $F_{\Lambda,c+\lambda}$.*

Demostración. Un cálculo directo muestra que $\varphi(z) = z - \lambda$ es una conjugación conforme entre $F_{\Lambda,c}$ y $F_{\Lambda,c+\lambda}$. □

La siguiente identidad, probada en [7], será útil en el resto de esta sección.

Teorema 3.2. *Sea Λ una retícula arbitraria y $u \in \mathbb{C}$. Para cada $i = 1, 2, 3$, tenemos*

$$\wp_{\Lambda}(u \pm \omega_i) = \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{\wp_{\Lambda}(u) - e_i} + e_i. \tag{3.3}$$

A continuación mostramos algunos resultados análogos a [11, Sección 3]. Nos restringimos a un paralelogramo periodo P .

Teorema 3.3. *Sea Λ una retícula. Si c y c' pertenecen al interior de un paralelogramo periodo P para Λ , entonces $F_{\Lambda,c}$ y $F_{\Lambda,c'}$ no pueden ser conformemente conjugados.*

Demostración. Para simplificar la demostración, omitiremos Λ de la notación. Supongamos que $(F_c \circ \varphi)(z) = (\varphi \circ F_{c'})(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Dado que la conjugación debe fijar el punto al infinito, tenemos que $\varphi(z) = Az + B$, para algunos $A, B \in \mathbb{C}$ con $A \neq 0$. Por otro lado, dado que 0 es un polo de ambas funciones elípticas, $\varphi(0) = B$ debe ser un polo de F_c , por lo que $B = \lambda_0 \in \Lambda$. Además, φ debe enviar polos en polos de manera inyectiva, así que $\Lambda = \varphi(\Lambda) = A\Lambda + \lambda_0$, lo que implica que $A\Lambda = \Lambda - \lambda_0 = \Lambda$. Análogamente, para φ^{-1} , tenemos que $A^{-1}\Lambda = \Lambda$. Por lo que $A^k\Lambda = \Lambda$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, lo que implica que $|A| = 1$ y $A = e^{2\pi i/p}$ para algún $p \in \mathbb{N}$. Entonces $e^{2\pi i/p}\Lambda = \Lambda$. De los resultados en [18], tenemos que si $e^{2\pi i/p} = A \neq 1$ entonces $p = 2, 3, 4$ o 6 .

Ahora bien, dado que φ envía los valores críticos de $F_{c'}$ en los valores críticos de F_c , tenemos

$$c = \varphi(c') = Ac' + \lambda_0. \tag{3.4}$$

Calculando las composiciones en la conjugación, tenemos por un lado

$$F_{\Lambda,c}(\varphi(z)) = (\wp_{\Lambda}(Az + B))^2 + c = (\wp_{\Lambda}(Az))^2 + Ac' + \lambda_0$$

y

$$\varphi(F_{\Lambda,c'}(z)) = A(\wp_{\Lambda}(z))^2 + Ac' + \lambda_0,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Igualando ambas composiciones y usando la homogeneidad tenemos

$$A(\wp_{\Lambda}(z))^2 = (\wp_{\Lambda}(Az))^2 = \frac{1}{A^4}(\wp_{\Lambda}(z))^2.$$

Lo que implica que $A^5 = 1$, *i.e.*, $A = e^{2\pi i/p}$ con $p = 5$, lo que contradice las opciones de p . Se sigue que $A = 1$. Finalmente, $B = \lambda_0 = 0$ ya que c y c' están en el interior de un paralelogramo periodo. Por lo que $\varphi = \text{Id}$, contradiciendo la conjugación. Con esto concluimos la demostración del resultado. □

Proposición 3.4. *Dada una retícula arbitraria Λ , $z \in \mathbb{C}$ y cualquier punto $\omega \in \text{Crit}(\wp_\Lambda)$, entonces tenemos que $\omega + z \in \mathcal{J}(F_{\Lambda,c})$ si y solo si $\omega - z \in \mathcal{J}(F_{\Lambda,c})$.*

Demostración. Del Teorema 3.2 y $\text{Crit}(F_{\Lambda,c}) = \text{Crit}(\wp_\Lambda) \cup \{\wp_\Lambda^{-1}(0)\}$, se sigue que

$$F_{\Lambda,c}(\omega + z) = (\wp_\Lambda(\omega + z))^2 + c = (\wp_\Lambda(\omega - z))^2 + c = F_{\Lambda,c}(\omega - z). \quad \square$$

Lema 3.5. *Si Λ es una retícula real y $c \in \mathbb{C}$ es algún parámetro fijo, entonces $F_{\Lambda,c}$ es anti-conformemente conjugado a $F_{\Lambda,\bar{c}}$.*

Demostración. Un cálculo directo muestra que $\eta(z) = \bar{z}$ es una conjugación. □

4. Parámetros con dinámicas predeterminadas

En la presente sección, mostraremos valores de parámetros específicos en la familia $F_{\Lambda,c}$ para los cuales se cumplen algunos de los casos en las proposiciones 2.11 y 2.12.

Proposición 4.1. *Sea Λ' una retícula real tal que $\lambda'/2$ es el punto crítico real positivo más pequeño y e_r es el valor crítico real más grande. Si m es cualquier entero impar y $k = \sqrt[3]{2e_r/(m\lambda')}$ (tomando la raíz real), entonces para*

$$\Lambda = k\Lambda' \quad \text{y} \quad c = \frac{mk\lambda'}{2} \left(1 - \frac{mk\lambda'}{2}\right),$$

la función $F_{\Lambda,c}$ tiene un punto fijo súper-atractor $z_0 = \frac{mk\lambda'}{2}$.

Demostración. Del Lema 7.2 en [8], sabemos que z_0 es un punto fijo súper-atractor para \wp_Λ . Luego,

$$F_{\Lambda,c}(z_0) = (\wp_\Lambda(z_0))^2 + \frac{mk\lambda'}{2} \left(1 - \frac{mk\lambda'}{2}\right) = \frac{mk\lambda'}{2}.$$

Dado que $F'_{\Lambda,c} = 2\wp_\Lambda \cdot \wp'_\Lambda$, se sigue que $F'_{\Lambda,c}(z_0) = 0$, lo que demuestra la proposición. □

Consideramos la siguiente normalización para retículas triangulares.

Definición 4.2. *Denotamos por $\Lambda = [\lambda, e^{2\pi i/3}\lambda]$, con $\lambda > 0$, a la retícula con invariantes $g_2 = 0$ y $g_3 = 4$. Λ es llamada la retícula triangular estándar.*

Teorema 4.3 ([8, Teorema 8.3]). *Sea Λ la retícula triangular estándar. Para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, si*

$$k = \left(\frac{1}{(\lambda/2) + m\lambda + n\lambda e^{2\pi i/3}} \right)^{1/3},$$

entonces $\Omega = k\Lambda$ tiene exactamente tres puntos fijos súper-atractores. Estos parámetros se localizan en $g_3(\Omega) = 4(\lambda/2 + m\lambda + n\lambda e^{2\pi i/3})^2$.

Denotamos por c_0 a uno de los puntos fijos súper-atractores del teorema anterior.

Proposición 4.4. Sean Λ , k y Ω como en el Teorema 4.3 y sea c_0 uno de los puntos fijos súper-atractores de la función de \wp_Ω . Entonces la función

$$F_{\Omega,c_0}(z) = (\wp_\Omega(z))^2 + c_0(1 - c_0),$$

tiene un punto fijo súper-atractor en $z = c_0$.

Demostración. Por el Teorema 4.3, tenemos que $\wp_\Omega(c_0) = c_0$ con $\wp'_\Omega(c_0) = 0$. Así, sustituyendo en la forma de F_{Ω,c_0} tenemos

$$F_{\Omega,c_0}(c_0) = c_0^2 + c_0(1 - c_0) = c_0, \quad \text{y} \quad F'_{\Omega,c_0}(c_0) = 0.$$

□

Finalmente, mostramos parámetros en el caso de retículas cuadradas con puntos súper-atractores.

Definición 4.5. Denotamos por $\Lambda = [\lambda, i\lambda]$, con $\lambda > 0$, a la retícula con invariantes $g_2 = 4$ y $g_3 = 0$. Λ es llamada la retícula cuadrada estándar.

Teorema 4.6 ([8], Teorema 9.3). Sea Λ la retícula cuadrada estándar. Si

$$k = \left(\frac{1}{(\lambda/2) + m\lambda + n\lambda i} \right)^{1/3},$$

(tomando cualquier raíz compleja), si $\Omega = k\Lambda$ entonces \wp_Ω tiene un punto fijo súper atractor. Estos parámetros están localizados en $g_2(\Omega) = 4(\lambda/2 + m\lambda + ni\lambda)^{4/3}$.

Proposición 4.7. Sean Λ , k y Ω como en el Teorema 4.6. Denotemos por c_0 al punto fijo súper-atractor de \wp_Ω . Entonces la función

$$F_{\Omega,c_0}(z) = (\wp_\Omega(z))^2 + c_0(1 - c_0),$$

tiene un punto fijo súper-atractor en c_0 .

Demostración. El resultado se sigue al sustituir c_0 en F_{Ω,c_0} y su derivada.

□

5. Deformaciones lineales

Finalmente, en esta sección mostramos que es posible obtener funciones elípticas de orden 4 con dinámica prescrita análogas a aquellas descritas en la sección anterior, por medio de deformaciones *quasi-conformes* lineales.

5.1. Campo de funciones elípticas para una retícula dada

Fijemos una retícula Λ arbitraria. Es conocido que el conjunto de funciones meromorfas constituye un *campo* (anillo con división conmutativo).

Por un lado, un cálculo directo muestra que la suma, la resta y el producto de cualesquiera dos funciones elípticas con periodos Λ , así como el recíproco de cualquier función elíptica no cero, son de nuevo funciones elípticas con respecto a Λ . Por otro lado, como subconjunto del campo de funciones meromorfas, la suma y la multiplicación están sujetas a las leyes usuales (conmutatividad, asociatividad y distributividad). En consecuencia, el subconjunto de funciones elípticas con respecto a Λ constituye un (sub)campo, el cual se denota por:

$$\mathcal{E}(\Lambda) := \{f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} : f \text{ es elíptica de periodo } \Lambda\}.$$

5.2. Aplicaciones quasiconformes

Dado que nos interesa solo el caso en que las transformaciones a conjugar sean de tipo lineal, daremos una descripción de las aplicaciones quasi-conformes solo de este tipo. Véase [3].

Consideremos a $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ como el plano cartesiano visto como \mathbb{R} -espacio vectorial. Toda aplicación \mathbb{R} -lineal $L : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ puede ser escrita usando coordenadas (z, \bar{z}) , en la forma

$$L(z) = az + b\bar{z}, \quad a, b, z \in \mathbb{C}.$$

Nos restringimos a aplicaciones \mathbb{R} -lineales que son invertibles y preservan orientación, *i.e.*, $|a| > |b|$.

Definimos el *coeficiente de Beltrami* de L como $\mu(L) = \frac{b}{a}$ y denotamos por $\theta \in \mathbb{R}/(\pi\mathbb{Z})$ el argumento medio de $\mu(L)$, tenemos así

$$\mu(L) := \left| \frac{b}{a} \right| e^{2\theta i}.$$

Nótese que $\mu(L) \in \mathbb{D}$ cuando L preserva orientación y que L es holomorfa si y solo si $b = 0$ si y solo si $\mu(L) = 0$.

Definimos la *dilatación* $K(L)$ de L por

$$K(L) := \frac{1 + |\mu|}{1 - |\mu|} = \frac{|a| + |b|}{|a| - |b|},$$

y la *dilatación compleja* de L como el coeficiente de Beltrami $\mu(L)$.

Siguiendo las definiciones en [3], tenemos entonces que L es una aplicación (lineal) *quasi-conforme* sobre el plano complejo. Además, es un hecho conocido en la literatura de aplicaciones quasi-conformes que si ϕ es quasi-conforme y f es una función holomorfa, entonces

$$g = \phi \circ f \circ \phi^{-1},$$

es una función holomorfa en los dominios de definición correspondientes.

5.3. Conjugación

A lo largo de esta última sección, para λ en el semi-plano superior \mathbb{H} , denotamos por $\Lambda := [1, \lambda]$. Ahora bien, sea $f \in \mathcal{E}(\Lambda)$, y para $\mu \in \mathbb{D}$ tomamos $\phi \in QC(\widehat{\mathbb{C}})$, dado por

$$\phi(z) = \frac{z + \mu\bar{z}}{1 + \mu}.$$

Tenemos así que ϕ fija 0, 1 e ∞ . Estamos interesados en estudiar el conjunto de funciones

$$g(z) = (\phi \circ f \circ \phi^{-1})(z), \quad f \in \mathcal{E}(\Lambda).$$

En particular, nos interesa dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Es $\phi(\Lambda) = \Lambda'$ una retícula?
- En caso afirmativo, ¿ $g \in \mathcal{E}(\Lambda')$?
- ¿Qué propiedades tiene g con respecto a f como función elíptica?

Lema 5.1. *Sea $\Lambda = [1, \tau]$, con $\tau \in \mathbb{H}$, una retícula. Entonces $\phi(\Lambda) = \Lambda'$ es una retícula con $\Lambda' = [1, \tau'] = \phi(\tau)$.*

Demostración. Para verificar que Λ' es efectivamente una retícula, debemos probar que las dos propiedades se cumplen.

- i. Λ' es un grupo aditivo.
- ii. $\exists k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ tal que $|\lambda| \geq k$ para todo $\lambda \in \Lambda' - \{0\}$.

Dado $\Lambda = [1, \tau]$, definimos $\lambda_1 = \phi(1) = 1$ y $\lambda_2 = \phi(\tau) = \frac{\tau + \mu\bar{\tau}}{1 + \mu}$. Así, dada la linealidad de ϕ , vemos que

$$\Lambda' = [1, \tau'] = \{n + m\tau' : n, m \in \mathbb{Z}, \tau' = \phi(\tau)\}.$$

Lo que prueba que Λ' es de hecho un grupo aditivo.

Sea $h(n, m) = |\lambda|^2 = (n - \tau_y m)^2 + m^2 \tau_x^2$, donde $\tau' = \tau_x + i\tau_y$. Calculando los puntos críticos, vemos que (n_0, m_0) es punto crítico, si y solo si $n_0 = m_0 = 0$, lo que implica que $\lambda \equiv 0$, o bien, $n_0 = m_0 \tau_x$. Permitiendo solo que $n, m \in \mathbb{Z}$, vemos que $h(n, m)$ tiene un mínimo con respecto a \mathbb{Z} , lo que implica que Λ' tiene un mínimo distinto de cero. Se sigue que Λ' es efectivamente una retícula.

Veamos ahora que $\phi(\Lambda)$ es de hecho una retícula doble. Para ello, no es difícil ver que, para que Λ' sea una retícula simple, basta que $\tau' \in \mathbb{R}$. Si este fuera el caso, tendríamos que:

$$r = \frac{\tau + \mu\bar{\tau}}{1 + \mu}, \quad \phi(\tau) = r \in \mathbb{R},$$

despejando μ tenemos

$$\mu = \frac{\tau - r}{r - \bar{\tau}},$$

lo que implica que

$$|\mu| = \left| \frac{\tau - r}{r - \bar{\tau}} \right| = 1,$$

lo que contradice la elección de μ . Luego Λ' es una retícula doble.

Veamos que $\phi(\tau) = \tau' \in \mathbb{H}$. Sabemos que $\text{Im}(\tau') = \frac{1}{2i}(\tau' - \bar{\tau}')$, entonces

$$\begin{aligned} \tau' - \bar{\tau}' &= \frac{\tau + \mu\bar{\tau}}{1 + \mu} - \overline{\left(\frac{\tau + \mu\bar{\tau}}{1 + \mu} \right)} = \frac{(\tau + \mu\bar{\tau})(1 + \bar{\mu}) - (\bar{\tau} + \bar{\mu}\tau)(1 + \mu)}{|1 + \mu|^2} \\ &= \frac{\tau + \bar{\mu}\tau + \mu\bar{\tau} + |\mu|^2\bar{\tau} - (\bar{\tau} + \bar{\tau}\mu + \bar{\mu}\tau + |\mu|^2\tau)}{|1 + \mu|^2} = \frac{(1 - |\mu|^2)(\tau - \bar{\tau})}{|1 + \mu|^2} \\ 2i\text{Im}(\tau') &= \frac{1 - |\mu|^2}{|1 + \mu|^2} 2i \text{Im}(\tau) \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \text{Im}(\tau') = \frac{1}{2i}(\tau' - \bar{\tau}') = \frac{1 - |\mu|^2}{|1 + \mu|^2} \text{Im}(\tau) > 0. \quad \square$$

Lema 5.2. Sean $\Lambda = [1, \tau]$ y $f \in \mathcal{E}(\Lambda)$. Si

$$g(z) = (\phi \circ f \circ \phi^{-1})(z),$$

entonces $g \in \mathcal{E}(\Lambda')$, con $\tau' = \phi(\tau)$.

Demostración. Tenemos que ϕ es una aplicación lineal, por lo que su inverso, ϕ^{-1} , debe también ser una aplicación lineal. Así, calculando la composición:

$$\begin{aligned} g(z + 1) &= (\phi \circ f \circ \phi^{-1})(z + 1) = (\phi \circ f)(\phi^{-1}(z) + \phi^{-1}(1)) = (\phi \circ f)(\phi^{-1}(z) + 1) \\ &= \phi(f(\phi^{-1}(z))) = (\phi \circ f \circ \phi^{-1})(z) = g(z). \end{aligned}$$

De igual forma

$$\begin{aligned} g(z + \tau') &= (\phi \circ f \circ \phi^{-1})(z + \tau') = (\phi \circ f)(\phi^{-1}(z) + \phi^{-1}(\tau')) = (\phi \circ f)(\phi^{-1}(z) + \tau) \\ &= (\phi \circ f)(\phi^{-1}(z)) = \phi(f(\phi^{-1}(z))) = g(z). \end{aligned}$$

Por lo que g es periódica con respecto a Λ' . □

5.4. Propiedades de la retícula $\phi(\Lambda) = \Lambda'$ via ϕ

Antes de considerar las propiedades que tiene g como función elíptica, analizaremos qué propiedades tiene Λ' como imagen bajo ϕ de la retícula Λ . Dado que $\Lambda' = [1, \tau']$, basta analizar las propiedades de τ' , con

$$\tau' = \frac{\tau + \mu\bar{\tau}}{1 + \mu}.$$

Tenemos así la aplicación

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{D} \times B &\rightarrow \mathbb{H} \\ (\mu, \tau) &\mapsto \frac{\tau + \mu\bar{\tau}}{1 + \mu}. \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos en principio, una aplicación de dos variables complejas, difícil de visualizar geoméricamente. Una forma de reducir el problema, es analizar la manera en que cambia una retícula dada bajo una pequeña perturbación con respecto al origen del disco unitario \mathbb{D} . Por lo que, fijando una retícula $\Lambda_0 = [1, \tau_0]$, restringimos nuestra aplicación

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{D} \times \{\tau_0\} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (\mu, \tau_0) &\mapsto \frac{\tau_0 + \mu\bar{\tau}_0}{1 + \mu}. \end{aligned}$$

Análogamente, despejando μ de nuestra aplicación original $\tau' = \frac{\tau + \mu\bar{\tau}}{1 + \mu}$, podemos obtener el *parámetro de la deformación* entre dos retículas, representadas por τ y τ' , dado por

$$\mu = -\frac{\tau' - \tau}{\tau' - \bar{\tau}}.$$

De nuevo, tenemos una aplicación de dos variables complejas. Considerando la misma restricción anterior, podemos fijar un *punto base* τ_0 , obteniendo así

$$\mu_{\tau_0} = \mu_{\tau_0}(\tau') = \frac{\tau_0 - \tau'}{\tau' - \overline{\tau_0}}.$$

Nótese que $\mu_{\tau_0}(\tau') \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ y que esta aplicación lleva el eje real en el círculo unitario, ya que si $r \in \mathbb{R}$, entonces

$$|\mu_{\tau_0}(r)| = \left| \frac{\tau_0 - r}{r - \overline{\tau_0}} \right| = 1$$

y como $\mu_{\tau_0}(\tau_0) = 0$, entonces la aplicación es un isomorfismo conforme entre el semi-plano superior \mathbb{H} y el disco unitario \mathbb{D} .

De esta manera, dados dos puntos $\tau_0, \tau' \in \mathbb{H}$, es posible encontrar una trayectoria en \mathbb{D} (que parte del origen) que genera una trayectoria que conecta a τ_0 con τ' .

Si traducimos esto a nuestro objeto de estudio, las funciones elípticas, dada $f \in \mathcal{E}(\Lambda_0)$ y una trayectoria $t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{D}$ con $\gamma(0) = 0$, entonces, para cada $\mu_t = \gamma(t)$, la expresión

$$g_t(z) = (\phi_{\mu_t} \circ f \circ \phi_{\mu_t}^{-1})(z), \quad \text{con} \quad \phi_{\mu_t}(z) = \frac{z + \mu_t \bar{z}}{1 + \mu_t},$$

representa una familia de funciones elípticas, que son deformaciones quasi-conformes de la función f , y además cada $g_t \in \mathcal{E}(\Lambda_t)$.

5.5. El caso $f = \wp$

Sean $\Lambda = [1, \tau]$ una retícula y $f = \wp_\Lambda$ la función de Weierstrass asociada. Queremos analizar el conjunto

$$\mathcal{G}_\wp = \left\{ g = \phi \circ \wp_\Lambda \circ \phi^{-1} : \phi \in \text{QC}_K(\widehat{\mathbb{C}}) \text{ de tipo lineal} \right\}$$

donde cada ϕ es normalizada de tal forma que fija 0, 1 e ∞ .

Dado que ϕ es un homeomorfismo que fija 0 e ∞ , es claro que los ceros y polos de g son las imágenes de los ceros y polos (respectivamente) de \wp_Λ bajo ϕ . Y además, el orden se preserva. Por lo que g es también de orden 2. También, se puede probar que g es una función par:

$$\begin{aligned} g(-z) &= (\phi \circ f \circ \phi^{-1})(-z) = (\phi \circ f)(-\phi^{-1}(z)) \\ &= (\phi \circ f)(\phi^{-1}(z)) = \phi(f(\phi^{-1}(z))) = g(z). \end{aligned}$$



Figura 2: Se muestran los planos dinámicos con base en los parámetros de la Proposición 4.1. IZQUIERDA: El plano dinámico de la función \wp_Λ . CENTRO: El plano dinámico de la función $\wp_\Lambda^2 + c$. DERECHA: Plano dinámico de la conjugación $g = \phi \circ \wp_\Lambda \circ \phi^{-1}$, con ϕ quasi-conforme.

Por otro lado, sabemos que los polos de \wp_Λ son justamente los puntos de la retícula Λ . Por lo que, los polos de g son los puntos de la retícula $\Lambda' = \phi(\Lambda)$. Ahora bien, sea w_0 un cero de \wp_Λ y $z_0 = \phi(w_0)$, tenemos

$$(\phi \circ \wp_\Lambda \circ \phi^{-1})(z_0) = (\phi \circ \wp_\Lambda)(w_0) = \phi(0) = 0,$$

es decir, si $\Pi(\wp_\Lambda) = \{\wp_\Lambda^{-1}(0)\}$ denota el conjunto de ceros de la función \wp_Λ , entonces $\phi(\Pi(\Lambda))$ es el conjunto de ceros de la función g . No es difícil ver que la implicación es en las dos direcciones.

De esta manera, dada una retícula arbitraria Λ' (no necesariamente real, ni rectangular, ni cuadrada), podemos encontrar una función elíptica $g \in \mathcal{E}(\Lambda')$ con la dinámica prescrita en cada uno de los resultados de la sección anterior.

La Figura 2 muestra los tres casos asociados a la Proposición 4.1.

Referencias

- [1] I. N. Baker, J. Kotus, y L. Yinian, “Iterates of meromorphic functions. I,” *Ergodic Theory Dynam. Systems*, vol. 11, no. 2, pp. 241–248, 1991, doi: 10.1017/S014338570000612X.
- [2] W. Bergweiler, “Iteration of meromorphic functions,” *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, vol. 29, no. 2, pp. 151–188, 1993, doi: 10.1090/S0273-0979-1993-00432-4.
- [3] B. Branner y N. Fagella, *Quasiconformal surgery in holomorphic dynamics*, ser. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2014, vol. 141.
- [4] P. Du Val, *Elliptic functions and elliptic curves*, ser. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, London-New York, 1973, vol. No. 9.
- [5] A. E. Erëmenko y M. Y. Lyubich, “Dynamical properties of some classes of entire functions,” *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, vol. 42, no. 4, pp. 989–1020, 1992, doi: 10.5802/aif.1318.
- [6] J. Hawkins, “Smooth Julia sets of elliptic functions for square rhombic lattices,” 2006, vol. 30, no. 1, pp. 265–278, spring Topology and Dynamical Systems Conference.
- [7] J. Hawkins y L. Koss, “Ergodic properties and Julia sets of Weierstrass elliptic functions,” *Monatsh. Math.*, vol. 137, no. 4, pp. 273–300, 2002, doi: 10.1007/s00605-002-0504-1.
- [8] J. Hawkins y L. Koss, “Parametrized dynamics of the Weierstrass elliptic function,” *Conform. Geom. Dyn.*, vol. 8, pp. 1–35, 2004, doi: 10.1090/S1088-4173-04-00103-1.
- [9] J. Hawkins y L. Koss, “Connectivity properties of Julia sets of Weierstrass elliptic functions,” *Topology Appl.*, vol. 152, no. 1-2, pp. 107–137, 2005, doi: 10.1016/j.topol.2004.08.018.
- [10] J. Hawkins, L. Koss, y J. Kotus, “Elliptic functions with critical orbits approaching infinity,” *J. Difference Equ. Appl.*, vol. 16, no. 5-6, pp. 613–630, 2010, doi: 10.1080/10236190903203895.
- [11] J. Hawkins y M. Moreno Rocha, “Dynamics and Julia set of iterated elliptic functions,” *New York J. Math.*, vol. 24, pp. 947–979, 2018.
- [12] G. A. Jones y D. Singerman, *Complex functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987, doi: 10.1017/CBO9781139171915.
- [13] L. Koss, “Examples of parametrized families of elliptic functions with empty Fatou sets,” *New York J. Math.*, vol. 20, pp. 607–625, 2014.
- [14] L. Koss y K. Roy, “Dynamics of vertical real rhombic Weierstrass elliptic functions,” *Involve*, vol. 10, no. 3, pp. 361–378, 2017, doi: 10.2140/involve.2017.10.361.
- [15] J. Kotus, “Elliptic functions with critical points eventually mapped onto infinity,” *Monatsh. Math.*, vol. 149, no. 2, pp. 103–117, 2006, doi: 10.1007/s00605-005-0373-5.

-
- [16] J. Kotus y M. Urbański, “Hausdorff dimension and Hausdorff measures of Julia sets of elliptic functions,” *Bull. London Math. Soc.*, vol. 35, no. 2, pp. 269–275, 2003, doi: 10.1112/S0024609302001686.
- [17] J. Kotus y M. Urbański, “Fractal measures and ergodic theory of transcendental meromorphic functions,” in *Transcendental dynamics and complex analysis*, ser. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, vol. 348, pp. 251–316, doi: 10.1017/CBO9780511735233.013.
- [18] J. Milnor, “On lattès maps,” in *Dynamics on the Riemann sphere*. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 9–43, doi: 10.4171/011-1/1.
- [19] M. Moreno Rocha y P. Pérez Lucas, “A class of even elliptic functions with no Herman rings,” *Topology Proc.*, vol. 48, pp. 151–162, 2016.