

Deformaciones de variedades abelianas con un grupo de automorfismos

U. GUERRERO-VALADEZ¹ 

H. TORRES-LÓPEZ² 

A. G. ZAMORA^{3,✉} 

¹ U. A. Matemáticas, Universidad
Autónoma de Zacatecas, Calzada
Solidaridad entronque Paseo a la Bufo,
C.P. 98000, Zacatecas, Zac. México.
uriel.gua52@gmail.com

² Secihti - U. A. Matemáticas, Universidad
Autónoma de Zacatecas, Calzada
Solidaridad entronque Paseo a la Bufo,
C.P. 98000, Zacatecas, Zac. México.
hugo@cimat.mx

³ U. A. Matemáticas, Universidad
Autónoma de Zacatecas, Calzada
Solidaridad entronque Paseo a la Bufo,
C.P. 98000, Zacatecas, Zac. México.
alexiszamora@uaz.edu.mx 

RESUMEN

Dada una variedad abeliana polarizada con un grupo de automorfismos G , demostramos que el funtor de moduli local asociado es pro-representable; el álgebra que lo pro-representa es formalmente suave y calculamos la dimensión de esta álgebra en función de la acción analítica del grupo. Presentamos los cálculos explícitos del caso de la acción del grupo simétrico S_3 sobre los factores del producto $E \times E \times E$ de una curva elíptica.

Palabras clave: Moduli de variedades abelianas polarizadas, grupos de automorfismos, deformaciones locales.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 14B12, 14D15, 14D22, 14K04, 14K10.

Publicado: 15 de octubre de 2025

Aceptado: 22 de septiembre de 2025

Recibido: 30 de noviembre de 2024



©2025 U. Guerrero-Valadez *et al.* Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

Deformations of abelian varieties with an automorphism group

U. GUERRERO-VALADEZ¹ 

H. TORRES-LÓPEZ² 

A. G. ZAMORA^{3,✉} 

¹ U. A. Matemáticas, Universidad
Autónoma de Zacatecas, Calzada
Solidaridad entronque Paseo a la Bufo,
C.P. 98000, Zacatecas, Zac. México.
uriel.gua52@gmail.com

² Secihti - U. A. Matemáticas, Universidad
Autónoma de Zacatecas, Calzada
Solidaridad entronque Paseo a la Bufo,
C.P. 98000, Zacatecas, Zac. México.
hugo@cimat.mx

³ U. A. Matemáticas, Universidad
Autónoma de Zacatecas, Calzada
Solidaridad entronque Paseo a la Bufo,
C.P. 98000, Zacatecas, Zac. México.
alexizamora@uaz.edu.mx 

ABSTRACT

Given a polarized abelian variety with an automorphism group G , we prove that the associated local moduli functor is pro-representable, the algebra that pro-represents it is formally smooth, and compute the dimension of this algebra as a function of the analytic action of the group. We present the explicit computations in the case of the action of the symmetric group S_3 on the factors of the product $E \times E \times E$ of an elliptic curve.

Keywords and Phrases: Moduli of polarized abelian varieties, automorphism group, local deformations.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 14B12, 14D15, 14D22, 14K04, 14K10.

Published: 15 October, 2025

Accepted: 22 September, 2025

Received: 30 November, 2024



©2025 U. Guerrero-Valadez *et al.* This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

1. Introducción

El objetivo del presente artículo es demostrar la existencia del moduli local de variedades abelianas polarizadas que admiten un grupo de automorfismos distinto a $\{\pm 1\}$. Es bien sabido que estas variedades coinciden con el locus singular del espacio de moduli $\mathcal{A}_g$, que parametriza variedades abelianas con un tipo de polarización fija (véase, por ejemplo, [20]).

En [8, 10] los autores trataron este problema en el caso particular en que el grupo de automorfismo considerado es $\mathbb{Z}_p$, con p un número primo. Esto era suficiente para su objetivo principal: el estudio de las componentes irreducibles del lugar singular de $\mathcal{A}_g$ y las posibles inclusiones entre estas componentes. Ahora tratamos el problema para un grupo arbitrario G .

Hemos intentado mantener la discusión en un contexto tan general como sea posible. De este modo, trabajamos sobre un campo k algebraicamente cerrado, pero hasta donde sea posible evitamos cualquier hipótesis sobre la característica. Del mismo modo, no suponemos que la polarización de las variedades abelianas X consideradas sea principal y de hecho el teorema de pro-representabilidad es demostrado para casi-polarizaciones (el divisor asociado al morfismo $X \rightarrow X^t$ no es necesariamente amplio).

El método utilizado es la teoría formal de deformaciones locales. La teoría de deformaciones fue creada en el contexto analítico por Kodaira y Spencer ([13]) y adaptada al caso algebraico por Grothendieck y su escuela (véase, por ejemplo, [11, exposición VI]). Esta teoría, altamente abstracta, requería algunas simplificaciones para aplicaciones prácticas. Una de estas simplificaciones fundamentales fue desarrollada por Schlessinger ([22]) quien demostró su famoso criterio de pro-representabilidad (véase Teorema 2.6 en la sección 2).

Afortunadamente, en la actualidad existen tratamientos sistemáticos sobre la teoría algebraica de deformaciones, como [6, 12] o [23]. Este artículo está fuertemente basado en [8, 10] y los trabajos pioneros de Frans Oort ([19, 20]).

Los resultados de [8] y [10] han sido utilizados para estudiar algunas propiedades del lugar singular de $\mathcal{A}_g$. Por ejemplo, en [9] para dar una reinterpretación de los resultados de [3] y en [2] para el estudio del número de polarizaciones principales de una variedad abeliana con grupo de automorfismos no trivial.

Fundamentar de un modo preciso y tan general como sea posible la existencia del moduli local de variedades abelianas polarizadas con automorfismos ayudará a obtener resultados más profundos sobre los puntos singulares del moduli de variedades abelianas polarizadas. Este estudio debe ser continuado con la comprobación de que este moduli formal es algebrizable.

La combinación de estos resultados permitirá seguramente arrojar una nueva luz sobre los ejemplos y problemas tratados en estudios más recientes como los presentados en [5, 14, 15, 21] y [24].

La motivación principal de los autores es aún la determinación completa de las componentes irreducibles del lugar singular de $\mathcal{A}_g$.

En la sección 2 introducimos los conceptos básicos de la teoría local de deformaciones y los funtores de deformación asociados a variedades abelianas y variedades abelianas polarizadas. En la sección 3 demostramos el teorema de pro-representabilidad y damos una fórmula explícita para calcular la dimensión del moduli local. El artículo termina con los cálculos de dimensión en el ejemplo del producto de curvas elípticas $E \times E \times E$, donde el grupo simétrico $\mathcal{S}_3$ actúa por permutación de los factores.

Las referencias básicas para los fundamentos de la teoría de variedades abelianas son [4] y [18].

Queremos agradecer a los árbitros anónimos que ayudaron, con sus comentarios, a mejorar la presentación de este artículo.

2. Preliminares

2.1. Funtores de deformación local

Sea k un campo algebraicamente cerrado; denotamos por Art/k la categoría de k -álgebras artinianas locales R , con campo residual k .

Definición 2.1 (Funtor de deformación, [6, Definición 6.1.4]). *Sea $D : \text{Art}/k \rightarrow \text{Sets}$ un funtor. Decimos que D es de deformación si D es covariante y $D(k)$ es un conjunto con un solo elemento.*

Recordemos que dada cualquier categoría $\mathcal{C}$ y $X \in \mathcal{C}$, podemos definir un funtor covariante:

$$h_X : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets},$$

mediante:

- (i) para cada $Y \in \mathcal{C}$, $h_X(Y) = \text{Mor}(X, Y)$
- (ii) a cada morfismo $\varphi_0 : Y \rightarrow Z$ en $\mathcal{C}$, asociamos el morfismo

$$\begin{aligned} h_X(\varphi_0) : \text{Mor}(X, Y) &\rightarrow \text{Mor}(X, Z) \\ \phi &\mapsto \varphi_0 \circ \phi \end{aligned}$$

Un funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$, F se dice representable si existe un objeto $X \in \mathcal{C}$ tal que para todo $Y \in \mathcal{C}$:

$$F(Y) = h_X(Y).$$

Sea $C\text{Loc}/k$ la categoría de k -álgebras noetherianas locales completas R con campo residual k , notemos que $R/m_R^n \in \text{Art}/k$ para cada $n \geq 1$.

Definición 2.2 ([19, página 227]). *Un funtor de deformación D se dice pro-representable si existe $R \in C\text{Loc}/k$ tal que D es isomorfo a h_R . Diremos entonces que R pro-representa a D .*

Demstrar que un funtor de deformaciones es pro-representable puede parecer a primera vista una tarea difícil. La idea para atacar este problema es comenzar con $D(k)$ y a partir de ahí tratar de “levantar” el funtor a $D(R)$, donde $R \in \text{Art}/k$ tiene un ideal máximo $m_R^n \neq 0$, con n cada vez más grande.

Para esto son fundamentales los siguientes conceptos.

Definición 2.3 ([19, página 229]). *Un epimorfismo $\pi : R \rightarrow R'$ en Art/k se dice pequeño, si $I := \text{Ker}(\pi)$ satisface $I \cdot m_R = 0$.*

Definición 2.4 ([19, página 228]). *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto final $\emptyset$ y productos fibrados. Un funtor covariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$ es llamado exacto por la izquierda si*

$$(i) \ F(\emptyset) = \{pt\},$$

$$(ii) \ F \text{ conmuta con productos fibrados, esto es, el morfismo natural}$$

$$F(X \times_Y Z) \xrightarrow{\sim} F(X) \times_{F(Y)} F(Z)$$

es biyectivo.

Definición 2.5 ([19, página 229]). *Un funtor $F : \text{Art}/k \rightarrow \text{Sets}$ se dice formalmente suave si para todo epimorfismo $\pi : R \rightarrow R' \rightarrow 0$ en Art/k , $F(\pi) : F(R) \rightarrow F(R')$ es sobreyectivo.*

La teoría de funtores pro-representables fue desarrollada inicialmente por A. Grothendieck en [11]. En 1968 Schlessinger ([22]) estableció un criterio que permite verificar efectivamente que un funtor es pro-representable (véase también [19, Theorem 2.1.1]).

Teorema 2.6 (Criterio de Schlessinger). *Un funtor covariante $F : \text{Art}/k \rightarrow \text{Sets}$ es pro-representable si y sólo si F es exacto por la izquierda y*

$$\dim_k(F(k[\epsilon])) < \infty.$$

Además, es suficiente verificar la exactitud por la izquierda para morfismos $R_1 \rightarrow R_2 \leftarrow R_3$ en Art/k , cuando la primera flecha es un epimorfismo pequeño. Si F es pro-representable por $\mathcal{O} \in C\text{Loc}/k$, es formalmente suave, y $\dim_k(F(k[\epsilon])) = m$, entonces existe un isomorfismo

$$\mathcal{O} \cong k[[t_1, \dots, t_m]].$$

2.2. Funtores de deformación asociados a variedades abelianas

En esta sección presentamos un breve resumen del artículo [19]. Todas las definiciones y enunciados pueden ser encontrados en esta fuente.

Definición 2.7. Sea X_0 una variedad abeliana sobre k . El funtor de moduli local de X_0 :

$$M : \text{Art}/k \rightarrow \text{Sets},$$

se define como:

$$M(R) := \left\{ \text{clases de equivalencia } (X, \varphi) \left| \begin{array}{l} X \text{ es un esquema abeliano } /R, \\ \varphi : X \otimes_R k \xrightarrow{\sim} X_0 \end{array} \right. \right\},$$

módulo la relación de equivalencia $(X, \varphi) \sim (X', \varphi')$ si existe un morfismo

$$\begin{array}{ccc} \Phi : X & \xrightarrow{\cong} & X' \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Spec } R & \end{array}$$

tal que $\Phi \otimes_R k = \text{id}$.

Si $R \rightarrow R'$ es un morfismo en Art/k , $M(R) \rightarrow M(R')$ se define por cambio de base.

Oort, siguiendo argumentos de Grothendieck, mostró que M es un funtor pro-representable.

Teorema 2.8 ([19, Teorema 2.2.1]). El funtor M es pro-representable por $\mathcal{O} = k[[t_{i,j}]]_{1 \leq i,j \leq g}$, donde $g = \dim(X_0)$.

El siguiente paso es estudiar variedades abelianas polarizadas (o casi-polarizadas).

Sea L un haz lineal sobre un esquema abeliano $\pi : X \rightarrow S$, y sea $\mu : X \times_S X \rightarrow X$ la multiplicación de grupo. Como $\text{Pic}(X/S)$ es un moduli fino, el haz

$$\mu^*(L) \otimes p_1^*(L) \otimes p_2^*(L)$$

sobre $X \times_S X$ define un homomorfismo

$$\Lambda(L) : X \rightarrow \text{Pic}^0(X/S) = X^t.$$

Definición 2.9. Sea $R \in \text{Art}/k$ y $\pi : X \rightarrow \text{Spec } R$ un esquema abeliano. Un homomorfismo $\lambda : X \rightarrow X^t$ es llamado casi polarización si existe un haz lineal $L \in \text{Pic}(X)$ tal que $\Lambda(L) = \lambda$. Si además L es relativamente amplio con respecto a π , decimos que λ es una polarización. A una pareja (X, λ) con λ una (casi)polarización se le llama variedad abeliana (casi)polarizada.

También escribimos (X, L) en lugar de (X, λ) si λ es la (casi)polarización definida por L o incluso si $L = \mathcal{O}_X(\Theta)$, escribimos (X, Θ) en lugar de (X, λ) . En el caso $R = k$ decimos que la pareja (X, λ) es una variedad abeliana (casi)polarizada. Abreviamos diciendo que la pareja (X, λ) es un e.a.c.p. (esquema abeliano casi polarizado) o e.a.p. (esquema abeliano polarizado) y del mismo modo para variedades abelianas (v.a.c.p. o v.a.p.)

Definición 2.10. Sea (X_0, Θ_0) una v.a.c.p. y $\Lambda(\Theta) = \lambda_{\Theta_0} \in \text{Hom}(X_0, X_0^t)$ la casi polarización asociada. El funtor de moduli local de (X_0, Θ_0)

$$P : \text{Art}/k \rightarrow \text{Sets}$$

se define como:

$$P(R) := \left\{ \text{clases de equivalencia } (X, \varphi, \Theta) \left| \begin{array}{l} X \text{ es un e.a.c.p. } /R, \\ \varphi : X \otimes_R k \xrightarrow{\sim} X_0, \\ \lambda_{\Theta} \otimes_R k = \lambda_{\Theta_0} \end{array} \right. \right\},$$

donde $(X, \varphi, \Theta) \sim (X', \varphi', \Theta')$ si $(X, \varphi) \sim (X', \varphi')$ como elementos de $M(R)$ (vea Definición 2.7) y el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & X' \\ \lambda_{\Theta} \downarrow & & \downarrow \lambda_{\Theta'} \\ X^t & \xleftarrow{\Phi^t} & X'^t \end{array}$$

conmuta. Si $R \rightarrow R'$ es un morfismo en Art/k , $P(R) \rightarrow P(R')$ se define por cambio de base y levantamiento (“pull-back”) del divisor asociado a la casi-polarización.

Claramente existe un morfismo de olvido:

$$P \rightarrow M.$$

Sin embargo, no es claro que sea inyectivo, esto es, que P sea un subfunctor de M . Esta propiedad es importante, pues tenemos:

Lema 2.11. Sean $P \subset M$ funtores pro-representables, M pro-representado por $\mathcal{O}$, entonces existe un ideal $\alpha \subset \mathcal{O}$ tal que P es pro-representado por $\mathcal{O}/\alpha$.

El mecanismo apropiado para demostrar que P es un subfunctor de M es el lema de rigidez.

Lema 2.12 (Lema de rigidez, [17, Corolario 6.2]). *Sea S un esquema, X un S -esquema y G un grupo esquema sobre S . Dado un diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[f]{g} & G \\ p \downarrow & \swarrow q & \\ S, & & \end{array}$$

supongamos que p es plano y propio, y que $\forall s \in S$, $H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) \cong \kappa(s)$. Si existe $s \in S$, tal que $f_s = g_s$, entonces existe una sección $\eta : S \rightarrow G$ tal que

$$f = (\eta \circ p) \cdot (g).$$

Utilizando el lema de rigidez y el criterio de Schlessinger (Teorema 2.6), Oort demostró en [19, Teorema 2.3.3, página 242] que P es un subfunctor pro-representable de M .

Teorema 2.13. *Si (X_0, λ_0) es una v.a.c.p. de dimensión g , entonces*

- (i) *el funtor P es un subfunctor de M ,*
- (ii) *P es pro-representable; y si λ_0 es una polarización separable y principal entonces P es pro-representado por:*

$$\mathcal{O}_P = k[[t_{ij}]]_{1 \leq i \leq j \leq g}$$

Observación 2.14. 1) *Recordemos que una polarización se llama principal si el morfismo $\lambda_0 : X_0 \rightarrow X_0^t$ es un isomorfismo.*

2) *Si λ_0 es separable y principal tenemos, en concordancia con el Lema 2.11:*

$$\mathcal{O}_P = \mathcal{O} / \langle t_{ij} - t_{ji} \rangle,$$

donde $\mathcal{O} = k[[t_{ij}]]_{1 \leq i, j \leq g}$ es la k -álgebra completa que pro-representa a M .

3. El funtor P_G

En esta sección adaptamos las definiciones y construcciones de la sección anterior al caso en que la variedad abeliana X_0 admite un grupo de automorfismo no trivial como variedad (casi)polarizada.

Definición 3.1. Sea (X_0, Θ_0) una variedad abeliana casi-polarizada y G_0 un subgrupo de $\text{Aut}(X_0, \Theta_0)$. Definimos el funtor de deformación

$$P_{G_0} : \text{Art}/k \rightarrow \text{Sets}$$

de la siguiente manera:

$$P_{G_0}(R) := \left\{ \text{clases de equivalencia } (X, \varphi, \Theta, G) \left| \begin{array}{l} X \text{ es un e.a.c.p. } /R, \\ \varphi : X \otimes_R k \xrightarrow{\sim} X_0 \\ \lambda_\Theta \otimes_R k = \lambda_{\Theta_0}, \quad G \leq \text{Aut}(X, \Theta) \\ G \otimes_R k = G_0 \end{array} \right. \right\},$$

donde $G \otimes_R k := \{\alpha \otimes_R k \mid \alpha \in G\}$ y $(X, \varphi, \Theta, G) \sim (X', \varphi', \Theta', G')$ si $(X, \varphi, \Theta) \sim (X', \varphi', \Theta')$ como elementos de $P(R)$ (vea Definición 2.10) y $\Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1} \in G'$, para todo $\alpha \in G$.

Si $\varphi : R \rightarrow R'$ es un morfismo en Art/k , entonces $P_{G_0}(\varphi) : P_{G_0}(R) \rightarrow P_{G_0}(R')$ envía (X, φ, Θ, G) a $(X \otimes_R R', \varphi', \Theta \otimes_R R', G \otimes_R R')$, donde $G \otimes_R R' := \{\alpha \otimes_R R' \mid \alpha \in G\}$ y φ' es la composición $(X \otimes_R R') \otimes_{R'} k \cong X \otimes_A k \xrightarrow{\sim} X_0$.

Con esta definición P_{G_0} resulta ser un funtor de deformación y tenemos:

Lema 3.2. P_{G_0} es un subfuntor del funtor P introducido en la Definición 2.10.

Demostración. Debemos ver que si

$$(X, \varphi, \Theta) \sim (X', \varphi', \Theta'),$$

entonces $(X, \varphi, \Theta, G) \sim (X', \varphi', \Theta', G')$. Sabemos que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \Phi : X & \xrightarrow{\cong} & X' \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Spec } R & \end{array}$$

que satisface las condiciones mencionadas en la definición de P (Definición 2.10). Así, basta comprobar que $\Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1} \in G'$, para todo $\alpha \in G$.

De la definición de $P_{G_0}(R)$, se sigue que $G \otimes_R k = G_0 = G' \otimes_R k$. Sea $\alpha \in G$, tenemos:

$$(\Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1}) \otimes_R k = \Phi \otimes_R k \circ \alpha \otimes_R k \circ \Phi^{-1} \otimes_R k = \text{id} \circ \alpha_0 \circ \text{id} = \alpha' \otimes_R k,$$

donde $\alpha_0 \in G_0$, y α' es algún elemento en G' . Finalmente, por el lema de rigidez (vea Lema 2.12)

tenemos que

$$\Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1} = \alpha'. \quad \square$$

El objetivo principal de este artículo es demostrar que P_{G_0} es un funtor pro-representable; para esto necesitamos utilizar varios resultados básicos de la teoría de deformaciones.

La idea principal de la teoría de deformaciones es, dado un epimorfismo pequeño

$$0 \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow R' \rightarrow 0$$

en la categoría Art/k y un diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X' & & \\ \downarrow & & \\ \text{Spec } R' & \longrightarrow & \text{Spec } R \end{array},$$

determinar bajo qué condiciones existe $X \rightarrow \text{Spec } R$ tal que $X \otimes_R R' \simeq X'$. Tal X se denomina, indistintamente, *deformación* o *levantamiento*.

De este modo, definimos:

$$\mathbb{L}(X'; R \rightarrow R') := \left\{ \text{clases de equivalencia } (X, \phi') \left| \begin{array}{l} X \text{ es suave}/S, \\ \phi' : X \otimes_S R' \xrightarrow{\sim} X' \end{array} \right. \right\},$$

el conjunto de clases de equivalencia de levantamientos de $X' \rightarrow S'$ a S , donde $S = \text{Spec } R$ y $S' = \text{Spec } R'$.

En el caso afín, es decir, cuando $X = \text{Spec } B$ y $X' = \text{Spec } B'$, el problema de existencia de otro levantamiento $B_1 \rightarrow B'$ se traduce en completar el diagrama de k -álgebras:

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B' \\ \uparrow & \nearrow & \\ B_1 & & \end{array}.$$

Si la variedad afín X es no singular, siempre es posible encontrar tales levantamientos. Aún más, la diferencia de dos levantamientos es un elemento de $\text{Der}_k(B', B') \otimes I$ (véase, por ejemplo, [16, capítulo 9], [12, capítulo 1.4], y [23, capítulo 1.1]). Esta es la razón por la cual en teoría de deformaciones el haz tangente $\mathcal{T}_{X'}$ juega un papel esencial.

Al pasar al caso no afín debemos amalgamar (“gluing” en inglés) las diferentes deformaciones afines y es así como aparece, de manera natural, $H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes I$.

Al formalizar estas ideas obtenemos:

Proposición 3.3. *i) Si $\mathbb{L} \neq \emptyset$, entonces existe una biyección*

$$\mathbb{L}(X', R \rightarrow R') \simeq H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes I.$$

ii) Un S' -automorfismo $\rho' : X' \rightarrow X'$, satisface que $\rho_0 := \rho' \otimes k$ se levanta a un S -automorfismo $\rho : X \rightarrow X$ si y sólo si al considerar la clase $\eta \in H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes I$ determinada por $(X \rightarrow S) \in \mathbb{L}(X', R' \rightarrow R)$ y el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes I & & \\ \downarrow d\rho_0 & & \\ H^1(X_0, \rho_0^* \mathcal{T}_{X_0}) \otimes I & \xleftarrow{\rho_0^*} & H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes I \end{array}$$

se verifica que:

$$d\rho_0(\eta) = \rho_0^*(\eta).$$

iii) Sin tomar en cuenta la estructura de grupo de las variedades abelianas, existe una biyección:

$$M(\pi)^{-1}(X', \varphi) \xrightarrow{\kappa} \mathbb{L}(X', R \rightarrow R'),$$

para todo $(X', \varphi) \in M(R')$, donde M es el funtor de la Definición 2.7.

Observación 3.4. *1) En el inciso ii) de la Proposición 3.3, abusamos ligeramente de la notación al escribir, por ejemplo, $d\rho_0$ en lugar de $d\rho_0 \otimes \text{id}$. Esta notación se mantendrá en lo que resta del artículo.*

2) La biyección del inciso iii) de la Proposición 3.3 es mucho más natural. Simplemente hay que recordar las definiciones involucradas.

3) En la práctica la condición en el inciso ii) se verifica de la siguiente manera: si denotamos por ρ_0 la representación analítica del automorfismo, entonces la condición de levantamiento se traduce en:

$$T\rho_0 = (\rho_0^t)^{-1}T,$$

con $T = (t_{ij})_{1 \leq i \leq j}$ (véase la discusión que sigue a [20, Proposición 3.1]).

La Proposición 3.3 es un paso previo para comprobar que el funtor P_{G_0} satisface las condiciones de Schlessinger. La demostración se puede encontrar en [19, Lema 2.2.3, Proposiciones 2.2.5 y 2.2.6], y la del inciso ii) en [20, Proposición 3.1], .

Lema 3.5. *Sea*

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\chi} & R \\ \downarrow \rho & & \downarrow \pi \\ T & \xrightarrow{\mu} & R' \end{array} \quad (3.1)$$

un diagrama cartesiano en la categoría Art/k , con π un epimorfismo pequeño. Sea $((Y, \psi_0), (X, \varphi_0)) \in M(T) \times_{M(R')} M(R)$, con $(X', \varphi'_0) = \pi(X, \varphi_0)$. Sea α_Y un $\text{Spec } T$ -automorfismo de Y y α_X un $\text{Spec } R$ -automorfismo de X , tal que $\alpha_Y \otimes_T R' = \alpha_X \otimes_R R'$. Sea (Z, ψ'_0) un levantamiento (Y, ψ_0) de T a Q , entonces existe α_Z , un $\text{Spec } Q$ -automorfismo de Z tal que $\alpha_Z \otimes_Q T = \alpha_Y$.

Demostración. Definimos $I := \text{Ker}(\pi)$, $J := \text{Ker}(\rho)$ y $\alpha_0 := \alpha_Y \otimes_T k$. Notemos que

$$\alpha_0 = (\alpha_Y \otimes_T R') \otimes_{R'} k = (\alpha_X \otimes_R R') \otimes_{R'} k = \alpha_X \otimes_R k.$$

Como π es un epimorfismo pequeño y el diagrama (3.1) es cartesiano, concluimos que ρ es un epimorfismo pequeño y que χ induce un isomorfismo $\chi : J \rightarrow I$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo (vea [19, página 237]):

$$\begin{array}{ccc} H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes_k J & \xrightarrow[\cong]{\chi} & H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes_k I \\ \cong \downarrow \text{I}_Z & & \downarrow \text{I}_{\chi(Z)} \\ \mathbb{L}(Y; Q \rightarrow T) & \longrightarrow & \mathbb{L}(X'; R \rightarrow R') \\ \downarrow \kappa^{-1} & & \downarrow \kappa^{-1} \\ M(Q) & \xrightarrow{\chi} & M(R), \end{array} \quad (3.2)$$

donde la flecha horizontal del medio está dada por cambio de base; χ es $M\chi$ y (Z, ψ'_0) es un levantamiento (Y, ψ_0) de T a Q (tal levantamiento existe, en virtud de [19], último párrafo de la página 236). De [19] sabemos que $\chi(Z, \psi'_0) = (X, \varphi_0)$.

Si denotamos la clase de levantamiento correspondiente a

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } R' & \longrightarrow & \text{Spec } R \end{array}$$

como $\eta \in H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes_k I$ y la correspondiente a

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } T & \longrightarrow & \text{Spec } Q \end{array}$$

como $\xi \in H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes_k J$ (Proposición 3.3 i)), entonces por el diagrama (3.2) se deduce que $\chi(\xi) = \eta$. Notemos que α_X es un levantamiento de $\alpha_X \otimes_R R'$ y por Proposición 3.3 ii), sabemos que esto sucede si y sólo si

$$d\alpha_0(\eta) = \alpha_0^*(\eta).$$

Consideremos ahora el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X_0, \Theta_{X_0}) \otimes J & \xrightarrow{d\alpha_0} & H^1(X_0, \alpha_0^* \Theta_{X_0}) \otimes J & \xleftarrow{\alpha_0^*} & H^1(X_0, \Theta_{X_0}) \otimes J \\ \cong \downarrow \chi & & \cong \downarrow \chi & & \cong \downarrow \chi \\ H^1(X_0, \Theta_{X_0}) \otimes I & \xrightarrow{d\alpha_0} & H^1(X_0, \alpha_0^* \Theta_{X_0}) \otimes I & \xleftarrow{\alpha_0^*} & H^1(X_0, \Theta_{X_0}) \otimes I \end{array} \quad (3.3)$$

De aquí se sigue que $d\alpha_0(\xi) = \alpha_0^*(\xi)$, y así obtenemos un levantamiento α_Z de α_Y . $\square$

Teorema 3.6. *El funtor P_{G_0} introducido en la Definición 3.1 es pro-representable.*

Demostración. Usaremos la notación del Lema 3.5. Por el criterio de Schlessinger (Teorema 2.6) y el hecho de que P_{G_0} es un subfuntor de P (Lema 3.2), se sigue que P_{G_0} es pro-representable si la función

$$P_{G_0}(Q) \rightarrow P_{G_0}(T) \times_{P_{G_0}(R')} P_{G_0}(R)$$

es sobreyectiva. Esta función es la que se obtiene de aplicar P_{G_0} al diagrama cartesiano (3.1) y considerando la propiedad universal del producto cartesiano. Sea

$$((Y, \psi_0, \Theta_Y, G_Y), (X, \varphi_0, \Theta_X, G_X)) \in P_{G_0}(T) \times_{P_{G_0}(R')} P_{G_0}(R)$$

y

$$(X', \varphi'_0, \Theta_{X'}, G_{X'}) = P_{G_0}(\pi)(X, \varphi_0, \Theta_X, G_X).$$

Notemos que, en particular

$$((Y, \psi_0, \Theta_Y), (X, \varphi_0, \Theta_X)) \in P(T) \times_{P(R')} P(R).$$

Por Teorema 2.13 y el criterio de Schlessinger, Teorema 2.6, existe una pre-imagen $(Z, \psi'_0, \Theta_Z) \in P(Q)$ de $((Y, \psi_0, \Theta_Y), (X, \varphi_0, \Theta_X))$ bajo la aplicación

$$P(Q) \rightarrow P(T) \times_{P(R')} P(R).$$

En particular, tenemos que $M\chi(Z, \psi'_0) = (X, \varphi_0)$.

Sea $\alpha_Y \in G_Y$ como $G_Y \otimes_T R' = G_{X'} = G_X \otimes_R R'$, existe un $\alpha_X \in G_X$ tal que

$$\alpha_Y \otimes_T R' = \alpha_X \otimes_R R'.$$

Notemos que α_X es único por el lema de rigidez.

Por el Lema 3.5 existe $\alpha_Z : Z \rightarrow Z$ que es levantamiento de α_Y . Además, por el lema de rigidez y [19, Lema 2.2.2, página 231] este resulta ser un automorfismo de Z como variedad abeliana casi-polarizada (una vez más este α_Z es único por el lema de rigidez).

Concluimos que para todo $\alpha_Y \in G_Y$ existe un único α_Z tal que

$$\alpha_Z \otimes_Q T = \alpha_Y.$$

Definamos G_Z como el conjunto formado por los α_Z . Veamos que G_Z es un grupo. Sean $g, h \in G_Z$, como el cambio de base es un funtor,

$$gh^{-1} \otimes_Q T = (g \otimes_Q T)(h \otimes_Q T)^{-1} \in G_Y,$$

entonces existe $\beta \in G_Z$ tal que $gh^{-1} \otimes_Q T = \beta \otimes_Q T$, así por el lema de rigidez $gh^{-1} = \beta \in G_Z$. Concluimos que G_Z es un subgrupo de $\text{Aut}(Z)$ y $G_Z \otimes_Q T = G_Y$, lo que significa que

$$P_{G_0}\rho(Z, \psi'_0, \Theta_Z, G_Z) = (Y, \psi_0, \Theta_Y, G_Y).$$

Tenemos que

$$(G_Z \otimes_Q R) \otimes_R R' = (G_Z \otimes_Q T) \otimes_T R' = G_Y \otimes_T R' = G_{X'} = G_X \otimes_R R'.$$

Entonces, por el lema de rigidez, $G_Z \otimes_Q R = G_X$, lo que demuestra que

$$P_{G_0}\chi(Z, \psi'_0, \Theta_Z, G_Z) = (X, \varphi_0, \Theta_X, G_X).$$

□

Recordemos que un funtor $F : \text{Art}/k \rightarrow \text{Sets}$ se dice *formalmente suave* si para cualquier epimorfismo $\pi : R \rightarrow R'$ en Art/k la función

$$F(\pi) : F(R) \rightarrow F(R')$$

es sobreyectiva (Definición 2.5).

Teorema 3.7. *Sea (X_0, Θ_0) una variedad abeliana polarizada, tal que el morfismo asociado a la polarización Θ_0 , $\lambda_0 : X_0 \rightarrow X_0^t$ es separable, y sea $G_0 \leq \text{Aut}(X_0, \Theta_0)$, entonces*

$$P_{G_0} : \text{Art}/k \rightarrow \text{Sets}$$

es formalmente suave.

Demostración. Sea $R \xrightarrow{\pi} R'$ un epimorfismo en Art/k y $(X', \varphi', \Theta', G') \in P_{G_0}(R')$. Este epimorfismo puede descomponerse en una sucesión finita de epimorfismos pequeños de la siguiente forma:

$$R = R_0 \xrightarrow{\pi_1} R_1 \xrightarrow{\pi_2} \cdots \xrightarrow{\pi_n} R_n = R'.$$

Si aplicamos P_{G_0} obtenemos:

$$P_{G_0}(R = R_0) \xrightarrow{\pi_1} P_{G_0}(R_1) \xrightarrow{\pi_2} \cdots \xrightarrow{\pi_n} P_{G_0}(R_n = R'),$$

donde abusamos de la notación y entendemos que $P_{G_0}(\pi_i) = \pi_i$. Definimos $\xi_n = (X', \varphi', \Theta', G') \in P_{G_0}(R')$. Supongamos que para todo i existe $\xi_{i-1} \in P_{G_0}(R_{i-1})$ tal que $\pi_i(\xi_{i-1}) = \xi_i$. Entonces

$$\pi(\xi_0) = \pi_n \circ \cdots \circ \pi_1(\xi_0) = \xi_n.$$

Así, es suficiente demostrar que todo epimorfismo pequeño $I \rightarrow R \xrightarrow{\pi} R' \rightarrow 0$ en Art/k , $(X', \varphi', \Theta', G')$ tiene un levantamiento.

Sea $\lambda' : X' \rightarrow X'^t$, el morfismo inducido por Θ' . Sabemos que P_{G_0} es un subfunctor de P y por tanto de M , y que $(X', \varphi') \in M(R')$. Como $\lambda_{\Theta_0} : X_0 \rightarrow X_0^t$ es separable, P es formalmente suave por [19, Teorema 2.4.1]. Por lo tanto, existe $(X, \varphi, \Theta) \in P(R)$ que levanta a (X', φ', Θ') . En particular:

$$\pi(X, \varphi) = (X', \varphi') \in M(R').$$

Por la Proposición 3.3 iii) tenemos la siguiente biyección

$$\pi^{-1}(X', \varphi') \xrightarrow{\kappa} \mathbb{L}(X', R \rightarrow R').$$

Definamos $(X, \psi) := \kappa(X, \varphi) \in \mathbb{L}(X', R \rightarrow R')$. Como $\mathbb{L}(X', R \rightarrow R') \neq \emptyset$, por Proposición 3.3 ii), (X, ψ) induce la siguiente biyección

$$H^1(X_0, \mathcal{T}X_0) \otimes_k I \xrightarrow{\ell_X} \mathbb{L}(X', R \rightarrow R').$$

Definamos $(X_1, \psi_1) := \ell_X(0)$. Por [19, página 245], tenemos:

$$\delta_{X_1}(\Theta') = \delta_X(\Theta') + f \otimes id_I(\ell_X^{-1}(X_1, \psi_1)) = 0,$$

sea L_1 el levantamiento de Θ' , definamos $(X_1, \varphi_1) = \kappa^{-1}(X_1, \psi_1)$. Concluimos que (X', φ', Θ') levanta a (X_1, φ_1, L_1) .

Notemos que para todo $\alpha \in G_0$,

$$d\alpha(0) = \alpha^*(0),$$

así, existe $G_1 \leq \text{Aut}(X_1, L_1)$ (automorfismos de variedad abeliana polarizada), tal que $G_1 \otimes_R R' = G'$. Se concluye que

$$P_{G_0}(\pi)(X_1, \varphi_1, L_1, G_1) = (X', \varphi', \Theta', G'). \quad \square$$

Recordemos que una variedad abeliana polarizada (X_0, Θ_0) es principalmente polarizada si $h^0(X_0, \Theta_0) = 1$, o equivalentemente el morfismo λ_0 inducido por Θ_0 es un isomorfismo (a partir de ahora se denotará como v.a.p.p.). Sea $G_0 \leq \text{Aut}(X_0, \Theta_0)$ y denotemos por $V = T_0X$ el espacio tangente de X en el 0.

Teorema 3.8. *Sea (X_0, Θ_0) una variedad abeliana polarizada, tal que $\lambda_0 : X_0 \rightarrow X_0^t$ es separable y sea $G_0 \leq \text{Aut}(X_0, \Theta_0)$, entonces:*

- i) P_{G_0} es pro-representado por $k[[t_1, \dots, t_m]]$, donde $m := \dim_k P_{G_0}(k[\epsilon])$.
- ii) Si además (X_0, Θ_0) es principalmente polarizada, entonces

$$m = \dim_k (\text{Sym}^2 T_0X)^{G_0},$$

donde G_0 actúa sobre $\text{Sym}^2 T_0X$ con la acción inducida por la representación analítica.

Demostración. La parte i) es consecuencia inmediata de los Teoremas 3.7 y 2.6.

Para la parte ii) comenzamos con la siguiente observación: como por hipótesis (X_0, Θ_0) es principalmente polarizada, tenemos un isomorfismo de espacios vectoriales $d\lambda_0 : V \rightarrow V^t$. De este modo obtenemos:

$$V \otimes V \simeq V \otimes V^t \simeq \text{End}(V, V).$$

Así, podemos definir $\Sigma \subset V \otimes V^t$, como:

$$\Sigma := (id \otimes d\lambda_0)(\text{Sym}^2 V).$$

Si fijamos una base e_i de V , la correspondiente base $d\lambda_0(e_i)$ de V^t y su base dual en V , entonces los elementos de Σ se corresponden en $\text{End}(V, V)$ con matrices simétricas.

Oort demostró en [19, página 237] que

$$M(k[\epsilon]) \cong H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \cong V \otimes V^t,$$

y que $P(k[\epsilon]) = \Sigma \subseteq V \otimes V^t$. De este modo, $\eta \in \Sigma$ satisface que $\eta \in P_{G_0}(k[\epsilon])$ si y sólo si podemos levantar G_0 a $k[\epsilon]$. Por la Proposición 3.3 ii) esto sucede si y sólo si:

$$\forall \rho \in G_0, \quad \eta d\rho = (d\rho^t)^{-1} \eta.$$

Es decir,

$$\eta = d\rho^t \eta d\rho,$$

o equivalentemente, $\eta \in (\Sigma)^{G_0}$. Así concluimos que:

$$P_{G_0}(k[\epsilon]) = (\text{Sym}^2 V)^{G_0}.$$

□

Una vez establecido el Teorema 3.8, podemos calcular fórmulas explícitas para la dimensión del álgebra que pro-representa a P_{G_0} .

Corolario 3.9. *Si $\text{char}(k) = 0$, entonces P_{G_0} es pro-representado por $k[[t_1, \dots, t_m]]$, con*

$$m = \frac{1}{|G_0|} \sum_{g \in G_0} \chi_{\text{Sym}^2 V}(g) = \frac{1}{|G_0|} \sum_{g \in G_0} \frac{\chi_V^2(g) + \chi_V(g^2)}{2},$$

donde χ_V y $\chi_{\text{Sym}^2 V}$ son, respectivamente, los caracteres de las representaciones V y $\text{Sym}^2 V$.

Demostración. Consideremos una representación $G_0 \rightarrow GL(V)$.

Utilizando la Proposición 2.8 de [7] y que $\text{char}(k) = 0$ obtenemos

$$\dim(V^{G_0}) = \frac{1}{|G_0|} \sum_{g \in G_0} \chi_V(g).$$

Como $\text{char}(k) = 0$ y k es algebraicamente cerrado, $g : V \rightarrow V$ admite una forma canónica de Jordan y todo $g : V \rightarrow V$ es diagonalizable. Por esta razón podemos replicar la demostración de la Proposición 2.1 de [7] para deducir que

$$\chi_{\text{Sym}^2 V}(g) = \frac{\chi_V^2(g) + \chi_V(g^2)}{2}.$$

□

Ejemplo 3.10. *Sea E una curva elíptica suave. Consideremos la variedad abeliana $X = E \times E \times E$. Consideremos la acción del grupo simétrico S_3 sobre X que permuta los factores. Denotemos $\beta =$*

(123) y $\alpha = (12)$. La representación analítica de β es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

y la de α es:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de β es $P_\beta(\lambda) = \det(\beta - \lambda \text{id}) = 1 - \lambda^3$, sus valores principales son $1, \xi$ y ξ^2 , donde ξ es una 3-raíz primitiva de la unidad; y sus vectores principales son $v_1 := (1, 1, 1)$, $v_2 := (1, \xi^2, \xi)$, y $v_3 := (1, \xi, \xi^2)$. Como $\alpha\beta^2 = \beta\alpha$, tenemos que $\alpha(v_1) = v_1$, $\alpha(v_2) = \xi^2 v_3$ y $\alpha(v_3) = \xi v_2$.

Así, si fijamos en T_0X la base que diagonaliza a β , tenemos que en esta base, $\beta = \text{diag}(1, \xi, \xi^2)$ y

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \\ 0 & \xi^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $T = (t_{ij})_{1 \leq i \leq j}$. Las condiciones de levantamiento de la Proposición 3.3 ii) (Observación 3.4 iii) se traducen en:

$$T\beta = \beta^{-1}T, \quad T\alpha = \alpha^t T,$$

donde usamos que $\beta^t = \beta$ y $\alpha^{-1} = \alpha$.

Estas dos ecuaciones dan como resultado:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{23} \\ 0 & t_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Así obtenemos que $\dim_k P_{S_3}(k[\epsilon]) = 2$. Por supuesto, esta dimensión también puede ser calculada usando el Corolario 3.9.

De este modo, en el moduli local para esta acción existen más variedades que las inducidas por la deformación de la curva E .

Un árbitro anónimo ha sugerido una posible conexión entre este ejemplo y el concepto de trialidad (véase por ejemplo, [1]). Trataremos de explorar esta sugerencia en el futuro.

Referencias

- [1] A. Antón-Sancho, “Triality and automorphisms of principal bundles moduli spaces,” *Adv. Geom.*, vol. 24, no. 3, pp. 421–435, 2024, doi: 10.1515/advgeom-2024-0013.
- [2] R. Auffarth, A. Carocca, y R. Rodríguez, “Counting polarizations on abelian varieties with group action,” 2024, *arXiv:2412.01676*.
- [3] H. Bennama y J. Bertin, “Remarques sur les varietés abéliennes avec un automorphisme d’ordre premier,” *Manuscripta Math.*, vol. 94, no. 4, pp. 409–425, 1997, doi: 10.1007/BF02677863.
- [4] C. Birkenhake y H. Lange, *Complex abelian varieties*, 2nd ed., ser. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 2004, vol. 302, doi: 10.1007/978-3-662-06307-1.
- [5] A. Carocca, S. Reyes-Carocca, y R. E. Rodríguez, “Abelian varieties and Riemann surfaces with generalized quaternion group action,” *J. Pure Appl. Algebra*, vol. 227, no. 11, 2023, Art. ID 107398, doi: 10.1016/j.jpaa.2023.107398.
- [6] B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S. L. Kleiman, N. Nitsure, y A. Vistoli, *Fundamental algebraic geometry*, ser. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005, vol. 123, doi: 10.1090/surv/123.
- [7] W. Fulton y J. Harris, *Representation theory*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991, vol. 129, doi: 10.1007/978-1-4612-0979-9.
- [8] V. Gonzalez-Aguilera, J. M. Muñoz Porras, y A. G. Zamora, “On the irreducible components of the singular locus of A_g ,” *J. Algebra*, vol. 240, no. 1, pp. 230–250, 2001, doi: 10.1006/jabr.2000.8707.
- [9] V. González-Aguilera, J. M. Muñoz Porras, y A. G. Zamora, “On the 0-dimensional irreducible components of the singular locus of $\mathcal{A}_g$,” *Arch. Math. (Basel)*, vol. 84, no. 4, pp. 298–303, 2005, doi: 10.1007/s00013-004-1193-x.
- [10] V. González-Aguilera, J. M. Muñoz-Porras, y A. G. Zamora, “On the irreducible components of the singular locus of A_g . II,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 140, no. 2, pp. 479–492, 2012, doi: 10.1090/S0002-9939-2011-10933-X.
- [11] A. Grothendieck y J. P. Murre, *The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme*, ser. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, vol. 208.

- [12] R. Hartshorne, *Deformation theory*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2010, vol. 257, doi: 10.1007/978-1-4419-1596-2.
- [13] K. Kodaira y D. C. Spencer, “On deformations of complex analytic structures. I, II,” *Ann. of Math. (2)*, vol. 67, pp. 328–466, 1958, doi: 10.2307/1970009.
- [14] H. Lange, R. E. Rodríguez, y A. M. Rojas, “Polarizations on abelian subvarieties of principally polarized abelian varieties with dihedral group actions,” *Math. Z.*, vol. 276, no. 1-2, pp. 397–420, 2014, doi: 10.1007/s00209-013-1206-1.
- [15] D. Lee y C. Ray, “Automorphisms of abelian varieties and principal polarizations,” *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, vol. 71, no. 1, pp. 483–494, 2022, doi: 10.1007/s12215-020-00590-7.
- [16] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, ser. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1986, vol. 8.
- [17] D. Mumford, J. Fogarty, y F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, 3rd ed., ser. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2). Springer-Verlag, Berlin, 1994, vol. 34.
- [18] D. Mumford, *Abelian varieties*, ser. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Oxford University Press, London, 1970, vol. 5.
- [19] F. Oort, “Finite group schemes, local moduli for abelian varieties, and lifting problems,” *Compositio Math.*, vol. 23, pp. 265–296, 1971.
- [20] F. Oort, “Singularities of coarse moduli schemes,” in *Séminaire d’Algèbre Paul Dubreil, 29ème année (Paris, 1975–1976)*, ser. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin-New York, 1977, vol. 586, pp. 61–76.
- [21] S. Reyes-Carocca y R. E. Rodríguez, “On the connectedness of the singular locus of the moduli space of principally polarized abelian varieties,” *Mosc. Math. J.*, vol. 18, no. 3, pp. 473–489, 2018, doi: 10.17323/1609-4514-2018-18-3-473-489.
- [22] M. Schlessinger, “Functors of Artin rings,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 130, pp. 208–222, 1968, doi: 10.2307/1994967.
- [23] E. Sernesi, *Deformations of algebraic schemes*, ser. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 2006, vol. 334.
- [24] T. K. Srivastava, “Lifting automorphisms on Abelian varieties as derived autoequivalences,” *Arch. Math. (Basel)*, vol. 116, no. 5, pp. 515–527, 2021, doi: 10.1007/s00013-020-01564-y.