CUBO, A Mathematical Journal
Vol. 27, no. 2, pp. 329–341, Agosto 2025
DOI: 10.56754/0719-0646.2702.329

Una nota sobre cocientes finito-dimensionales y el problema de continuidad automática para álgebras de convolución torcida

Felipe I. Flores[1,✉]

[1] *Department of Mathematics, University of Virginia, 114 Kerchof Hall. 141 Cabell Dr, Charlottesville, Virginia, United States.*
hmy3tf@virginia.edu✉

RESUMEN

En esta nota probaremos que el álgebra de convolución torcida $L^1_{\alpha,\omega}(\mathsf{G},\mathfrak{A})$ asociada a una acción torcida de un grupo localmente compacto G en una C^*-álgebra $\mathfrak{A}$ tiene la siguiente propiedad: Todo cociente por un ideal cerrado, bilátero y de codimensión finita produce un álgebra semisimple. Luego utilizamos esta propiedad, junto con resultados de H. Dales y G. Willis, para extender resultados previos del autor y producir grandes clases de ejemplos de álgebras con propiedades de continuidad automática.

Palabras clave: Continuidad automática, semisimplicidad, ideal cofinito, bimódulo, acción torcida, álgebra de convolución.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 43A20, 47L65, 46H40

Publicado: 14 de octubre de 2025
Aceptado: 9 de septiembre de 2025
Recibido: 16 de octubre de 2024

CUBO, A Mathematical Journal
Vol. 27, no. 2, pp. 329–341, August 2025
DOI: 10.56754/0719-0646.2702.329

A note on finite-dimensional quotients and the problem of automatic continuity for twisted convolution algebras

Felipe I. Flores[1,✉]

[1] *Department of Mathematics, University of Virginia, 114 Kerchof Hall. 141 Cabell Dr, Charlottesville, Virginia, United States.*
hmy3tf@virginia.edu✉

ABSTRACT

In this note, we will show that the twisted convolution algebra $L^1_{\alpha,\omega}(\mathsf{G},\mathfrak{A})$ associated with a twisted action of a locally compact group G on a C^*-algebra $\mathfrak{A}$ has the following property: Every quotient by a closed two-sided ideal of finite codimension produces a semisimple algebra. Afterward, we use this property, together with results by H. Dales and G. Willis, to extend previous results by the author and to produce large classes of examples of algebras with automatic continuity properties.

Keywords and Phrases: Automatic continuity, semisimplicity, cofinite ideal, bimodule, twisted action, convolution algebra.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 43A20, 47L65, 46H40

Published: 14 October, 2025
Accepted: 09 September, 2025
Received: 16 October, 2024

Introducción

Mucho del progreso del estudio de la continuidad automática en álgebras de Banach ha ocurrido en relación con el estudio de las álgebras de grupo, ámbito predilecto del análisis armónico abstracto. Ejemplos de este fenómeno se pueden encontrar en el famoso libro de Dales [3] o en el estudio [2].

En esta nota estudiaremos la continuidad de operadores de entrelazamiento, un objetivo que ya ha sido llevado a cabo en el contexto de álgebras de grupo por Willis [12], Dales y Willis [4] y Runde [11], entre otros. Versiones particulares de este problema también han suscitado interés. Por ejemplo, podemos mencionar los trabajos de Jewell [8] y Willis [13] sobre continuidad automática para derivaciones, o el trabajo de Runde [10] sobre continuidad automática para homomorfismos.

El propósito de esta nota es extender resultados anteriores sobre el problema de continuidad automática para *-álgebras de Banach dadas por convolución (generalizada, torcida) de funciones de tipo L^1 sobre grupos. De hecho, buscamos mejorar los resultados de [5] de dos formas diferentes, pero relacionadas. Una de estas formas involucra relajar la condición de generación compacta, fundamental para los resultados de ese artículo, mientras que la otra se basa en hacer el álgebra de coeficientes finito-dimensional. Esto permite, por supuesto, grandes generalizaciones y nuevos ejemplos de fenómenos de continuidad automática.

Nuestro enfoque se basa en el estudio de la semisimplicidad para los cocientes mediante ideales finito-codimensionales (también llamados cofinitos), cerrados y bilaterales. Esta propiedad está sorprendentemente conectada con la teoría de la continuidad automática, como lo ejemplifican los resultados en [11], y especialmente en [4]. De hecho, nuestro enfoque hará uso explícito de algunos de los teoremas en estos artículos, atribuidos a Willis (Teorema 2.4) y Dales-Willis (Teorema 2.7). Estos teoremas, combinados con los resultados de [5] y el resultado que obtendremos sobre semisimplicidad, producen los nuevos ejemplos de continuidad automática.

A continuación describimos la organización del artículo: En la Sección 1 introducimos lo que llamamos álgebras de convolución torcida y demostramos que sus cocientes de dimensión finita son semisimples. Esto concluye con el Teorema 1.5 y su demostración. En la Sección 2 recordamos conceptos básicos de continuidad automática y luego procedemos a combinar los resultados mencionados anteriormente con los teoremas de Willis y de Dales-Willis para obtener nuestros resultados en continuidad automática, concluyendo el artículo.

1. Semisimplicidad de los cocientes finito-dimensionales

Una *acción torcida* es una 4-tupla $(\mathsf{G}, \alpha, \omega, \mathfrak{A})$, donde G es un grupo localmente compacto, $\mathfrak{A}$ un C^*-álgebra y tenemos las aplicaciones continuas $\alpha : \mathsf{G} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$, $\omega : \mathsf{G} \times \mathsf{G} \to \mathcal{UM}(\mathfrak{A})$, tales que ω y $\mathsf{G} \ni x \mapsto \alpha_x(a) \in \mathfrak{A}$ satisfacen

(i) $\alpha_x(\omega(y,z))\omega(x,yz) = \omega(x,y)\omega(xy,z)$,

(ii) $\alpha_x\big(\alpha_y(a)\big)\omega(x,y) = \omega(x,y)\alpha_{xy}(a)$,

(iii) $\omega(x,\mathsf{e}) = \omega(\mathsf{e},y) = 1, \alpha_{\mathsf{e}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{A}}$,

para todos los $x, y, z \in \mathsf{G}$ y $a \in \mathfrak{A}$. Aquí e denota la identidad en G.

Dada una tupla de este tipo, se puede formar el álgebra de convolución torcida $L^1_{\alpha,\omega}(\mathsf{G},\mathfrak{A})$, que consta de todas las funciones Bochner-integrables $\Phi : \mathsf{G} \to \mathfrak{A}$ y está dotada del producto de convolución:

$$\Phi * \Psi(x) = \int_{\mathsf{G}} \Phi(y)\alpha_y[\Psi(y^{-1}x)]\omega(y, y^{-1}x)\mathrm{d}y,$$

mientras que la involución está dada por

$$\Phi^*(x) = \Delta(x^{-1})\omega(x,x^{-1})^*\alpha_x[\Phi(x^{-1})^*].$$

Con estas operaciones, $L^1_{\alpha,\omega}(\mathsf{G},\mathfrak{A})$ es una *-álgebra de Banach bajo la norma

$$\|\Phi\|_{L^1_{\alpha,\omega}(\mathsf{G},\mathfrak{A})} = \int_{\mathsf{G}} \|\Phi(x)\|_{\mathfrak{A}}\, \mathrm{d}x.$$

En estas integrales dx denota la medida de Haar en G, mientras que Δ denota la función modular asociada a dx. En el caso en que $\omega \equiv 1$, denotamos al álgebra resultante como $L^1_\alpha(\mathsf{G},\mathfrak{A})$. Por otra parte, en el caso en que $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$ y $\alpha \equiv \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, el álgebra resultante se denotará por $L^1_\omega(\mathsf{G})$ y la llamaremos álgebra de grupo torcida.

El objetivo de este capítulo es demostrar que los ideales cofinitos y cerrados de $L^1_{\alpha,\omega}(\mathsf{G},\mathfrak{A})$ producen cocientes semisimples y, para ello, necesitamos introducir una clase especial de multiplicadores. Es conveniente entonces recordar la definición del álgebra de multiplicadores de un álgebra de Banach.

En lo que sigue, si $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach, entonces $\mathbb{B}(\mathcal{X})$ denotará el conjunto de operadores acotados $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, mientras que $\mathrm{GL}(\mathcal{X}) \subset \mathbb{B}(\mathcal{X})$ denotará el grupo de operadores acotados que son invertibles.

Definición 1.1. *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach. Un* multiplicador *de $\mathfrak{B}$ es un par $m = (\lambda, \mu)$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{B}(\mathfrak{B})$ son tales que*

$$a\lambda(b) = \mu(a)b, \quad \lambda(ab) = \lambda(a)b \quad y \quad \mu(ab) = a\mu(b),$$

para todo $a, b \in \mathfrak{B}$.

El conjunto de todos los multiplicadores de $\mathfrak{B}$ se llama el álgebra de multiplicadores *de $\mathfrak{B}$ y la denotamos por $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$.*

Recordemos que el producto de multiplicadores viene dado por la siguiente fórmula:

$$(\lambda, \mu)(\lambda', \mu') = (\lambda \circ \lambda', \mu' \circ \mu).$$

Además, la norma natural en $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$ está dada por $\|(\lambda, \mu)\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{B})} = \text{máx}\{\|\lambda\|, \|\mu\|\}$. Si $\mathfrak{B}$ es una *-álgebra de Banach, entonces el álgebra de multiplicadores también tiene una involución natural, $(\lambda, \mu)^* = (\lambda^*, \mu^*)$, que verifica

$$\lambda^*(a) = \mu(a^*)^* \quad \text{y} \quad \mu^*(a) = \lambda(a^*)^*, \quad \text{para todo } a \in \mathfrak{B}.$$

Si $\mathfrak{B}$ es involutiva, entonces utilizamos $\mathcal{UM}(\mathfrak{B})$ para denotar al grupo unitario de $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$.

Nótese que $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$ siempre es unital y además contiene una copia de $\mathfrak{B}$, dada por los multiplicadores (L_b, R_b), $b \in \mathfrak{B}$. Estos multiplicadores vienen, naturalmente, definidos por

$$R_b(a) = ab \quad \text{y} \quad L_b(a) = ba, \quad \text{para todo } a \in \mathfrak{B}.$$

Lo interesante de esta inclusión es que, asumiendo la existencia de identidades aproximadas contractivas, toda representación no-degenerada de $\mathfrak{B}$ se extiende naturalmente a una representación de $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$. Es un hecho bien conocido que $L^1_{\alpha,\omega}(\mathsf{G}, \mathfrak{A})$ siempre tiene una identidad aproximada contractiva, por lo que el siguiente lema será de importancia para nosotros.

Lema 1.2. *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach, $\mathcal{X}$ un espacio de Banach y sea $\pi : \mathfrak{B} \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$ una representación contractiva. Asuma además que las siguientes son ciertas:*

(i) $\mathfrak{B}$ tiene una identidad aproximada contractiva.

(ii) La representación π es no-degenerada, es decir, $\overline{\text{span}}\{\pi(b)\xi \mid b \in \mathfrak{B}, \xi \in \mathcal{X}\} = \mathcal{X}$.

Entonces existe una única representación unital y contractiva $\widetilde{\pi} : \mathcal{M}(\mathfrak{B}) \to \mathbb{B}(\mathfrak{B})$, tal que $\widetilde{\pi} \circ \iota_{\mathfrak{B}} = \pi$.

Dada una acción torcida $(\mathsf{G}, \alpha, \omega, \mathfrak{A})$, y para $a \in \mathcal{M}(\mathfrak{A})$, $y \in \mathsf{G}$, consideramos el multiplicador $m_{a,y} = (\lambda_{a,y}, \mu_{a,y})$ de $L^1_{\alpha,\omega}(\mathsf{G}, \mathfrak{A})$ que viene dado por

$$\begin{aligned}
\lambda_{a,y}(\Phi)(x) &= a\alpha_y\big(\Phi(y^{-1}x)\big)\omega(y, y^{-1}x), \\
\mu_{a,y}(\Phi)(x) &= \Delta(y^{-1})\Phi(xy^{-1})\alpha_{xy^{-1}}(a)\omega(xy^{-1}, y).
\end{aligned}$$

También fijamos la siguiente notación

$$\Gamma_{\mathsf{G},\mathfrak{A}} = \{m_{u,y} \mid u \in \mathcal{UM}(\mathfrak{A}),\, y \in \mathsf{G}\}.$$

En el siguiente lema, recopilaremos algunos hechos bien conocidos y fáciles de probar, pero útiles para el desarrollo de nuestro resultado.

Lema 1.3. *Las siguientes aseveraciones son verdaderas.*

(i) $\Gamma_{\mathsf{G},\mathfrak{A}}$ *es un grupo.*

(ii) Todo $m_{u,y} \in \Gamma_{\mathsf{G},\mathfrak{A}}$ *es unitario y tiene norma* 1.

(iii) Todo multiplicador de la forma $m_{a,y}$ *puede ser escrito como una combinación lineal de* 4 *elementos en* $\Gamma_{\mathsf{G},\mathfrak{A}}$.

(iv) El adjunto de $m_{a,y}$ *satisface la formula*

$$m_{a,y}^* = m_{\omega(y^{-1},y)^*\alpha_{y^{-1}}(a^*),y^{-1}}, \tag{1.1}$$

para todo $a \in \mathcal{M}(\mathfrak{A}), y \in \mathsf{G}$.

A continuación, procedemos a demostrar el resultado principal de la sección. Nuestra demostración está basada en el hecho de que las representaciones de grupos compactos son similares a representaciones unitarias. El hecho relevante es el siguiente (véase [9, Theorem 0.1]).

Lema 1.4. *Sea* $\mathcal{X}$ *un espacio de Hilbert de dimensión finita y* $V \subset \mathrm{GL}(\mathcal{X})$ *un subgrupo tal que* $\sup_{v\in V}\|v\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})} < \infty$. *Entonces existe una transformación lineal positiva e invertible* $T \in \mathrm{GL}(\mathcal{X})$ *tal que* $TvT^{-1} \in \mathcal{U}(\mathcal{X})$, *para todo* $v \in V$.

Teorema 1.5. *Sea* $(\mathsf{G}, \alpha, \omega, \mathfrak{A})$ *una acción torcida. Si* $I \subset \mathfrak{B} = L^1_{\alpha,\omega}(\mathsf{G}, \mathfrak{A})$ *es un ideal bilateral, cerrado y de codimensión finita, entonces* I *es automáticamente auto-adjunto y el álgebra cociente* $\mathfrak{B}/I$ *es semisimple.*

Demostración. Dado que I es cerrado y de codimensión finita, $\mathcal{X} = \mathfrak{B}/I$ es un espacio de Banach de dimensión finita. Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ cualquier producto interno, por ser de dimensión finita, $\mathcal{X}$ es un espacio de Hilbert con respecto a este producto interno.

Denotamos por $\pi : \mathfrak{B} \to \mathbb{B}(\mathcal{X})$, la representación inducida en el cociente, es decir,

$$\pi(\Phi)(\Psi + I) = \Phi * \Psi + I,$$

para todo $\Phi, \Psi \in \mathfrak{B}$. Esta representación es contractiva y no degenerada, por lo que, debido al Lema 1.2 y abusando de la notación, π se extiende a $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$ y, por ende, los operadores $\pi(m_{a,y}) \in \mathbb{B}(\mathcal{X})$ están bien definidos y son uniformemente acotados. De hecho, no es difícil notar que cumplen la identidad

$$\pi(m_{a,y})(\Psi + I) = m_{a,y}(\Psi) + I, \qquad \text{para todo } \Psi \in \mathfrak{B}.$$

Por este motivo, uno observa que

$$\pi(\Phi)(\Psi+I)=\int_{\mathsf{G}}\pi(m_{\Phi(y),y})(\Psi+I)\mathrm{d}y=\int_{\mathsf{G}}m_{\Phi(y),y}(\Psi)\mathrm{d}y+I. \tag{1.2}$$

Ahora bien, notamos que $V=\{\pi(m)\}_{m\in\Gamma_{\mathsf{G},\mathfrak{A}}}$ satisface todas las condiciones del Lema 1.4 y, por ende, debe existir un operador positivo e invertible $T\in\mathrm{GL}(\mathcal{X})$ tal que $T\pi(m)T^{-1}\in\mathcal{U}(\mathcal{X})$, para todo $m\in\Gamma_{\mathsf{G},\mathfrak{A}}$.

Definimos entonces la representación $\pi':\mathfrak{B}\to\mathbb{B}(\mathcal{X})$ dada por $\pi'(\Phi)=T\pi(\Phi)T^{-1}$ y probaremos ahora que es una *-representación y que $\operatorname{Ker}\pi'=I$, con lo cual se seguirá que $\mathfrak{B}/I$ es *-isomorfa a $\pi'(\mathfrak{B})$, que es una C^*-álgebra, y por lo tanto habremos demostrado que $\mathfrak{B}/I$ es semisimple.

En efecto, nótese que $\operatorname{Ker}\pi'=\operatorname{Ker}\pi$. Ahora bien, sea $\Phi\in\operatorname{Ker}\pi$ y sea $\Psi_j\in\mathfrak{B}$ alguna identidad aproximada acotada de $\mathfrak{B}$. Notamos que

$$I=\lim_j\pi(\Phi)(\Psi_j+I)=\lim_j\Phi*\Psi_j+I=\Phi+I,$$

por lo cual $\Phi\in I$. Esto prueba que $\operatorname{Ker}\pi'=I$.

Veamos ahora que π' es una *-representación. En efecto, si $m\in\Gamma_{\mathsf{G},\mathfrak{A}}$ y $\xi,\eta\in\mathcal{X}$, entonces uno tiene

$$\langle\pi'(m)\xi,\eta\rangle=\langle\xi,\pi'(m)^*\eta\rangle=\langle\xi,\pi'(m)^{-1}\eta\rangle=\langle\xi,\pi'(m^{-1})\eta\rangle=\langle\xi,\pi'(m^*)\eta\rangle.$$

Pero, recordando que todo $m_{a,y}$ se puede escribir como una combinación lineal de 4 elementos en $\Gamma_{\mathsf{G},\mathfrak{A}}$ (punto *(iii)* del Lema 1.3), vemos que

$$\pi'(m_{a,y})^*=\pi'(m_{a,y}^*),\quad \text{para todo } a\in\mathcal{M}(\mathfrak{A}),y\in\mathsf{G}.$$

Y, en consecuencia, para $\Phi\in\mathfrak{B},\xi\in\mathcal{X}$, y utilizando la igualdad (1.2), uno observa que

$$\begin{aligned}\pi'(\Phi^*)\xi=T\pi(\Phi^*)T^{-1}\xi&=T\int_{\mathsf{G}}\pi\big(m_{\Phi^*(y),y}\big)T^{-1}\xi\,\mathrm{d}y\\&=T\int_{\mathsf{G}}\Delta(y^{-1})\pi\big(m_{\omega(y,y^{-1})^*\alpha_y(\Phi(y^{-1})^*),y}\big)T^{-1}\xi\,\mathrm{d}y\\&=T\int_{\mathsf{G}}\pi\big(m_{\omega(y^{-1},y)^*\alpha_{y^{-1}}(\Phi(y)^*),y^{-1}}\big)T^{-1}\xi\,\mathrm{d}y\\&\overset{(1.1)}{=}\int_{\mathsf{G}}T\pi\big(m^*_{\Phi(y),y}\big)T^{-1}\xi\,\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathsf{G}}\pi'(m_{\Phi(y),y})^*\xi\,\mathrm{d}y=\pi'(\Phi)^*\xi,\end{aligned}$$

con lo que se termina la demostración. □

2. Aplicaciones al problema de continuidad automática

Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach. Un espacio de Banach $\mathcal{X}$ que también es un $\mathfrak{B}$-bimódulo se llama $\mathfrak{B}$-*bimódulo de Banach* si las funciones

$$\mathfrak{B} \times \mathcal{X} \ni (b, \xi) \mapsto b\xi \in \mathcal{X} \quad \text{y} \quad \mathcal{X} \times \mathfrak{B} \ni (\xi, b) \mapsto \xi b \in \mathcal{X}$$

son continuas conjuntamente.

Definición 2.1. *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach y sean $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ $\mathfrak{B}$-bimódulos de Banach. Una función lineal $\theta : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ se denomina* operador de $\mathfrak{B}$-entrelazamiento *si para cada $b \in \mathfrak{B}$, las funciones*

$$\mathcal{X}_1 \ni \xi \mapsto \theta(b\xi) - b\theta(\xi) \in \mathcal{X}_2 \quad y \quad \mathcal{X}_1 \ni \xi \mapsto \theta(\xi b) - \theta(\xi)b \in \mathcal{X}_2$$

son continuas.

Ejemplo 2.2. *(i) Todo homomorfismo de $\mathfrak{B}$-bimódulos entre $\mathfrak{B}$-bimódulos de Banach es un operador de $\mathfrak{B}$-entrelazamiento.*

(ii) Sea $\mathcal{X}$ un $\mathfrak{B}$-bimódulo de Banach. Una derivación es una función lineal $D : \mathfrak{B} \to \mathcal{X}$ que satisface

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

Toda derivación es un operador de $\mathfrak{B}$-entrelazamiento.

El problema de continuidad automática consiste en entender qué tipo de condiciones garantizan que todo operador de $\mathfrak{B}$-entrelazamiento sobre el álgebra de Banach $\mathfrak{B}$ es necesariamente continuo. Una herramienta fundamental para atacar este problema es el llamado ideal de continuidad, que introducimos a continuación.

Definición 2.3. *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach y $\theta : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ un operador de $\mathfrak{B}$-entrelazamiento entre $\mathfrak{B}$-bimódulos de Banach. Entonces*

$$\mathscr{I}(\theta) = \{b \in \mathfrak{B} \mid \mathcal{X}_1 \ni \xi \mapsto \theta(b\xi) \in \mathcal{X}_2 \text{ y } \mathcal{X}_1 \ni \xi \mapsto \theta(\xi b) \in \mathcal{X}_2 \text{ son funciones continuas}\}$$

es el ideal de continuidad *de θ.*

Nótese que $\mathscr{I}(\theta)$ es cerrado, ya que $\mathcal{X}_2$ es un $\mathfrak{B}$-bimódulo de Banach. El siguiente teorema se debe a Willis [12, Lemma 4.3.5]. Véase también [11, pág. 498].

Teorema 2.4 (Willis). *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ $\mathfrak{B}$-bimódulos de Banach y $\theta : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ un operador de $\mathfrak{B}$-entrelazamiento. Suponga que existe una familia dirigida $\{\mathfrak{B}_i\}_i$ de subálgebras de Banach de $\mathfrak{B}$ tales que*

(i) $\mathfrak{B} = \overline{\bigcup_i \mathfrak{B}_i}$ *y*

(ii) para cada índice i, el álgebra $\mathfrak{B}_i/\mathfrak{B}_i \cap \mathscr{I}(\theta)$ es semisimple y finito-dimensional.

Entonces $\mathscr{I}(\theta)$ es de codimensión finita en $\mathfrak{B}$.

La principal aplicación de este resultado es levantar la hipótesis de generación compacta de G de algunos de los resultados obtenidos en [5]. Nos gustaría destacar que dicha restricción fue de importancia fundamental en ese trabajo, ya que permitió garantizar la existencia de funciones de peso con propiedades notables (ver [5, Lemma 3.4]).

Proposición 2.5. *Sea $(\mathsf{G}, \alpha, \omega, \mathfrak{A})$ una acción torcida, denotemos por $\mathfrak{B} = L^1_{\alpha,\omega}(\mathsf{G}, \mathfrak{A})$ y supongamos que $\theta : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ es un operador de $\mathfrak{B}$-entrelazamiento entre los $\mathfrak{B}$-bimódulos de Banach $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ con la propiedad de que para todos los subgrupos abiertos y compactamente generados $\mathsf{H} \subset \mathsf{G}$, el ideal $\mathscr{I}(\theta) \cap L^1_{\alpha,\omega}(\mathsf{H}, \mathfrak{A})$ tiene codimensión finita en $L^1_{\alpha,\omega}(\mathsf{H}, \mathfrak{A})$. Entonces $\mathscr{I}(\theta)$ tiene codimensión finita en $\mathfrak{B}$.*

Demostración. Observamos que $\mathscr{I}(\theta) \cap L^1_{\alpha,\omega}(\mathsf{H}, \mathfrak{A})$ coincide con el ideal de continuidad de θ cuando este se considera como un operador de $L^1_{\alpha,\omega}(\mathsf{H}, \mathfrak{A})$-entrelazamiento y, por lo tanto, es cerrado. Ahora, consideramos la familia $\{\mathsf{H}_i\}_i$ de subgrupos abiertos, generados de manera compacta de G, ordenados por inclusión y observamos que la familia $\mathfrak{B}_i = L^1_{\alpha,\omega}(\mathsf{H}_i, \mathfrak{A})$ es una familia dirigida de subálgebras de $\mathfrak{B}$ tales que $\mathfrak{B} = \overline{\bigcup_i \mathfrak{B}_i}$. Esto último se sigue, por ejemplo, del hecho de que $\bigcup_i \mathfrak{B}_i$ contiene todas las funciones continuas de soporte compacto.

Nótese que $\mathfrak{B}_i/\mathfrak{B}_i \cap \mathscr{I}(\theta)$ es finito-dimensional por suposición y semisimple por el Teorema 1.5. Entonces, el resultado se sigue de aplicar el Teorema 2.4. $\square$

En particular, ahora podemos proporcionar los siguientes ejemplos de continuidad automática, ya para grupos que no precisan ser compactamente generados.

Corolario 2.6. *Sea G un grupo localmente compacto y nilpotente. Sea $\mathcal{X}$ un $\mathfrak{B}$-bimódulo de Banach y $\theta : \mathfrak{B} \to \mathcal{X}$ un operador de $\mathfrak{B}$-entrelazamiento. Entonces θ es automáticamente continuo cuando $\mathfrak{B}$ es una de las siguientes:*

(i) Álgebras de grupos torcidas $L^1_\omega(\mathsf{G})$, asociadas con un 2-cociclo $\omega : \mathsf{G} \times \mathsf{G} \to \mathbb{C}$.

(ii) Álgebras de convolución $\ell^1_\alpha(\mathsf{G}, \mathfrak{A})$, donde $(\mathsf{G}, \mathfrak{A}, \alpha)$ es un sistema C^*-dinámico con $\mathfrak{A}$ una C^*-álgebra unital y promediable (=nuclear).

Demostración. Combinando la Proposición 2.5 con [5, Corollary 4.21], sabemos que $\mathscr{I}(\theta) \subset \mathfrak{B}$ es un ideal cofinito y cerrado. Además, en ambos casos el álgebra $\mathfrak{B}$ tiene la siguiente propiedad: todo ideal bilateral cerrado y cofinito $I \subset \mathfrak{B}$ tiene una identidad aproximada izquierda de norma acotada.

Esta propiedad que acabamos de mencionar es probada directamente en el primer caso [5, Theorem A.3] y se sigue de la combinación de [6, Proposition VII.2.31] con el hecho de que $\ell^1_\alpha(\mathsf{G}, \mathfrak{A})$ es promediable [7, Proposition IV.4.2] en el segundo.

Dicho esto, podemos repetir parte del argumento en [5, Theorem 3.6] para concluir la demostración. En efecto, debido al teorema de factorización de Cohen-Hewitt [1, Corollary 11.12], para cada secuencia $\{b_n\} \subset \mathscr{I}(\theta)$ que converge a cero, existen $c, d_n \in \mathscr{I}(\theta)$ que factorizan a b_n:

$$b_n = cd_n \quad \text{y} \quad \lim_n d_n = 0.$$

Como la función $\mathfrak{B} \ni d \mapsto \theta(cd)$ es continua por la definición de $\mathscr{I}(\theta)$, tenemos

$$\lim_n \theta(b_n) = \lim_n \theta(cd_n) = 0$$

y, por lo tanto, la restricción de θ a $\mathscr{I}(\theta)$ es continua. Dado que $\mathscr{I}(\theta)$ tiene codimensión finita, θ es de hecho continua en todo $\mathfrak{B}$. $\square$

Ahora nos limitaremos al estudio de (algunos) operadores de entrelazamiento con imágenes de dimensión finita, lo que nos dará más flexibilidad en las hipótesis impuestas sobre la acción torcida. Dales y Willis demostraron el siguiente teorema en [4, Theorem 2.5] y será nuestra principal motivación para lo que sigue.

Teorema 2.7 (Dales-Willis)**.** *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Banach tal que $\mathfrak{B}/I$ es semisimple para cada ideal bilateral cerrado y cofinito $I \subset \mathfrak{B}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Cada homomorfismo de $\mathfrak{B}$ con imagen finito-dimensional es continuo.

(ii) Cada derivación en un $\mathfrak{B}$-bimódulo de Banach de dimensión finita es continua.

(iii) Cada ideal bilateral cofinito de $\mathfrak{B}$ es cerrado.

(iv) I^2 es cerrado y cofinito, para cada ideal bilateral cerrado y cofinito $I \subset \mathfrak{B}$.

Por lo tanto, una aplicación del Teorema 1.5 produce la siguiente proposición.

Proposición 2.8. *Sea $(\mathsf{G}, \alpha, \omega, \mathfrak{A})$ una acción torcida. Entonces, todas las condiciones en el Teorema 2.7 son equivalentes para $L^1_{\alpha,\omega}(\mathsf{G}, \mathfrak{A})$.*

En particular, obtenemos muchas clases de ejemplos para este fenómeno de dimensión finita. Los recopilamos en el siguiente corolario. Como veremos, en este contexto se pueden extender en gran medida los resultados del artículo [5] (*cf.* [5, Corollary 4.21]).

Corolario 2.9. *Sea* $\mathfrak{B}$ *una de las siguientes álgebras:*

(i) $L^1_\omega(\mathsf{G})$*, para un grupo promediable* G *y un 2-cociclo* $\omega : \mathsf{G} \times \mathsf{G} \to \mathbb{C}$*.*

(ii) $\ell^1_\alpha(\mathsf{G}, \mathfrak{A})$*, para una acción (no torcida)* $(\mathsf{G}, \alpha, \mathfrak{A})$ *donde* G *es discreto y promediable y* $\mathfrak{A}$ *es una* C^**-álgebra promediable (=nuclear).*

Entonces $\mathfrak{B}$ *satisface todas las condiciones del Teorema 2.7.*

Demostración. Verificamos la condición *(iv)* del Teorema 2.7. Tal como en la demostración del Corolario 2.6, vemos que todo ideal bilateral cerrado y cofinito $I \subset \mathfrak{B}$ tiene una identidad aproximada izquierda de norma acotada. En este caso, $I = I^2$ también se deduce del teorema de factorización de Cohen-Hewitt. □

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por el proyecto DMS-2144739 de la NSF. El autor agradece encarecidamente al profesor Ben Hayes por todas las interesantes discusiones que giraron en torno a este tópico. El autor también está agradecido con Diego Jauré, Moria Labraña y los evaluadores por sus útiles comentarios sobre versiones anteriores del artículo.

Referencias

[1] F. F. Bonsall y J. Duncan, *Complete normed algebras*, ser. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973, vol. 80.

[2] H. G. Dales, "Automatic continuity: a survey," *Bull. London Math. Soc.*, vol. 10, no. 2, pp. 129–183, 1978, doi: 10.1112/blms/10.2.129.

[3] H. G. Dales, *Banach algebras and automatic continuity*, ser. London Mathematical Society Monographs. New Series. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000, vol. 24, Oxford Science Publications.

[4] H. G. Dales y G. A. Willis, "Cofinite ideals in Banach algebras, and finite-dimensional representations of group algebras," in *Radical Banach algebras and automatic continuity (Long Beach, Calif., 1981)*, ser. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin-New York, 1983, vol. 975, pp. 397–407.

[5] F. I. Flores, "On the continuity of intertwining operators over generalized convolution algebras," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 542, no. 1, 2025, Art. ID 128753, doi: 10.1016/j.jmaa.2024.128753.

[6] A. Y. Helemskii, *The homology of Banach and topological algebras*, ser. Mathematics and its Applications (Soviet Series). Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989, vol. 41, doi: 10.1007/978-94-009-2354-6.

[7] K. K. Jensen, "Foundations of an equivariant cohomology theory for Banach algebras. II," *Adv. Math.*, vol. 147, no. 2, pp. 173–259, 1999, doi: 10.1006/aima.1999.1838.

[8] N. P. Jewell, "Continuity of module and higher derivations," *Pacific J. Math.*, vol. 68, no. 1, pp. 91–98, 1977.

[9] G. Pisier, "Are unitarizable groups amenable?" in *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects*, ser. Progr. Math. Birkhäuser, Basel, 2005, vol. 248, pp. 323–362, doi: 10.1007/3-7643-7447-0_8.

[10] V. Runde, "Homomorphisms from $L^1(G)$ for $G \in [FIA]^- \cup [\text{Moore}]$," *J. Funct. Anal.*, vol. 122, no. 1, pp. 25–51, 1994, doi: 10.1006/jfan.1994.1060.

[11] V. Runde, "Intertwining operators over $L^1(G)$ for $G \in [\text{PG}] \cap [\text{SIN}]$," *Math. Z.*, vol. 221, no. 3, pp. 495–506, 1996, doi: 10.1007/PL00004255.

[12] G. A. Willis, "Derivations from group algebras, factorization in cofinite ideals and topologies on $B(X)$," Ph.D. dissertation, Newcastle upon Tyne, 1980.

[13] G. Willis, “The continuity of derivations from group algebras: factorizable and connected groups,” *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, vol. 52, no. 2, pp. 185–204, 1992.