

Análisis matemático de un problema inverso para un sistema de reacción-difusión originado en epidemiología

ANÍBAL CORONEL^{1,✉} FERNANDO HUANCAS² ESPERANZA LOZADA¹ JORGE TORRES¹ 

¹ GMA, Departamento de Ciencias
Básicas, Facultad de Ciencias,
Universidad del Bío-Bío, Campus
Fernando May, Chillán, Chile.
acoronel@ubiobio.cl[✉]
elozada@ubiobio.cl
jotorres@ubiobio.cl

² Departamento de Matemática, Facultad
de Ciencias Naturales, Matemáticas y del
Medio Ambiente, Universidad
Tecnológica Metropolitana, Las Palmeras
3360, Ñuñoa-Santiago 7750000, Chile.
fhuancas@utem.cl

RESUMEN

En este artículo centramos nuestro interés en el estudio de un problema inverso que surge en el modelamiento matemático de la transmisión de enfermedades infectocontagiosas. El modelo matemático viene dado por un problema con condiciones iniciales y en la frontera para un sistema de difusión-reacción. Mientras tanto, el problema inverso consiste en la determinación de las tasas de transmisión y de recuperación de la enfermedad, a partir de la medición observada de la solución del problema directo en un tiempo fijo. Las incógnitas del problema inverso aparecen en el modelo como coeficientes del término de reacción. Formulamos el problema inverso como un problema de optimización para un funcional de costo adecuado. Luego, se deduce la existencia de soluciones del problema inverso probando la existencia de un minimizador para el funcional de costo. Establecemos la unicidad del problema de identificación. La unicidad es una consecuencia de la condición necesaria de optimalidad de primer orden y una estabilidad de las incógnitas del problema inverso con respecto a las observaciones. Además se realiza una aproximación numérica y simulaciones para el problema inverso.

Palabras clave: Problema de identificación, problema de control, SIS, problema inverso.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 35B45, 35Q35, 76B03, 76D03.

Publicado: 15 de octubre de 2025

Aceptado: 29 de septiembre de 2025

Recibido: 30 de noviembre de 2024



©2025 A. Coronel *et al.* Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia
Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

Mathematical analysis of an inverse problem for a reaction-diffusion system originated in epidemiology

ANÍBAL CORONEL^{1,✉} FERNANDO HUANCAS² ESPERANZA LOZADA¹ JORGE TORRES¹ 

¹ GMA, Departamento de Ciencias
Básicas, Facultad de Ciencias,
Universidad del Bío-Bío, Campus
Fernando May, Chillán, Chile.
acoronel@ubiobio.cl✉
elozada@ubiobio.cl
jotorres@ubiobio.cl

² Departamento de Matemática, Facultad
de Ciencias Naturales, Matemáticas y del
Medio Ambiente, Universidad
Tecnológica Metropolitana, Las Palmeras
3360, Ñuñoa-Santiago 7750000, Chile.
fhuancas@utem.cl

ABSTRACT

In this article we focus our interest on the study of an inverse problem arising in the mathematical modeling of disease transmission. The mathematical model is given by an initial boundary value problem for a reaction diffusion system. Meanwhile, the inverse problem consists in the determination of the disease and recovery transmission rates from observed measurement of the direct problem solution at some fixed time. The unknowns of the inverse problem are coefficients of the reaction term. We formulate the inverse problem as an optimization problem for an appropriate cost functional. Then, the existence of solutions of the inverse problem is deduced by proving the existence of a minimizer for the cost functional. We establish the uniqueness of identification problem. The uniqueness is a consequence of the first order necessary optimality condition and a stability of the inverse problem unknowns with respect to the observations. Moreover, we develop a numerical approximation and simulations of the inverse problem.

Keywords and Phrases: Identification problem, control problem, SIS, inverse problem.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 35B45, 35Q35, 76B03, 76D03.

Published: 15 October, 2025

Accepted: 29 September, 2025

Received: 30 November, 2024



©2025 A. Coronel et al. This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

1. Introducción

El modelamiento matemático de la transmisión de enfermedades infectocontagiosas es un área de investigación activa de la biología matemática [1, 2, 4, 5, 16, 18, 19, 22, 26, 29, 31, 34, 35]. Particularmente para la aplicación de sistemas de reacción-difusión a sistemas originados en ecología y epidemiología señalamos los siguientes trabajos [6, 7, 17, 37]. En la actualidad, se utilizan varios enfoques para construir los modelos matemáticos en epidemiología matemática. A pesar de los diferentes tipos de tales modelos, y de manera análoga a los sistemas bioquímicos, podemos distinguir cinco pasos comunes en los procesos de modelamiento [9]: recopilación y análisis de datos e información experimentales sobre la enfermedad específica; selección de la teoría matemática que se utilizará en la formulación del modelo; el análisis matemático del buen planteamiento del modelo; la calibración o identificación de parámetros del modelo; y la validación y el refinamiento del modelo. Además, observamos que el modelamiento es un proceso cíclico en lugar de lineal: todas las suposiciones hechas en los pasos anteriores se reconsideran y refinan una vez finalizado el proceso de modelamiento. Podemos mejorar el modelo introduciendo nuevas hipótesis, diseñar nuevos experimentos, realizar predicciones y profundizar el análisis de cada paso. Así, en particular, nos interesa el análisis de calibración o identificación de parámetros del modelo. Para ser más precisos, el objetivo de este artículo es proporcionar un marco para resolver el problema inverso que surge en el paso de la calibración del modelo asumiendo que el modelo matemático es un problema con condiciones iniciales y en la frontera para un sistema de reacción-difusión.

Precisemos el modelo matemático o problema directo. Consideramos que el proceso de la enfermedad infecciosa se desarrolla en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) y que su dinámica se describe mediante un modelo de reacción-difusión SIS, donde la densidad de población de individuos susceptibles e infectados en el momento t y la ubicación $\mathbf{x}$ están dados por $S(\mathbf{x}, t)$ y por $I(\mathbf{x}, t)$, respectivamente. Se considera que la matriz de difusión es igual a la identidad. Suponemos que el proceso de infección se da por la interacción de individuos susceptibles e infectados el cual es modelado en el punto $\mathbf{x}$ y tiempo t por la “ley potencial” $\beta(\mathbf{x})S^m(\mathbf{x}, t)I^n(\mathbf{x}, t)$, donde β es la tasa de transmisión de enfermedades y $m, n \in]0, 1[$ son algunos parámetros dados (fijos). El proceso de recuperación está representado por $\gamma(\mathbf{x})I(\mathbf{x}, t)$ con γ la tasa de recuperación de la enfermedad. Por lo tanto, el problema directo se define de la siguiente manera: Dado el conjunto de funciones $\{\beta, \gamma, S_0, I_0\}$ encuentre las funciones S y I que satisfagan el siguiente problema con condiciones iniciales y valores en la frontera

$$S_t - \Delta S = -\beta(\mathbf{x})S^m I^n + \gamma(\mathbf{x})I, \quad \text{en } Q_T := \Omega \times [0, T], \quad (1.1)$$

$$I_t - \Delta I = \beta(\mathbf{x})S^m I^n - \gamma(\mathbf{x})I, \quad \text{en } Q_T, \quad (1.2)$$

$$\nabla S \cdot \mathbf{n} = \nabla I \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma := \partial\Omega \times [0, T], \quad (1.3)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}), \quad \text{en } \Omega, \quad (1.4)$$

$$I(\mathbf{x}, 0) = I_0(\mathbf{x}), \quad \text{en } \Omega, \quad (1.5)$$

donde $\partial\Omega$ es el la frontera de Ω y $\mathbf{n}$ es el vector unitario exterior a $\partial\Omega$. Las condiciones de contorno (1.3) y las funciones S_0 y I_0 modelan las condiciones iniciales. La suposición que β y γ son funciones que dependen de la posición espacial es utilizada en diversos trabajos, por ejemplo en [7,36,37]. Desde el punto de vista biológico es más natural asumir que estos coeficientes dependen de la variable temporal, tal como es considerado para el modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias estocásticas originado en la dinámica de la influenza en [28]. Sin embargo, en el mejor de nuestro conocimiento no es aún utilizado en los modelos de reacción-difusión.

El problema inverso consiste en la determinación de las funciones de tasa β y γ en el modelo SIS (1.1)-(1.5), a partir de medidas observadas tanto de S como de I en tiempo $t = T$; las cuales están dadas por las funciones S^{obs} e I^{obs} , definidas sobre Ω , respectivamente. Entonces, podemos definir el problema inverso de la siguiente manera: Dado el conjunto de funciones $\{S_0, I_0, S^{obs}, I^{obs}\}$ definidas en Ω , encontrar las funciones β y γ , tales que las funciones S e I sean solución del problema (1.1)-(1.5) y satisfacen la condición final de sobre especificación $S(\mathbf{x}, T) = S^{obs}(\mathbf{x})$, $I(\mathbf{x}, T) = I^{obs}(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \in \Omega$. Se observa que la igualdad se satisface solo en el caso que (S^{obs}, I^{obs}) sean alcanzables para algún (β, γ) , siendo más esperable el caso en el cual $(S, I)(\cdot, T)$ es lo más cercano posible a (S^{obs}, I^{obs}) . De hecho, para precisar el análisis del problema inverso, consideramos una reformulación operativa, como el siguiente problema de optimización

$$\inf J(\beta, \gamma) \quad \text{sujeto a } (S_{\beta, \gamma}, I_{\beta, \gamma}) \text{ solución de (1.1)-(1.5),} \quad (1.6)$$

donde

$$J(\beta, \gamma) := \frac{1}{2} \|(S, I)(\cdot, T) - (S^{obs}, I^{obs})\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{\delta}{2} \|\nabla(\beta, \gamma)\|_{L^2(\Omega)^2}^2, \quad \delta > 0, \quad (1.7)$$

es una función definida en el conjunto admisible

$$U_{ad}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega) \cap H^{[d/2]+1}(\Omega)^2, \quad (1.8)$$

$$\mathcal{A}(\Omega) = \left\{ (\beta, \gamma) \in C^\alpha(\bar{\Omega})^2 : \text{Ran}(\beta) \times \text{Ran}(\gamma) \subseteq [\underline{b}, \bar{b}] \times [\underline{r}, \bar{r}] \subset (0, \infty)^2 \right\}, \quad (1.9)$$

Aquí, $H^m(\Omega)$ y $C^\alpha(\bar{\Omega})$ denotan los espacios estándar de Sobolev y Hölder $W^{m,2}(\Omega)$ y $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, respectivamente; $L^2(\Omega)^2 = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, definiendo similarmente los otros espacios como $H^{[d/2]+1}(\Omega)^2$ y $C^\alpha(\bar{\Omega})^2$; y $\text{Ran}(f)$ denotan el rango de la función f . La construcción de $U_{ad}(\Omega)$ se desarrolló recientemente en [12] y también notamos que $U_{ad}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$ cuando $d = 1$ coincidiendo con el conjunto admisible considerado por Xiang y Liu en [36], consulte también [11] para un caso más general.

El resultado principal de este trabajo son las condiciones para la teoría del buen planteamiento del problema inverso. Más precisamente, probamos el siguiente teorema:

Teorema 1.1. Consideremos $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+^2$ (fijo) y definamos el subconjunto del conjunto admisible

$$\mathcal{U}_{\mathbf{c}}(\Omega) = \left\{ (\beta, \gamma) \in U_{ad}(\Omega) : \|\beta\|_{L^1(\Omega)} = c_1 \text{ y } \|\gamma\|_{L^1(\Omega)} = c_2 \right\}. \quad (1.10)$$

Considere que el conjunto abierto acotado y convexo Ω es tal que $\partial\Omega$ es de clase C^1 y las condiciones iniciales S_0 y I_0 son funciones que pertenecen a $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ y satisfacen las desigualdades

$$S_0(\mathbf{x}) \geq 0, \quad I_0(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \int_{\Omega} I_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} > 0, \quad S_0(\mathbf{x}) + I_0(\mathbf{x}) \geq \phi_0 > 0, \quad (1.11)$$

sobre Ω , para alguna constante positiva ϕ_0 . Además, suponga que las funciones de observación S^{obs} y I^{obs} son funciones que pertenecen a $L^2(\Omega)$. Entonces, existe al menos una solución de (1.6) y existen $\Theta \in \mathbb{R}^+$ tal que la solución de (1.6) es única (salvo una constante aditiva) en $\mathcal{U}_{\mathbf{c}}(\Omega)$ para cualquier parámetro de regularización $\delta > \Theta$.

En términos generales para obtener la unicidad del problema de optimización juega un rol muy relevante, desde el punto de vista analítico y numérico, el término de regularización en la función de costo definida en (1.7). En otras palabras, sin este término es esperable que se pierda la unicidad, tal como se muestra en el Ejemplo 1 presentado en la Sección 4.1. En este punto se debe observar que una regularización natural es considerar $\|(\beta, \gamma)\|_{L^2(\Omega)^2}^2$ en vez de $\|\nabla(\beta, \gamma)\|_{L^2(\Omega)^2}^2$. Sin embargo esto se descarta, debido a dos dificultades: no es claro como utilizarlo para el análisis matemático y debido a que en la práctica y en presencia de casos extremos puede converger a los coeficientes de norma L^2 mínima y que no necesariamente resuelve el problema inverso. Sin embargo, tal como se presenta en el Ejemplo 2 (Ver Sección 4.2) se puede definir un término de regularización que incorpore la condición que $(\beta, \gamma) \in \mathcal{U}_{\mathbf{c}}$ con $\mathbf{c}$ fijo, tal como lo establece el Teorema 1.1. Una discusión general sobre otras formas de regularización se puede consultar en [21].

Por otro lado, recordamos que los problemas inversos en las ecuaciones de reacción-difusión y los sistemas se han abordado en la literatura de las últimas décadas, por ejemplo [8, 14, 15, 27, 30, 32, 36]. En [8] los autores estudian la identificación de $q(x)$ en la ecuación $u_t = \Delta u + q(x)u$ con condición de frontera de Dirichlet y a partir de los datos de medición finales $u(x, T)$. Ellos prueban la existencia de soluciones y desarrollan una solución del problema inverso utilizando un problema de optimización. Los autores de [15] consideran la reacción-difusión no lineal ecuación $u_t = \Delta u + p(x)f(u)$ con f una función no lineal y estudian la identificación de p , obteniendo algunos resultados para la existencia y la unicidad local. Ahora, en [32] los autores estudian el problema inverso para un sistema de reacción-difusión con un término de reacción lineal y obtienen la existencia y unicidad local del problema inverso. Más recientemente, en [36] los autores han estudiado el caso unidimensional del problema inverso considerado en este trabajo. Obtienen un resultado para la existencia y unicidad local de la solución asumiendo que el proceso de infección está modelado por un función de transmisión dependiente de la frecuencia en lugar de la función de ley de potencia.

Ahora, los artículos [14, 27, 30] se centran en problemas inversos en sistemas epidémicos, pero son de un tipo diferente al considerado en este trabajo. Por tanto, el Teorema 1.1 es una extensión al caso multidimensional de los resultados unidimensional obtenidos en [36].

Desde otra perspectiva, se observa que el estudio de los problemas de control óptimo similares a los estudiados en este trabajo, y suponiendo que las condiciones iniciales y los coeficientes se encuentran en espacios de funciones con menor regularidad ha sido recientemente estudiado utilizando el formalismo de Dubovitskii–Milyutin [10, 13]. En consecuencia, es esperable que los resultados de este trabajo se puedan extender a espacios de Sobolev.

El resto del artículo está organizado en tres secciones. En la sección 2 presentamos algunos resultados para la solución directa del problema, introducimos el estado adjunto y las condiciones de optimalidad necesarias, y demostramos un resultado de estabilidad. En la sección 3 presentamos la demostración del Teorema 1.1. En la sección 4 se discute la aproximación numérica y se realizan simulaciones numéricas.

2. Preliminares

2.1. Solución del problema directo

El buen planteamiento del problema directo (1.1)-(1.5) viene dado por el siguiente resultado.

Teorema 2.1. *Considere que Ω, S_0 y I_0 satisfacen las hipótesis del Teorema 1.1. Si $(\beta, \gamma) \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \times C^\alpha(\bar{\Omega})$, el problema con condiciones iniciales y en la frontera (1.1)-(1.5) admite una solución clásica positiva única (S, I) , tal que S y I pertenecen a $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$ y también S y I son acotadas uniformemente sobre $\bar{Q}_T$, para cualquier $T \in \mathbb{R}^+$.*

La existencia y la unicidad puede ser desarrollado por la teoría de Schauder para ecuaciones parabólicas [23–25]. Hay que aclarar que la noción de solución para ecuaciones parabólicas con coeficientes y condiciones iniciales en espacios de Hölder se entiende en un sentido generalizado. En tal sentido no se necesita las condiciones de compatibilidad de las condiciones iniciales y en la frontera que son necesarias para las soluciones en un contexto de espacios de funciones regulares, para mayores detalles consultar [23]. Mientras tanto, el comportamiento positivo de la solución es una consecuencia del principio máximo. En efecto, si denotamos por N la población total, es decir, $N(\mathbf{x}, t) = S(\mathbf{x}, t) + I(\mathbf{x}, t)$. Entonces, del sistema (1.1)-(1.5), podemos deducir que N satisface el siguiente problema con condiciones iniciales y en la frontera

$$\begin{aligned}
 N_t - \Delta N &= 0, & \text{en } Q_T, \\
 \nabla N \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma, \\
 N(\mathbf{x}, 0) &= S_0(\mathbf{x}) + I_0(\mathbf{x}), & \text{en } \Omega.
 \end{aligned}$$

Por el principio máximo de ecuaciones parabólicas y la hipótesis (1.11) tenemos que $N(\mathbf{x}, t) \geq S_0(\mathbf{x}) + I_0(\mathbf{x}) \geq \phi_0 > 0$ sobre Q_T .

Corolario 2.2. *Considere que Ω , S_0 e I_0 satisfacen las hipótesis del Teorema 2.1. Si $(\beta, \alpha) \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \times C^\alpha(\bar{\Omega})$ y (S, I) es la solución del problema con condiciones iniciales y en la frontera (1.1)-(1.5), entonces las estimaciones $0 < \mathbb{S}_m \leq S(\mathbf{x}, t) \leq \mathbb{S}_M$, y $0 < \mathbb{I}_m \leq I(\mathbf{x}, t) \leq \mathbb{I}_M$, son válidos en $\bar{Q}_T$, para algunas constantes estrictamente positivas $\mathbb{S}_m, \mathbb{S}_M, \mathbb{I}_m$, e $\mathbb{I}_M$.*

2.2. Sistema adjunto

Consideremos que $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$ es una solución del problema de control óptimo (1.6) y $(\bar{S}, \bar{I})$ es la correspondiente solución de (1.1)-(1.5) con $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$ en lugar de (β, γ) . Luego introducimos las variables adjuntas (p_1, p_2) , es decir, la solución del sistema adjunto que viene dada por el siguiente problema retrógrado con valores en la frontera

$$(p_1)_t + \Delta p_1 = m\bar{\beta}(\mathbf{x})\bar{S}^{m-1}\bar{I}^n(p_1 - p_2), \quad \text{en } Q_T, \quad (2.1)$$

$$(p_2)_t + \Delta p_2 = n\bar{\beta}(\mathbf{x})\bar{S}^m\bar{I}^{n-1}(p_1 - p_2) - \bar{\gamma}(\mathbf{x})(p_1 - p_2), \quad \text{en } Q_T, \quad (2.2)$$

$$\nabla p_1 \cdot \mathbf{n} = \nabla p_2 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.3)$$

$$p_1(\mathbf{x}, T) = \bar{S}(\mathbf{x}, T) - S^{obs}(\mathbf{x}), \quad \text{en } \Omega, \quad (2.4)$$

$$p_2(\mathbf{x}, T) = \bar{I}(\mathbf{x}, T) - I^{obs}(\mathbf{x}), \quad \text{en } \Omega. \quad (2.5)$$

La existencia de soluciones generalizadas (notar que $(S^{obs}, I^{obs}) \in L^2(\Omega)^2$) para el sistema (2.1)-(2.5) puede ser desarrollado por argumentos similares a un resultado similar presentados en [3]. Ahora, para nuestro propósito, necesitamos algunas estimaciones a priori dadas en el siguiente resultado.

Lema 2.3. *Considere que $\Omega, S_0, I_0, S^{obs}$ y I^{obs} , satisfacen las hipótesis del Teorema 1.1. Además, considere que $(\bar{\beta}, \bar{\gamma}) \in U_{ad}$ es una solución de (1.6), y $(\bar{S}, \bar{I})$ es una solución de (1.1)-(1.5) con $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$ en lugar de (β, γ) . Entonces, la solución del sistema adjunto (2.1)-(2.5) satisface las siguientes estimaciones*

$$\|(p_1, p_2)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq C, \quad \|(p_1, p_2)(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)^2} \leq C, \quad (2.6)$$

$$\|\Delta(p_1, p_2)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^2} \leq C, \quad \|(p_1, p_2)(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)^2} \leq C, \quad (2.7)$$

para $t \in [0, T]$ y una constante positiva genérica C .

Demostración. En términos generales, la demostración de este teorema se realiza en dos pasos principales: primero se transforma el sistema adjunto (2.1)-(2.5) en un problema de valores iniciales y en la frontera y luego aplicando estimaciones de energía. En efecto, consideremos el cambio de

variable $\tau = T - t$ para $t \in [0, T]$ y también considera la notación

$$w_i(\mathbf{x}, \tau) = p_i(\mathbf{x}, T - \tau), \quad i = 1, 2, \quad S^*(\mathbf{x}, \tau) = \bar{S}(\mathbf{x}, T - \tau), \quad I^*(\mathbf{x}, \tau) = \bar{I}(\mathbf{x}, T - \tau).$$

Entonces, el sistema adjunto (2.1)-(2.5) se puede reescribir de la siguiente manera

$$(w_1)_\tau - \Delta w_1 = -m\bar{\beta}(\mathbf{x})(S^*)^{m-1}(I^*)^n(w_1 - w_2), \quad \text{en } Q_T, \quad (2.8)$$

$$(w_2)_\tau - \Delta w_2 = -n\bar{\beta}(\mathbf{x})(S^*)^m(I^*)^{n-1}(w_1 - w_2) + \bar{\gamma}(\mathbf{x})(w_1 - w_2), \quad \text{en } Q_T, \quad (2.9)$$

$$\nabla w_1 \cdot \mathbf{n} = \nabla w_2 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.10)$$

$$w_1(\mathbf{x}, 0) = \bar{S}(\mathbf{x}, T) - S^{obs}(\mathbf{x}), \quad w_2(\mathbf{x}, 0) = \bar{I}(\mathbf{x}, T) - I^{obs}(\mathbf{x}), \quad \text{en } \Omega. \quad (2.11)$$

Ahora, aplicando estimaciones de energía obtenemos para w_i las cuales conducen a las desigualdades (2.6) y (2.7).

Para probar (2.6) procedemos como sigue. Multiplicamos (2.8) por w_1 y (2.9) por w_2 , integramos sobre Ω y usamos las fórmulas de Green, para obtener

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (w_1)_\tau w_1 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nabla w_1)^2 d\mathbf{x} &= -m \int_{\Omega} \bar{\beta}(\mathbf{x})(S^*)^{m-1}(I^*)^n w_1^2 d\mathbf{x} \\ &\quad + m \int_{\Omega} \bar{\beta}(\mathbf{x})(S^*)^{m-1}(I^*)^n w_1 w_2 d\mathbf{x}, \\ \int_{\Omega} (w_2)_\tau w_2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nabla w_2)^2 d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} [n\bar{\beta}(\mathbf{x})(S^*)^m(I^*)^{n-1} - \bar{\gamma}(\mathbf{x})] w_1 w_2 d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} [n\bar{\beta}(\mathbf{x})(S^*)^m(I^*)^{n-1} - \bar{\gamma}(\mathbf{x})] w_2^2 d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

respectivamente. Luego, sumando las igualdades, aplicando la desigualdad de Cauchy, reordenando algunos términos y aplicando el Corolario 2.2, podemos deducir la siguiente estimación

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\|(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right) + \|\nabla(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \hat{C} \left[\|(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right]. \quad (2.12)$$

con

$$\hat{C} = \max \left\{ \frac{3\hat{C}_1 + \hat{C}_2}{2}, \frac{\hat{C}_1 + 3\hat{C}_2}{2} \right\}, \quad \hat{C}_1 = \bar{b} m \mathbb{S}_m^{m-1} \mathbb{I}_M^n, \quad \hat{C}_2 = \bar{b} n \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_n^{n-1} + \bar{r}. \quad (2.13)$$

La notación $\bar{b}$ y $\bar{r}$ es definida en (1.9). Entonces, de (2.12) y la desigualdad de Gronwall, obtenemos

$$\|(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \|(w_1, w_2)(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 e^{2\hat{C}\tau}, \quad (2.14)$$

lo que implica la primera estimación en (2.6). Ahora, de (2.12) y (2.14), tenemos que

$$\|\nabla(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \hat{C} e^{2\hat{C}\tau} \|(w_1, w_2)(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2.$$

Así, por la definición de la norma de $H_0^1(\Omega)$ deducimos la segunda estimación en (2.6).

La demostración de (2.7) se realiza como sigue. Por otro lado, usando el hecho de que

$$\int_{\Omega} (w_i)_{\tau} \Delta w_i \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla[(w_i)_{\tau}] \cdot \nabla w_i \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} (w_i)_{\tau} \nabla(w_i) \cdot \mathbf{n} \, dS = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|w_i(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

para $i = 1, 2$. Observamos que, al multiplicar (2.8) por Δw_1 , multiplicando (2.9) por Δw_2 , integrando en Ω , y sumando los resultados, deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\|(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{H_0^1(\Omega)^2}^2 \right) + \|\Delta(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\ \leq \hat{C} \left[\epsilon \|(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|\Delta(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right], \end{aligned}$$

con $\hat{C}$ definido sobre (2.13) y $\epsilon > 0$ arbitrario. Entonces, tenemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\|(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{H_0^1(\Omega)^2}^2 \right) + \left(1 - \frac{\hat{C}}{4\epsilon} \right) \|\Delta(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \epsilon \hat{C} \|(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2.$$

Ahora, seleccionando $\epsilon > \hat{C}/4$ y usando la estimación (2.14) obtenemos

$$\|\Delta(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \frac{4\epsilon^2 \hat{C}}{4\epsilon - \hat{C}} e^{2\hat{C}\tau} \|(w_1, w_2)(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2,$$

lo que implica la primera desigualdad en (2.7). Ahora, de (2.6) y la primera estimación en (2.7), tenemos que p_1 y p_2 están acotados en la norma de $H^2(\Omega)$. Así, según el teorema de inclusión continua $H^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, deducimos la segunda desigualdad de (2.7). $\square$

2.3. Condición necesaria de optimalidad de primer orden.

Lema 2.4. Sean $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$ la solución del problema de control óptimo (1.6) y $(\bar{S}, \bar{I})$ la solución de (1.1)-(1.5) con $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$ en lugar de (β, γ) y (p_1, p_2) la solución del sistema adjunto (2.1)-(2.5). Entonces, la desigualdad

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left[(\hat{\beta} - \bar{\beta}) \bar{S}^m \bar{I}^n - (\hat{\gamma} - \bar{\gamma}) \bar{I} \right] (p_2 - p_1) \, d\mathbf{x} \, dt \\ + \delta \int_{\Omega} \left[\nabla \bar{\beta} \nabla (\hat{\beta} - \bar{\beta}) + \nabla \bar{\gamma} \nabla (\hat{\gamma} - \bar{\gamma}) \right] \, d\mathbf{x} \geq 0, \quad (2.15) \end{aligned}$$

es válida para todo $(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) \in U_{ad}$.

Demostración. La demostración se realiza utilizando los conceptos de diferenciabilidad en espacios de Banach y la ecuación de sensibilidad. Consideremos un par arbitrario $(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) \in U_{ad}$ e introducimos

la notación

$$(\beta^\varepsilon, \gamma^\varepsilon) = (1 - \varepsilon)(\bar{\beta}, \bar{\gamma}) + \varepsilon(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) \in U_{ad},$$

$$J_\varepsilon = J(\beta^\varepsilon, \gamma^\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|S^\varepsilon(\mathbf{x}, t) - S^{obs}(\mathbf{x})|^2 + |I^\varepsilon(\mathbf{x}, t) - I^{obs}(\mathbf{x})|^2 \right) d\mathbf{x}$$

$$+ \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla \beta^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 + |\nabla \gamma^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 \right) d\mathbf{x},$$

donde $(S^\varepsilon, I^\varepsilon)$ es la solución de (1.1)-(1.5) con $(\beta^\varepsilon, \gamma^\varepsilon)$ en lugar de (β, γ) . Ahora, usando la hipótesis de que $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$ es una solución óptima de (1.6) y tomando la derivada de Frechet de J_ε , tenemos que

$$\frac{dJ_\varepsilon}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} \left(|S^\varepsilon(\mathbf{x}, t) - S^{obs}(\mathbf{x})| \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + |I^\varepsilon(\mathbf{x}, t) - I^{obs}(\mathbf{x})| \frac{\partial I^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) d\mathbf{x}$$

$$+ \delta \int_{\Omega} \left[\nabla \bar{\beta} \nabla (\hat{\beta} - \bar{\beta}) + \nabla \bar{\gamma} \nabla (\hat{\gamma} - \bar{\gamma}) \right] d\mathbf{x} \geq 0, \quad (2.16)$$

donde $\partial_\varepsilon S^\varepsilon$ y $\partial_\varepsilon I^\varepsilon$ para $\varepsilon = 0$ se calculan analizando las sensibilidades de las soluciones para (1.1)-(1.5) con respecto a las perturbaciones de (β, γ) .

De la definición de $(S^\varepsilon, I^\varepsilon)$ y $(\bar{S}, \bar{I})$ tenemos

$$(S^\varepsilon)_t - \Delta S^\varepsilon = -\beta^\varepsilon(\mathbf{x})(S^\varepsilon)^m(I^\varepsilon)^n + \gamma^\varepsilon(\mathbf{x})I^\varepsilon, \quad \text{en } Q_T, \quad (2.17)$$

$$(I^\varepsilon)_t - \Delta I^\varepsilon = \beta^\varepsilon(\mathbf{x})(S^\varepsilon)^m(I^\varepsilon)^n - \gamma^\varepsilon(\mathbf{x})I^\varepsilon, \quad \text{en } Q_T, \quad (2.18)$$

$$\nabla S^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = \nabla I^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.19)$$

$$S^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}), \quad I^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = I_0(\mathbf{x}), \quad \text{en } \Omega, \quad (2.20)$$

y

$$(\bar{S})_t - \Delta \bar{S} = -\bar{\beta}(\mathbf{x})(\bar{S})^m(\bar{I})^n + \bar{\gamma}(\mathbf{x})\bar{I}, \quad \text{en } Q_T, \quad (2.21)$$

$$(\bar{I})_t - \Delta \bar{I} = \bar{\beta}(\mathbf{x})(\bar{S})^m(\bar{I})^n - \bar{\gamma}(\mathbf{x})\bar{I}, \quad \text{en } Q_T, \quad (2.22)$$

$$\nabla \bar{S} \cdot \mathbf{n} = \nabla \bar{I} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.23)$$

$$\bar{S}(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}), \quad \bar{I}(\mathbf{x}, 0) = I_0(\mathbf{x}), \quad \text{en } \Omega. \quad (2.24)$$

Restando el sistema (2.21)-(2.24) del sistema (2.17)-(2.20), dividiendo por ε y usando la notación $(z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon) = \varepsilon^{-1} (S^\varepsilon - \bar{S}, I^\varepsilon - \bar{I})$, deducimos el siguiente sistema

$$(z_1^\varepsilon)_t - \Delta z_1^\varepsilon = -\beta^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{[(S^\varepsilon)^m - (\bar{S})^m]}{S^\varepsilon - \bar{S}} (I^\varepsilon)^n z_1^\varepsilon - \beta^\varepsilon(\mathbf{x})(\bar{S})^m \frac{[(I^\varepsilon)^n - (\bar{I})^n]}{I^\varepsilon - \bar{I}} z_2^\varepsilon$$

$$- (\hat{\beta} - \bar{\beta})(\bar{S})^m(\bar{I})^n + \gamma^\varepsilon(\mathbf{x})z_2^\varepsilon + (\hat{\gamma} - \bar{\gamma})\bar{I}, \quad \text{en } Q_T, \quad (2.25)$$

$$(z_2^\varepsilon)_t - \Delta z_2^\varepsilon = \beta^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{[(S^\varepsilon)^m - (\bar{S})^m]}{S^\varepsilon - \bar{S}} (I^\varepsilon)^n z_1^\varepsilon + \beta^\varepsilon(\mathbf{x})(\bar{S})^m \frac{[(I^\varepsilon)^n - (\bar{I})^n]}{I^\varepsilon - \bar{I}} z_2^\varepsilon$$

$$+ (\hat{\beta} - \bar{\beta})(\bar{S})^m(\bar{I})^n - \gamma^\varepsilon(\mathbf{x})z_2^\varepsilon - (\hat{\gamma} - \bar{\gamma})\bar{I}, \quad \text{en } Q_T, \quad (2.26)$$

$$\nabla z_1^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = \nabla z_2^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.27)$$

$$z_1^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = z_2^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \text{en } \Omega. \quad (2.28)$$

Entonces, denotando por (z_1, z_2) el límite de $(z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, de (2.25)-(2.28), deducimos

$$\begin{aligned} (z_1)_t - \Delta z_1 &= -m\bar{\beta}(\mathbf{x})(\bar{S})^{m-1}(\bar{I})^n z_1 - n\bar{\beta}(\mathbf{x})(\bar{S})^m(\bar{I})^{n-1} z_2 \\ &\quad - (\hat{\beta} - \bar{\beta})(\bar{S})^m(\bar{I})^n + \bar{\gamma}(\mathbf{x})z_2^\varepsilon + (\hat{\gamma} - \bar{\gamma})\bar{I}, \end{aligned} \quad \text{en } Q_T, \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} (z_2)_t - \Delta z_2 &= m\bar{\beta}(\mathbf{x})(\bar{S})^{m-1}(\bar{I})^n z_1 + n\bar{\beta}(\mathbf{x})(\bar{S})^m(\bar{I})^{n-1} z_2 \\ &\quad + (\hat{\beta} - \bar{\beta})(\bar{S})^m(\bar{I})^n - \bar{\gamma}(\mathbf{x})z_2^\varepsilon - (\hat{\gamma} - \bar{\gamma})\bar{I}, \end{aligned} \quad \text{en } Q_T, \quad (2.30)$$

$$\nabla z_1 \cdot \mathbf{n} = \nabla z_2 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.31)$$

$$z_1(\mathbf{x}, 0) = z_2(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \text{en } \Omega. \quad (2.32)$$

Así, en (2.16) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dJ_\varepsilon}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{\Omega} \left(|S^\varepsilon(\cdot, t) - S^{obs}| z_1(\cdot, t) + |I^\varepsilon(\cdot, t) - I^{obs}| z_2(\cdot, t) \right) d\mathbf{x} \\ &\quad + \delta \int_{\Omega} \left[\nabla \bar{\beta} \nabla (\hat{\beta} - \bar{\beta}) + \nabla \bar{\gamma} \nabla (\hat{\gamma} - \bar{\gamma}) \right] d\mathbf{x} \geq 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

cuando (z_1, z_2) es la solución de (2.29)-(2.32).

Por otro lado, de (2.1)-(2.2) y (2.29)-(2.30), deducimos

$$\frac{\partial}{\partial t}(p_1 z_1 + p_2 z_2) = p_1 \Delta z_1 + p_2 \Delta z_2 - z_1 \Delta p_1 - z_2 \Delta p_2 + (\hat{\beta} - \bar{\beta})\bar{S}^m \bar{I}^n (p_2 - p_1) - (\hat{\gamma} - \bar{\gamma})\bar{I}(p_2 - p_1),$$

lo cual implica

$$\iint_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t}(p_1 z_1 + p_2 z_2) d\mathbf{x} dt = \iint_{Q_T} \left[(\hat{\beta} - \bar{\beta})\bar{S}^m \bar{I}^n - (\hat{\gamma} - \bar{\gamma})\bar{I} \right] (p_2 - p_1) d\mathbf{x} dt, \quad (2.34)$$

mediante integración sobre Q_T . Además, notamos que

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t}(p_1 z_1 + p_2 z_2) d\mathbf{x} dt &= \int_{\Omega} \left(p_1(\mathbf{x}, T) z_1(\mathbf{x}, T) + p_2(\mathbf{x}, T) z_2(\mathbf{x}, T) \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \left(|\bar{S}(\mathbf{x}, T) - S^{obs}(\mathbf{x})| z_1(\mathbf{x}, T) + |\bar{I}(\mathbf{x}, T) - I^{obs}(\mathbf{x})| z_2(\mathbf{x}, T) \right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Luego, de (2.34) y (2.35) deducimos que

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \left[(\hat{\beta} - \bar{\beta})\bar{S}^m \bar{I}^n - (\hat{\gamma} - \bar{\gamma})\bar{I} \right] (p_2 - p_1) d\mathbf{x} dt \\ = \int_{\Omega} \left(|\bar{S}(\mathbf{x}, T) - S^{obs}(\mathbf{x})| z_1(\mathbf{x}, T) + |\bar{I}(\mathbf{x}, T) - I^{obs}(\mathbf{x})| z_2(\mathbf{x}, T) \right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Podemos concluir la demostración de (2.15) reemplazando (2.36) en el primer término de (2.33). $\square$

2.4. Algunos resultados de estabilidad

Lema 2.5. *Considere que los conjuntos de funciones $\{S, I, p_1, p_2\}$ y $\{\hat{S}, \hat{I}, \hat{p}_1, \hat{p}_2\}$ son soluciones a los sistemas (1.1)-(1.5) y (2.1)-(2.5) con los coeficientes, condiciones iniciales y observaciones dada por $\{\beta, \gamma, S_0, I_0, S^{obs}, I^{obs}\}$ y $\{\hat{\beta}, \hat{\gamma}, S_0, I_0, \hat{S}^{obs}, \hat{I}^{obs}\}$, respectivamente. Entonces, existen las constantes positivas $\Psi_i, i = 1, 2, 3$ tales que las estimaciones*

$$\|(\hat{S} - S, \hat{I} - I)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \Psi_1 \|(\hat{\beta} - \beta, \hat{\gamma} - \gamma)\|_{L^2(\Omega)^2}^2, \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \|(\hat{p}_1 - p_1, \hat{p}_2 - p_2)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 &\leq \Psi_2 \|(\hat{\beta} - \beta, \hat{\gamma} - \gamma)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\ &+ \Psi_3 \|(\hat{S}^{obs} - S^{obs}, \hat{I}^{obs} - I^{obs})\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \end{aligned} \quad (2.38)$$

son válidas para cualquier $t \in [0, T]$.

Demostración. Por razones de simplicidad de la presentación, introducimos las siguientes notaciones

$$\begin{aligned} \delta S &= \hat{S} - S, & \delta p_1 &= \hat{p}_1 - p_1, & \delta \beta &= \hat{\beta} - \beta \\ \delta I &= \hat{I} - I, & \delta p_2 &= \hat{p}_2 - p_2, & \delta \gamma &= \hat{\gamma} - \gamma. \end{aligned}$$

Entonces, del sistema (1.1)-(1.5) para (S, I) y $(\hat{S}, \hat{I})$ tenemos que $(\delta S, \delta I)$ satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} (\delta S)_t - \Delta(\delta S) &= -\hat{\beta}(\mathbf{x}) \left[(\hat{S})^m (\hat{I})^n - (S)^m (I)^n \right] \\ &\quad - \delta \beta(\mathbf{x}) (\hat{S})^m (\hat{I})^n + \hat{\gamma}(\mathbf{x}) \delta I + \gamma(\mathbf{x}) I, \end{aligned} \quad \text{en } Q_T, \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} (\delta I)_t - \Delta(\delta I) &= \hat{\beta}(\mathbf{x}) \left[(\hat{S})^m (\hat{I})^n - (S)^m (I)^n \right] \\ &\quad + \delta \beta(\mathbf{x}) (\hat{S})^m (\hat{I})^n - \hat{\gamma}(\mathbf{x}) \delta I - \gamma(\mathbf{x}) I, \end{aligned} \quad \text{en } Q_T, \quad (2.40)$$

$$\nabla(\delta S) \cdot \mathbf{n} = \nabla(\delta I) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.41)$$

$$(\delta S)(\mathbf{x}, 0) = (\delta I)(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \text{en } \Omega. \quad (2.42)$$

Del mismo modo, del sistema adjunto (2.1)-(2.5), deducimos que $(\delta p_1, \delta p_2)$ es la solución del sistema

$$\begin{aligned} (\delta p_1)_t + \Delta(\delta p_1) &= m \hat{\beta}(\mathbf{x}) (\hat{S})^{m-1} (\hat{I})^n (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \\ &\quad - m \beta(\mathbf{x}) (S)^{m-1} (I)^n (p_1 - p_2), \end{aligned} \quad \text{en } Q_T, \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} (\delta p_2)_t + \Delta(\delta p_2) &= n \hat{\beta}(\mathbf{x}) \hat{S}^m \hat{I}^{n-1} (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - \hat{\gamma}(\mathbf{x}) (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \\ &\quad - n \beta(\mathbf{x}) S^m I^{n-1} (p_1 - p_2) + \gamma(\mathbf{x}) (p_1 - p_2), \end{aligned} \quad \text{en } Q_T, \quad (2.44)$$

$$\nabla(\delta p_1) \cdot \mathbf{n} = \nabla(\delta p_2) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.45)$$

$$(\delta p_1)(\mathbf{x}, T) = \delta S(\mathbf{x}, T) - \left(\hat{S}^{obs}(\mathbf{x}) - S^{obs}(\mathbf{x}) \right), \quad \text{en } \Omega, \quad (2.46)$$

$$(\delta p_2)(\mathbf{x}, T) = \delta I(\mathbf{x}, T) - \left(\hat{I}^{obs}(\mathbf{x}) - I^{obs}(\mathbf{x}) \right), \quad \text{en } \Omega. \quad (2.47)$$

Luego, las pruebas de (2.37) y (2.38) se reducen a obtener estimaciones para los sistemas (2.39)-(2.42) y (2.43)-(2.47), respectivamente.

Para demostrar (2.37), testeamos las ecuaciones (2.39) y (2.40) por δS y δI , respectivamente. Luego, sumando los resultados obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\delta S(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta I(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \|\nabla(\delta S)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\delta I)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \int_{\Omega} |\hat{\beta}(\mathbf{x})| \left| \hat{S}^m \hat{I}^n - S^m I^n \right| |\delta S| d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta \beta(\mathbf{x})| |\hat{S}|^m |\hat{I}|^n |\delta S| d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\hat{\gamma}(\mathbf{x})| |\delta I| |\delta S| d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} |\delta \gamma(\mathbf{x})| |I| |\delta S| d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\hat{\beta}(\mathbf{x})| \left| \hat{S}^m \hat{I}^n - S^m I^n \right| |\delta I| d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta \beta(\mathbf{x})| |\hat{S}|^m |\hat{I}|^n |\delta I| d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} |\hat{\gamma}(\mathbf{x})| |\delta I|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta \gamma(\mathbf{x})| |I| |\delta I| d\mathbf{x} \\ & = \sum_{j=1}^8 I_j, \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde I_j están definidos por cada término. Ahora, usando el Corolario 2.2 para conseguir que

$$\begin{aligned} |\hat{S}^m \hat{I}^n - S^m I^n| &= |\hat{S}^m \hat{I}^n - \hat{S}^m I^n + \hat{S}^m I^n - S^m I^n| \\ &= \left| \hat{S}^m n \int_I^{\hat{I}} u^{n-1} du + I^n m \int_S^{\hat{S}} u^{m-1} du \right| \\ &\leq n |\hat{S}|^m \int_I^{\hat{I}} \mathbb{I}_m^{n-1} du + m |I|^n \int_S^{\hat{S}} \mathbb{S}_m^{m-1} du, \\ &\leq n \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_m^{n-1} |\hat{I} - I| + m \mathbb{S}_m^{m-1} \mathbb{I}_M^n |\hat{S} - S|, \end{aligned} \quad (2.49)$$

procedemos a obtener las cotas apropiados para I_j . En efecto, por la desigualdad de Cauchy y (2.49), tenemos que I_1 se puede acotar de la siguiente manera

$$I_1 \leq \frac{n \bar{b}}{2} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_m^{n-1} \left(\int_{\Omega} |\delta I|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta S|^2 d\mathbf{x} \right) + m \bar{b} \mathbb{S}_m^{m-1} \mathbb{I}_M^n \int_{\Omega} |\delta S|^2 d\mathbf{x}.$$

En caso de I_2, I_3 y I_4 , se tiene

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{1}{2} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_M^n \left(\int_{\Omega} |\delta \beta|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta S|^2 d\mathbf{x} \right), \quad I_3 \leq \frac{\bar{r}}{2} \left(\int_{\Omega} |\delta I|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta S|^2 d\mathbf{x} \right), \\ I_4 &\leq \frac{1}{2} \mathbb{I}_M \left(\int_{\Omega} |\delta \gamma|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta S|^2 d\mathbf{x} \right). \end{aligned}$$

Del mismo modo, deducimos que

$$\begin{aligned} I_5 &\leq n \bar{b} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_m^{n-1} \int_{\Omega} |\delta I|^2 d\mathbf{x} + \frac{m \bar{b}}{2} \mathbb{S}_m^{m-1} \mathbb{I}_M^n \left(\int_{\Omega} |\delta I|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta S|^2 d\mathbf{x} \right), \\ I_6 &\leq \frac{1}{2} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_M^n \left(\int_{\Omega} |\delta \beta|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta I|^2 d\mathbf{x} \right), \\ I_7 &\leq \bar{r} \int_{\Omega} |\delta I|^2 d\mathbf{x}, \quad I_8 \leq \frac{1}{2} \mathbb{I}_M \left(\int_{\Omega} |\delta \gamma|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta I|^2 d\mathbf{x} \right). \end{aligned}$$

Así, a partir de las estimaciones de I_j y (2.48) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|\delta S(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta I(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + 2 \left(\|\nabla(\delta S)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\delta I)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ \leq D_1 \left(\|\delta S(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta I(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + D_2 \left(\|\delta \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta \gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

donde $D_1 = 2\hat{C} + \mathbb{I}$ con $\hat{C}$ definido en (2.13) y $D_2 = \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_M^n + \mathbb{I}_M$. Luego, aplicando la desigualdad de Gronwall, deducimos que

$$\begin{aligned} \|\delta S(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta I(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq e^{D_1 T} \left(\|\delta S_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta I_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + D_2 T \left(\|\delta \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta \gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

que implica (2.37) al utilizar (2.42).

La prueba de (2.38) se desarrolla de la siguiente manera. Podemos probar fácilmente que la identidad algebraica

$$\begin{aligned} \hat{\zeta} \hat{\mathbb{A}}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - \zeta \mathbb{A}(p_1 - p_2) &= \left(\hat{\zeta} - \zeta \right) \hat{\mathbb{A}} \hat{p}_1 + \zeta \left(\hat{\mathbb{A}} - \mathbb{A} \right) \hat{p}_1 + \zeta \mathbb{A} \delta p_1 \\ &\quad - \left(\hat{\zeta} - \zeta \right) \hat{\mathbb{A}} \hat{p}_2 - \zeta \left(\hat{\mathbb{A}} - \mathbb{A} \right) \hat{p}_2 - \zeta \mathbb{A} \delta p_2 \quad (2.50) \end{aligned}$$

es válida. Ahora, si $(\hat{\zeta}, \zeta, \hat{\mathbb{A}}, \mathbb{A}) = (\hat{\beta}, \beta, m(\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n, m(S)^{m-1}(I)^n)$, tenemos que (2.50) implica que el lado derecho de la ecuación (2.43) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} m\hat{\beta} (\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - m\beta (S)^{m-1}(I)^n(p_1 - p_2) \\ = m\delta\beta (\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n\hat{p}_1 + m\beta \left[(\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n - (S)^{m-1}(I)^n \right] \hat{p}_1 \\ + m\beta (S)^{m-1}(I)^n\delta p_1 - m\delta\beta (\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n\hat{p}_2 \\ - m\beta \left[(\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n - (S)^{m-1}(I)^{n-1} \right] \hat{p}_2 - m\beta (S)^{m-1}(I)^n\delta p_2. \quad (2.51) \end{aligned}$$

Luego, testeando (2.43) por δp_1 y usando (2.51), obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\nabla(\delta p_1)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} m\delta\beta (\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n\hat{p}_1\delta p_1 d\mathbf{x}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Omega} m\beta \left[(\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n - (S)^{m-1}(I)^n \right] \hat{p}_1 \delta p_1 d\mathbf{x} \\
 & + \int_{\Omega} m\beta (S)^{m-1}(I)^n (\delta p_1)^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} m\delta\beta (\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n \hat{p}_2 \delta p_1 d\mathbf{x} \\
 & - \int_{\Omega} m\beta \left[(\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n - (S)^{m-1}(I)^n \right] \hat{p}_2 \delta p_1 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} m\beta (S)^{m-1}(I)^n \delta p_1 \delta p_2 d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Del Lema 2.3, Corolario 2.2, usando argumentos similares a (2.49), y la desigualdad de Cauchy tenemos

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 & \leq \max \{P_4, P_5\} \left\{ m\mathbb{S}_m^{m-1} \mathbb{I}_M^n \left(\|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta\beta\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right. \\
 & + mn\bar{b}\mathbb{S}_m^{m-1} \mathbb{I}_m^{n-1} \left(\|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta I(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
 & + m|m-1| \bar{b}\mathbb{S}_M^{m-2} \mathbb{I}_M^n \left(\|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta S(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \Big\} \\
 & + \frac{m\bar{b}}{2} \mathbb{S}_m^{m-1} \mathbb{I}_M^n \left(3\|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta p_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \tag{2.52}
 \end{aligned}$$

Ahora, de (2.50), seleccionando $(\hat{\zeta}, \zeta, \hat{\mathbb{A}}, \mathbb{A}) = (\hat{\beta}, \beta, n(\hat{S})^m(\hat{I})^{n-1}, n(S)^m(I)^{n-1})$ y $(\hat{\zeta}, \zeta, \hat{\mathbb{A}}, \mathbb{A}) = (\hat{\gamma}, \gamma, 1, 1)$, podemos reescribir el lado derecho de la ecuación (2.44). Entonces, testeando (2.43) por δp_2 y usando argumentos similares obtenemos una estimación similar a (2.52). Así, tenemos que existen las constantes positivas $\tilde{E}_i$, $i = 1, 2, 3$, tales que

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{dt} \left(\|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta p_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) & + 2 \left(\|\nabla \delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \delta p_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
 & \leq \tilde{E}_1 \left(\|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta p_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
 & + \tilde{E}_2 \left(\|\delta S(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta I(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \tilde{E}_3 \left(\|\delta\beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta\gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Aplicando la estimación (2.37) y reordenando algunos términos deducimos que

$$-\frac{d}{dt} \left(e^{\tilde{E}_1 t} \left[\|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta p_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \right) \leq (\tilde{E}_2 \Psi_1 + \tilde{E}_3) \left(\|\delta\beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta\gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

e integrando en $[t, T]$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 e^{\tilde{E}_1 t} \left[\|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta p_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] & \leq e^{\tilde{E}_1 T} \left[\|\delta p_1(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta p_2(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\
 & + T(\tilde{E}_2 \Psi_1 + \tilde{E}_3) e^{\tilde{C}_1 T} \left(\|\delta\beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta\gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Por tanto, podemos deducir (2.38) mediante la aplicación de la condición final (2.47). $\square$

3. Prueba del teorema

Existencia. Podemos probar la existencia considerando la estrategia estándar de una sucesión minimizadora y utilizando las inclusiones de compacidad adecuadas. En efecto, notamos claramente que $U_{ad}(\Omega) \neq \emptyset$ y $J(\beta, \gamma)$ están acotadas para cualquier $(\beta, \gamma) \in U_{ad}(\Omega)$. Entonces podemos considerar que $\{(\beta_n, \gamma_n)\} \subset \mathcal{U}$ es una sucesión minimizadora de J . Entonces la inclusión compacta $H^{\llbracket d/2 \rrbracket + 1}(\Omega) \subset C^\alpha(\Omega)$ para $\alpha \in]0, 1/2]$, implica que la sucesión de minimización $\{(\beta_n, \gamma_n)\}$ está acotada en la topología fuerte de $C^\alpha(\bar{\Omega}) \times C^\alpha(\bar{\Omega})$ para todos $\alpha \in]0, 1/2]$, desde existe una constante positiva C (independiente de β, γ y n) tal que

$$\|\beta_n\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} + \|\gamma_n\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})} \leq C \left(\|\beta_n\|_{H^{\llbracket d/2 \rrbracket + 1}(\Omega)} + \|\gamma_n\|_{H^{\llbracket d/2 \rrbracket + 1}(\Omega)} \right), \quad \forall \alpha \in]0, 1/2].$$

Observe que el lado derecho está acotado por el hecho de que $\beta_n, \gamma_n \in H^{\llbracket d/2 \rrbracket + 1}(\Omega)$, ver la definición de $U_{ad}(\Omega)$ dada en (1.8). Ahora, denotemos por (S_n, I_n) la solución del problema del valor inicial y en la frontera (1.1)-(1.5) correspondiente a (β_n, γ_n) . Entonces, considerando el hecho de que $\{(\beta_n, \gamma_n)\}$ pertenece a $C^\alpha(\bar{\Omega}) \times C^\alpha(\bar{\Omega})$ para todo $\alpha \in]0, 1/2]$, por el Teorema 2.1, tenemos que S_n y I_n pertenecen al espacio de Hölder $C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ y también $\{(S_n, I_n)\}$ es una sucesión acotada en la topología fuerte de $C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T) \times C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T)$ para todo $\alpha \in]0, 1/2]$. Así, del acotamiento de la sucesión de minimización y la correspondiente secuencia $\{(S_n, I_n)\}$, implica que existe

$$(\bar{\beta}, \bar{\gamma}) \in \left[C^{1/2}(\Omega) \times C^{1/2}(\Omega) \right] \cap U_{ad}(\Omega), \quad (\bar{S}, \bar{I}) \in C^{2+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{4}}(\bar{Q}_T) \times C^{2+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{4}}(\bar{Q}_T),$$

y la subsucesión nuevamente etiquetada por $\{(\beta_n, \gamma_n)\}$ y $\{(S_n, I_n)\}$ tal que

$$\beta_n \rightarrow \bar{\beta}, \quad \gamma_n \rightarrow \bar{\gamma} \quad \text{uniformemente sobre } C^\alpha(\Omega), \quad (3.1)$$

$$S_n \rightarrow \bar{S}, \quad I_n \rightarrow \bar{I} \quad \text{uniformemente sobre } C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T) \cap C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}_T). \quad (3.2)$$

Además, podemos deducir que $(\bar{S}, \bar{I})$ es la solución de el problema del valor límite inicial (1.1)-(1.5) correspondiente a los coeficientes $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$. Por tanto, según el teorema de convergencia dominado de Lebesgue, la semicontinuidad inferior de la norma L^2 , y la definición de la secuencia minimizadora, tenemos que

$$J(\bar{\beta}, \bar{\gamma}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J(\beta_n, \gamma_n) = \inf_{(\beta, \gamma) \in U_{ad}(\Omega)} J(\beta, \gamma). \quad (3.3)$$

Entonces, $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$ es una solución de (1.6) y la prueba de existencia está concluida.

Unicidad. Demostramos la unicidad usando adecuadamente el resultado de estabilidad del Lema 2.5 y la condición de optimalidad necesaria del Lema 2.15. Para ser más precisos, consideremos los conjuntos de funciones $\{S, I, p_1, p_2\}$ y $\{\hat{S}, \hat{I}, \hat{p}_1, \hat{p}_2\}$ son soluciones a los sistemas (1.1)-(1.5) y

(2.1)-(2.5) con los datos $\{\beta, \gamma, S^{obs}, I^{obs}\}$ y $\{\hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{S}^{obs}, \hat{I}^{obs}\}$, respectivamente. Del Lema 2.15 y la hipótesis que (β, γ) y $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$ son soluciones de (1.6) tenemos que las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} \left[(\bar{\bar{\beta}} - \beta) S^m I^n - (\bar{\bar{\gamma}} - \gamma) I \right] (p_2 - p_1) d\mathbf{x} dt \\ & + \delta \int_{\Omega} \left[\nabla \beta \nabla (\bar{\bar{\beta}} - \beta) + \nabla \gamma \nabla (\bar{\bar{\gamma}} - \gamma) \right] d\mathbf{x} \geq 0, \quad \forall (\bar{\bar{\beta}}, \bar{\bar{\gamma}}) \in U_{ad}, \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} \left[(\underline{\underline{\beta}} - \hat{\beta}) \hat{S}^m \hat{I}^n - (\underline{\underline{\gamma}} - \hat{\gamma}) \hat{I} \right] (\hat{p}_2 - \hat{p}_1) d\mathbf{x} dt \\ & + \delta \int_{\Omega} \left[\nabla \hat{\beta} \nabla (\underline{\underline{\beta}} - \hat{\beta}) + \nabla \hat{\gamma} \nabla (\underline{\underline{\gamma}} - \hat{\gamma}) \right] d\mathbf{x} \geq 0, \quad \forall (\underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}) \in U_{ad}, \quad (3.5) \end{aligned}$$

son válidas, respectivamente. En particular, seleccionando $(\bar{\bar{\beta}}, \bar{\bar{\gamma}}) = (\hat{\beta}, \hat{\gamma})$ en (3.4) y $(\underline{\underline{\beta}}, \underline{\underline{\gamma}}) = (\beta, \gamma)$ en (3.5), y sumando ambas desigualdades, obtenemos

$$\begin{aligned} \delta \left[\|\nabla(\hat{\beta} - \beta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\hat{\gamma} - \gamma)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] & \leq \iint_{Q_T} \left| \hat{\beta} - \beta \right| \left| \hat{S}^m \hat{I}^n (\hat{p}_2 - \hat{p}_1) - S^m I^n (p_2 - p_1) \right| d\mathbf{x} dt \\ & + \iint_{Q_T} |\hat{\gamma} - \gamma| |\hat{I}(\hat{p}_2 - \hat{p}_1) - I(p_2 - p_1)| d\mathbf{x} dt := I_1 + I_2. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Ahora, de (2.49), (2.50), Corolario 2.2, Lema 2.3, y la desigualdad de Cauchy, observamos que

$$\begin{aligned} I_1 & \leq \iint_{Q_T} |\hat{\beta} - \beta| |\hat{S}^m \hat{I}^n - S^m I^n| |\hat{p}_1| d\mathbf{x} dt + \iint_{Q_T} |\hat{\beta} - \beta| |\hat{S}^m \hat{I}^n - S^m I^n| |\hat{p}_2| d\mathbf{x} dt \\ & + \iint_{Q_T} |\hat{\beta} - \beta| |S^m I^n| |\hat{p}_1 - p_1| d\mathbf{x} dt + \iint_{Q_T} |\hat{\beta} - \beta| |S^m I^n| |\hat{p}_2 - p_2| d\mathbf{x} dt \\ & \leq \frac{n}{2} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_m^{n-1} \max \{P_4, P_5\} \left(T \|\hat{\beta} - \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\hat{I}(\cdot, t) - I(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) \\ & + \frac{m}{2} \mathbb{I}_M^n \mathbb{S}_m^{m-1} \max \{P_4, P_5\} \left(T \|\hat{\beta} - \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\hat{S}(\cdot, t) - S(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) \\ & + \frac{m}{2} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_M^n \left(2T \|\hat{\beta} - \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|(\hat{p}_1 - p_1)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|(\hat{p}_2 - p_2)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} I_2 & \leq \max \{P_4, P_5\} \left(T \|\hat{\gamma} - \gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\hat{I}(\cdot, t) - I(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) \\ & + \mathbb{I}_M \left(T \|\hat{\gamma} - \gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|(\hat{p}_1 - p_1)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right). \end{aligned}$$

De Lema 2.5 y las estimaciones de I_1 y I_2 en (3.6) tenemos que

$$\begin{aligned} \delta \left[\|\nabla(\hat{\beta} - \beta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\hat{\gamma} - \gamma)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] & \leq \Upsilon_1 \left[\|\hat{\beta} - \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\hat{\gamma} - \gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ & + \Upsilon_2 \left[\|\hat{S}^{obs} - S^{obs}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\hat{I}^{obs} - I^{obs}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right], \quad (3.7) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\Upsilon_1 &= \left[\left(\frac{n}{2} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_m^{n-1} + \frac{m}{2} \mathbb{S}_m^{m-1} \mathbb{I}_M^n + 1 \right) (1 + \Psi_1) \max \{P_4, P_5\} + \left(\frac{m}{2} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_M^n + \mathbb{I}_M \right) (2 + \Psi_2) \right] T, \\ \Upsilon_2 &= \left(\frac{m}{2} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_M^n + \mathbb{I}_M \right) \Psi_3 T.\end{aligned}$$

Ahora, considerando que $(\hat{\beta}, \hat{\gamma}), (\beta, \gamma) \in \mathcal{U}_c(\Omega)$, por la desigualdad generalizada de Poincaré, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\hat{\beta} - \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\hat{\gamma} - \gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C_{poi} \left(\|\nabla(\hat{\beta} - \beta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\hat{\gamma} - \gamma)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\hat{\beta} - \beta\|_{L^1(\Omega)}^2 + \|\hat{\gamma} - \gamma\|_{L^1(\Omega)}^2 \right) \\ &= C_{poi} \left(\|\nabla(\hat{\beta} - \beta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\hat{\gamma} - \gamma)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).\end{aligned}$$

Entonces, en (3.7) tenemos

$$\left(\delta - \Upsilon_2 C_{poi} \right) \left[\|\nabla(\hat{\beta} - \beta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\hat{\gamma} - \gamma)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \leq \Upsilon_2 \left[\|\hat{S}^{obs} - S^{obs}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\hat{I}^{obs} - I^{obs}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right].$$

Por lo tanto, seleccionando $\Theta = \Upsilon_2 C_{poi}$ deducimos la unicidad hasta una constante aditiva.

4. Simulaciones numéricas

En esta sección, consideramos la aproximación numérica del problema de control óptimo siguiendo las ideas detalladas en [33] (véase también [20]). La construcción de la aproximación numérica es un procedimiento que consta de los siguientes tres pasos: se desarrolla una aproximación numérica mediante un esquema IMEX de la ecuación de estado (1.1)-(1.5); se construye una aproximación numérica de la función objetivo (1.7); y, asumiendo que las funciones a identificar tienen formas específicas en términos de un número finito de parámetros desconocidos, se aproxima el problema de optimización infinito dimensional (1.6) por un problema de optimización numérica en dimension finita, donde las incógnitas son los parámetros. Luego, se aplica un algoritmo de optimización numérica para resolver el problema de optimización en dimension finita o forma discreta del problema de optimización. En efecto, en lo que sigue se especifica cada uno de estos pasos.

En primer lugar especificamos la discretización de (1.1)-(1.5). Consideremos que $\Omega =]0, 1[$, $\partial\Omega = \{0, 1\}$, $Q_T = (0, 1) \times [0, T]$ y $\Gamma = \{0, 1\} \times [0, T]$. La discretización del problema de valores iniciales y en la frontera (1.1)-(1.5) se realiza mediante un esquema semi-implícito de diferencias finitas. Comenzamos introduciendo la discretización estándar de Q_T . Seleccionamos $M, N \in \mathbb{N}$ de modo que la discretización de Ω esté dada por $x_j = j\Delta x$ para $j = 0, \dots, M$ con $\Delta x = L/(M+1)$, y la discretización de $[0, T]$ esté dada por $t_k = k\Delta t$ para $k = 0, \dots, N$ con $\Delta t = 1/N$. Además, consideramos que la aproximación de una función dada $\Psi : \overline{Q}_T$ en (x_j, t_k) se denota por Ψ_j^k . De forma similar, la aproximación de las funciones $\overline{\Psi} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\underline{\Psi} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en x_j y t_k se denotan por $\overline{\Psi}_j$ y por $\underline{\Psi}^k$, respectivamente. El sistema (1.1)-(1.5) se aproxima mediante el siguiente esquema

de diferencias finitas.

$$\frac{S_j^{k+1} - S_j^k}{\Delta t} - \frac{S_{j+1}^{k+1} - 2S_j^{k+1} + S_{j-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} = -\beta_j(S_j^k)^m(I_j^k)^n + \gamma_j I_j^k, \quad j = 1, \dots, M-1, \quad (4.1)$$

$$\frac{I_j^{k+1} - I_j^k}{\Delta t} - \frac{I_{j+1}^{k+1} - 2I_j^{k+1} + I_{j-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} = \beta_j(S_j^k)^m(I_j^k)^n - \gamma_j I_j^k, \quad j = 1, \dots, M-1, \quad (4.2)$$

$$\frac{S_j^{k+1} - S_{j-1}^{k+1}}{\Delta x} = \frac{I_j^{k+1} - I_{j-1}^{k+1}}{\Delta x} = 0, \quad j \in \{0, M\}, \quad (4.3)$$

$$S_j^0 = S_0(x_j), \quad I_j^0 = I_0(x_j), \quad j = 0, \dots, M, \quad (4.4)$$

donde $k = 0, \dots, N-1$. Utilizamos la notación $(S_\Delta, I_\Delta, R_\Delta)$ para la aproximación numérica de (1.1)-(1.5) obtenida por el esquema (4.1)-(4.4) con coeficientes numéricos $(\beta_\Delta, \gamma_\Delta)$.

La aproximación de la función costo (1.7) es denotada por J_Δ y es definida por

$$J_\Delta(S_\Delta, I_\Delta, \beta_\Delta, \gamma_\Delta) = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^M \left[(S_j^N - S_j^{obs})^2 + (I_j^N - I_j^{obs})^2 \right] + \frac{\delta \Delta x}{2} \sum_{j=0}^M \left[(\beta_j')^2 + (\gamma_j')^2 \right]. \quad (4.5)$$

Se observa que (S_j^{obs}, I_j^{obs}) corresponde a una aproximación de las observaciones, las cuales en la práctica son interpolaciones de los datos observados que son obtenidos en un conjunto discreto de puntos del dominio y que no considera la discretización de Ω .

La discretización del problema de optimización (1.6) cuando (β, γ) son formas funcionales dependientes de los parámetros se realiza como sigue. Asumimos que las funciones β y γ están parametrizadas por un número finito de parámetros denotados por $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_\ell)$ y que el problema de control óptimo (1.6) se aproxima mediante el problema de optimización de dimensión finita.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{e} \in \mathbb{R}^\ell \text{ minimizando la función costo } \mathcal{J}_\Delta(\mathbf{e}) = J_\Delta(S_\Delta, I_\Delta, \beta_\Delta, \gamma_\Delta) \\ \text{restringida a } (S_\Delta, I_\Delta, \beta_\Delta, \gamma_\Delta) \text{ solución de (4.1)-(4.4) con } \beta \text{ y } \gamma \text{ parametriza-} \\ \text{das por } \mathbf{e}, \text{ i.e. } \beta_\Delta = \beta_\Delta(\cdot, \mathbf{e}) \text{ y } \gamma_\Delta = \gamma_\Delta(\cdot, \mathbf{e}), \end{array} \right\} \quad (4.6)$$

En esta definición del problema de la discretización del problema de optimización observamos que (S_Δ, I_Δ) depende de $\mathbf{e}$ aunque tal notación no está incluida explícitamente a fin de no recargar la notación.

En los ejemplos numéricos que se muestran en lo que sigue de la sección, la solución del problema de optimización (4.6) se realizó utilizando la función `optimiset` de Matlab. Adicionalmente, en los ejemplos numéricos se consideró el parámetro de regularización $\delta = 1$, y los exponentes $(m, n) = (1/2, 1/10)$ es decir, la fuerza de infección es $\beta(\mathbf{x})S^{1/2}I^{1/10}$.

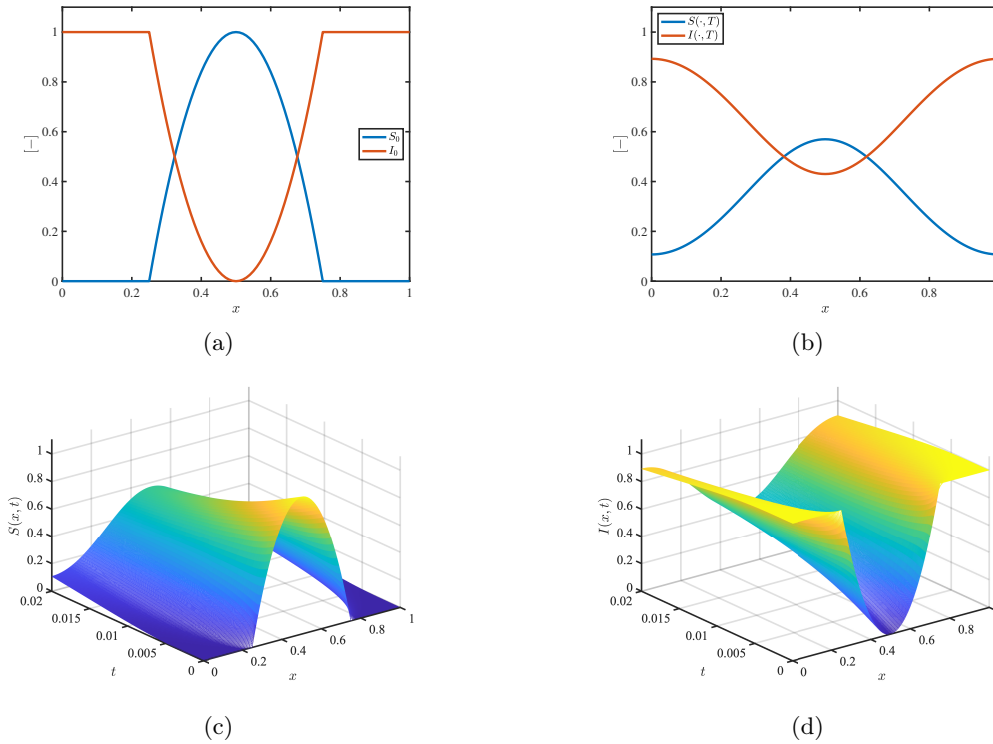


Figura 1: Simulaciones con los datos del Ejemplo 1 presentado en el subsección 4.1.

4.1. Ejemplo 1: Funciones constantes β y γ

En este ejemplo, consideramos que los coeficientes de los términos de reacción $\beta, \gamma : \overline{\Omega} \rightarrow (0, 1)$ son funciones constantes por determinar. Más precisamente, asumimos que los parámetros a determinar por el problema de control óptimo son $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$, tales que $\beta(x; \mathbf{e}) = e_1$ y $\gamma(x; \mathbf{e}) = e_2$. Construimos los perfiles de observación desarrollando una simulación numérica del problema directo (1.1)-(1.5) con condición inicial

$$S_0(x) = \begin{cases} (1 - 4x)(4x - 3), & x \in [1/4, 3/4], \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (4.7)$$

$$I_0(x) = 1 - S_0(x), \quad (4.8)$$

mediante aplicación del esquema de diferencias finitas (4.1)–(4.4); utilizando $\Delta t = 1,0E - 7$, $\Delta x = 2,0E - 4$ y $\mathbf{e}^{obs} = (0,7,0,2)$, ver Figura (1). Se observa que en este caso en la definición de J_Δ en 4.5 el término de regularización se anula dado que $\beta'(x) = \gamma'(x) = 0$. La identificación numérica se desarrolla considerando $M = 100$ y $N = 500$ y utilizando varios puntos de inicialización para el método de optimización numérica. Por ejemplo, si suponemos que la aproximación inicial es $\mathbf{e}^0 = (1.E - 06, 1)$ obtenemos que las funciones identificadas están definidas por los parámetros $\mathbf{e}^\infty = (0,77964, 0,25706)$. Otras simulaciones se realizaron, según lo documentado en la Tabla 1. En la Tabla 1 se muestra que la función J_Δ tiene varios puntos donde la función costo toma el valor 2,752908, para una representación gráfica consultar la Figura 2. En la segunda columna se

muestran los parámetros iniciales para la solución numérica del problema de optimización (4.6). En la tercera columna los resultados de la convergencia y en la cuarta columna el valor de la función de costo en el punto de convergencia. La comparación de los perfiles observados, identificados y de aproximación inicial para dos casos de la Tabla 1 se muestran en la Figura 3. En los otros casos, las representaciones gráficas son similares.

Tabla 1: Resultados que muestran la no-unicidad del problema de identificación para el caso de β y γ no constantes (ver Figura 2).

Caso	$\mathbf{e}^0$	$\mathbf{e}^\infty$	$J_\Delta(\mathbf{e}^\infty)$
1	$(1.E - 06, 1)$	$(0,77964, 0,25706)$	2,752908
2	$(1.E - 06, 2)$	$(1,34835, 0,63480)$	2,752908
3	$(1.E - 06, 3)$	$(1,92203, 1,01875)$	2,752908
4	$(1.E - 06, 4)$	$(2,36179, 1,31490)$	2,752908
5	$(1.E - 06, 5)$	$(3,52866, 2,10784)$	2,752908
6	$(1.E - 06, 6)$	$(2,5164, 1,41940)$	2,752908

En términos generales, en el caso de funciones constantes β y γ no se tiene la unicidad debido a que en la función de costo el término de regularización se anula.

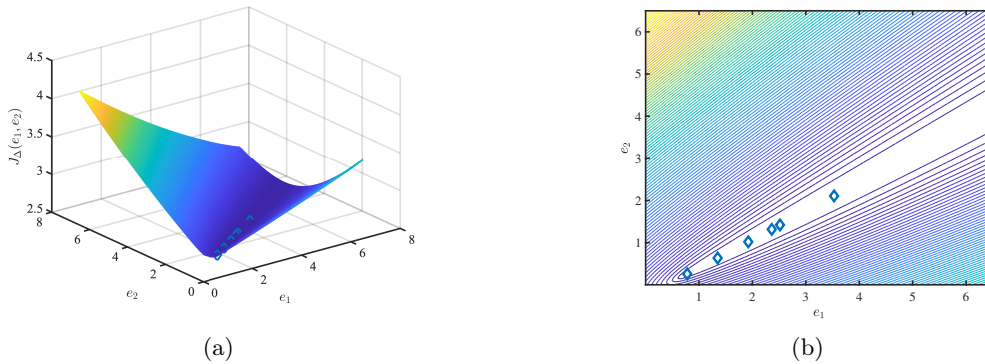


Figura 2: Gráfica de la función costo para el Ejemplo 1 presentado en el subsección 4.1 considerando $\mathbf{e} \in (0, 8]^2$. (a) Superficie mostrando varios mínimos para J_Δ dada en (4.5). (b) curvas de nivel de la función costo J_Δ . Para los valores numéricos consultar la Tabla 1.

Tabla 2: Parámetros observados y resultados de la identificación en el caso del Ejemplo 2 y que definen las funciones dadas en (4.9).

	$\mathbf{e}$	$J_\Delta(\mathbf{e}^\infty)$	$\ \beta_\Delta\ _{L^1(\Omega)}$	$\ \gamma_\Delta\ _{L^1(\Omega)}$
$\mathbf{e}^{obs}$	$(0,0800, 80,0000, 50,0000, 0,0800, 80,0000, 50,0000)$		0,0031	0,1109
$\mathbf{e}^{ig}$	$(0,0200, 71,0000, 41,0000, 0,0200, 71,0000, 41,0000)$			
$\mathbf{e}^\infty$	$(0,0763, 79,7212, 49,7254, 0,0925, 80,6862, 48,2397)$	$1,8207E - 08$	0,0030	0,1101
$\mathbf{e}^{ig}$	$(0,0200, 73,0000, 43,0000, 0,0200, 73,0000, 43,0000)$			
$\mathbf{e}^\infty$	$(0,0710, 73,0037, 43,0037, 0,0942, 73,0037, 43,0038)$	$7,3171E - 09$	0,0031	0,1101
$\mathbf{e}^{ig}$	$(0,0200, 85,0000, 55,0000, 0,0200, 85,0000, 55,0000)$			
$\mathbf{e}^\infty$	$(0,0763, 79,7212, 49,7254, 0,0925, 80,6862, 48,2397)$	$1,8208E - 08$	0,0030	0,1101
$\mathbf{e}^{ig}$	$(0,0200, 88,0000, 55,0000, 0,0200, 88,0000, 58,0000)$			
$\mathbf{e}^\infty$	$(0,0789, 79,7340, 49,7355, 0,0904, 80,2810, 48,9074)$	$1,1057E - 09$	0,0031	0,1101

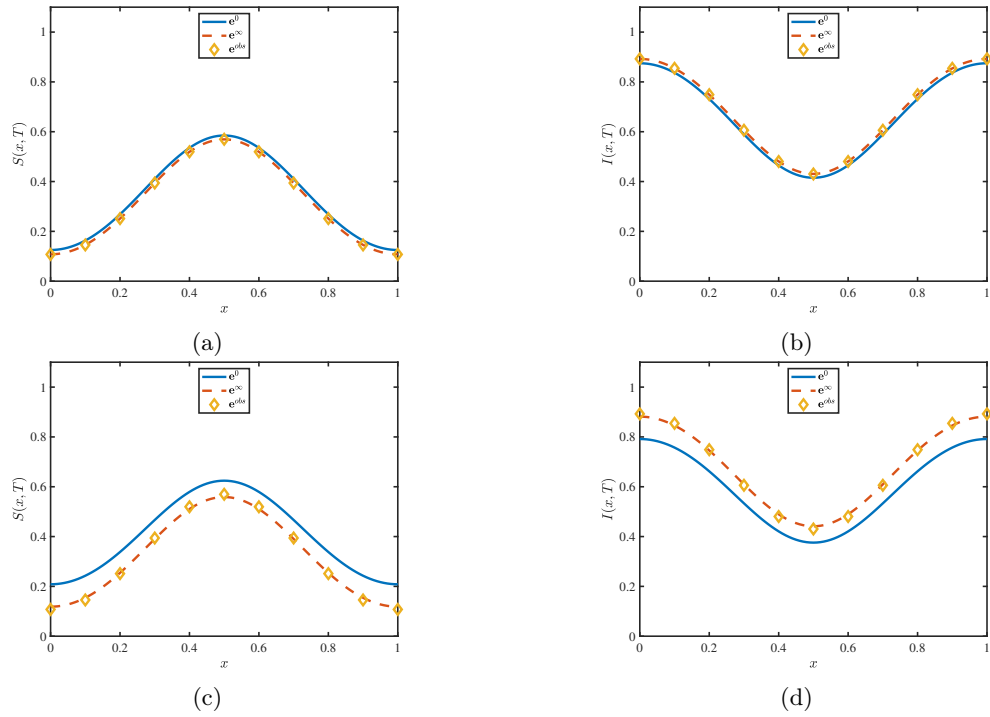


Figura 3: Comparación de los perfiles en tiempo T de la soluciones para Ejemplo 1 presentado en el subsección 4.1. (a)-(b) y (c)-(d) son los perfiles para los casos 1 y 6 presentados en la Tabla 1.

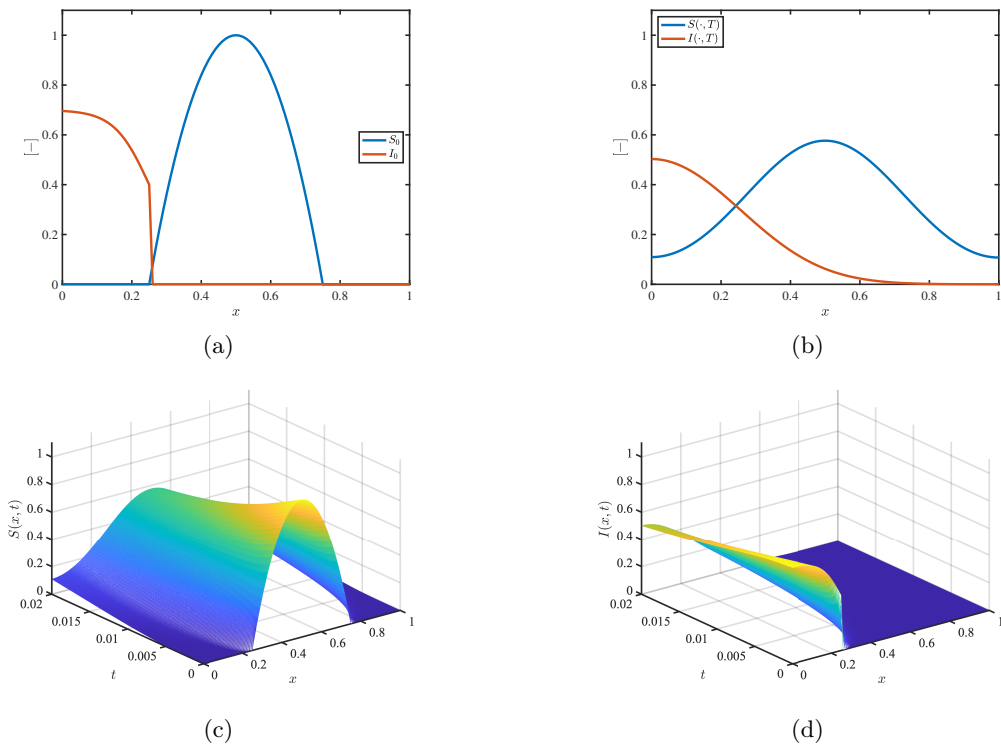


Figura 4: Simulaciones con los datos del Ejemplo 2 presentado en la subsección 4.2.

4.2. Ejemplo 2: Funciones no constantes β y γ

En este ejemplo, asumimos que las funciones $\beta, \gamma : \overline{\Omega} \rightarrow (0, 1)$ están parametrizadas en términos de $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_6)$ como sigue

$$\beta(x; \mathbf{e}) = e_1 \operatorname{sech}(e_2 x - e_3), \quad \gamma(x; \mathbf{e}) = 0,09 - e_4 \tanh(e_5 x - e_6). \quad (4.9)$$

Los perfiles de observación considerados son sintéticos y son construidos resolviendo las ecuaciones de estado (1.1)-(1.5) con la condición inicial para los susceptibles la función S_0 definida en (4.7) y la condición inicial para los infectados dada por

$$I_0(x) = \begin{cases} 0,4 - 0,3 \tanh(10x - 2,5), & x \in [0, 1/4], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.10)$$

La solución numérica es obtenida mediante aplicación del esquema de diferencias finitas (4.1)–(4.4); utilizando $\Delta t = 1,0E - 7$, $\Delta x = 2,0E - 4$ y los parámetros dados en $\mathbf{e}^{obs}$ en la Tabla 2 (ver Figura 4). Observamos que $\|\beta(\cdot; \mathbf{e}^{obs})\|_{L^1(\Omega)} = 0,0031$ y $\|\gamma(\cdot; \mathbf{e}^{obs})\|_{L^1(\Omega)} = 0,1109$. Luego, con el fin de utilizar la hipótesis del Teorema 1.1 que permite lograr la unicidad, fijamos $\mathbf{c} = (0,0031, 0,1109)$ y redefinimos la función costo como sigue

$$\tilde{J}_\Delta(S_\Delta, I_\Delta, \beta_\Delta, \gamma_\Delta) = J_\Delta(S_\Delta, I_\Delta, \beta_\Delta, \gamma_\Delta) + \left(\Delta x \sum_{j=0}^M |\beta_j| - 0,0031 \right)^2 + \left(\Delta x \sum_{j=0}^M |\gamma_j| - 0,1109 \right)^2,$$

donde $J_\Delta(S_\Delta, I_\Delta, \beta_\Delta, \gamma_\Delta)$ es la función definida en (4.5). El problema de optimización se resolvió considerando $M = 100$ y $N = 1000$ y la función costo $\tilde{J}_\Delta$. Se seleccionaron distintos valores $\mathbf{e}^{ig}$, como estimación inicial de los parámetros, y se obtuvo que el algoritmo de optimización convergió a distintos valores $\mathbf{e}^\infty$ para los parámetros identificados, los cuales son reportados en la Tabla 2. En esta tabla se reporta el valor de la función costo en el punto de convergencia, de donde se observa que el menor valor para la función de costo es el de la fila inferior, para el cual $J_\Delta(\mathbf{e}^\infty) = 1,1057E - 09$. Adicionalmente en las dos últimas columnas de la derecha se reporta el valor de $\|\beta(\cdot; \mathbf{e}^{obs})\|_{L^1(\Omega)}$ y $\|\gamma(\cdot; \mathbf{e}^{obs})\|_{L^1(\Omega)}$, los cuales son aproximados a los valores fijados para $\mathbf{c}$. La comparación de los perfiles observados e identificados y así como los coeficientes β y γ se muestran en la Figura 5.

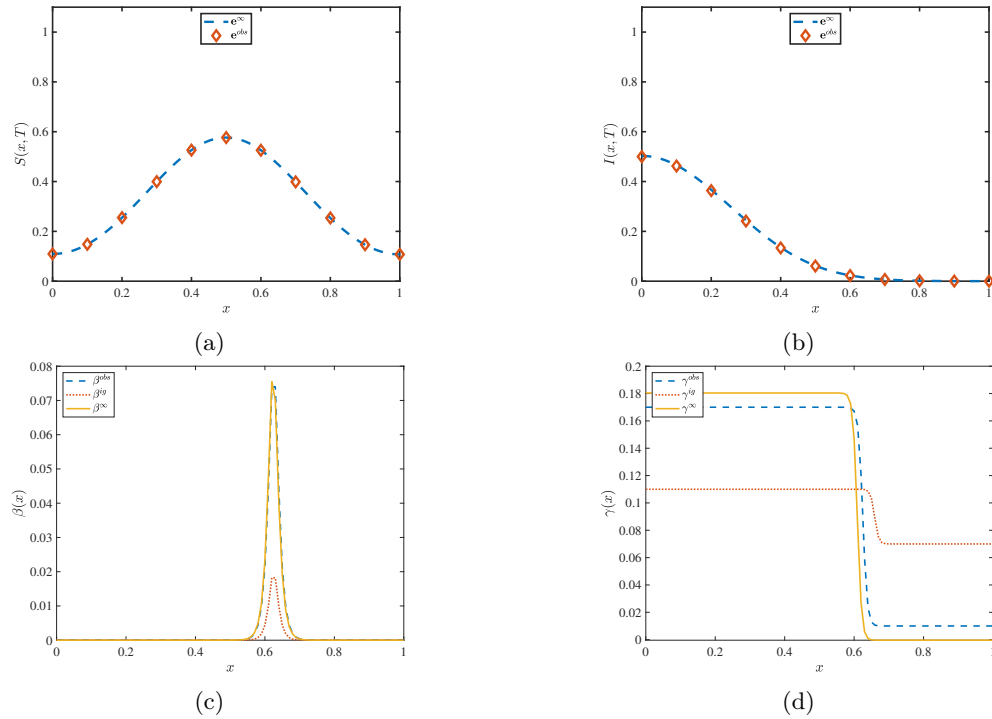


Figura 5: Comparación de los perfiles en tiempo T de la soluciones para Ejemplo 2 presentado en el subsección 4.2. Estas gráficas son construidas con los valores de la Tabla 2.

En síntesis, en el caso de funciones no constantes β y γ es esperable obtener la unicidad bajo las consideraciones del Teorema 1.1. Así mismo se observa que es esperable que se los resultados sigan siendo válidos bajo condiciones de menor regularidad de las condiciones iniciales. En efecto, para las simulaciones numéricas de este ejemplo se consideró una función discontinua como condición inicial para la población de individuos infectados.

Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo de la Universidad del Bío-Bío (Chile) mediante los proyectos FA-PEI FP2510413 y de Investigación Regular RE2547710; la Universidad Tecnológica Metropolitana (Chile) mediante el programa “Proyecto financiado por el Concurso de Proyectos Regulares de Investigación, año 2023, código LPR23-03, Universidad Tecnológica Metropolitana”; y ANID-Chile mediante el apoyo del proyecto FONDECYT 1230560.

Referencias

- [1] V. Akimenko, “An age-structured SIR epidemic model with fixed incubation period of infection,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 73, no. 7, pp. 1485–1504, 2017.
- [2] R. M. Anderson y R. M. May, *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*. Oxford University Press, 1991, doi: 10.1093/oso/9780198545996.001.0001.
- [3] N. C. Apreutesei, “An optimal control problem for a pest, predator, and plant system,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, vol. 13, no. 3, pp. 1391–1400, 2012, doi: 10.1016/j.nonrwa.2011.11.004.
- [4] B. Armbruster y E. Beck, “An elementary proof of convergence to the mean-field equations for an epidemic model,” *IMA J. Appl. Math.*, vol. 82, no. 1, pp. 152–157, 2017, doi: 10.1093/ima-mat/hxw010.
- [5] N. Bacaër, *A short history of mathematical population dynamics*. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011, doi: 10.1007/978-0-85729-115-8.
- [6] R. S. Cantrell y C. Cosner, *Spatial ecology via reaction-diffusion equations*, ser. Wiley Series in Mathematical and Computational Biology. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2003, doi: 10.1002/0470871296.
- [7] L. Chang, S. Gao, y Z. Wang, “Optimal control of pattern formations for an SIR reaction-diffusion epidemic model,” *J. Theoret. Biol.*, vol. 536, 2022, Art. ID 111003, doi: 10.1016/j.jtbi.2022.111003.
- [8] Q. Chen y J. Liu, “Solving an inverse parabolic problem by optimization from final measurement data,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 193, no. 1, pp. 183–203, 2006, doi: 10.1016/j.cam.2005.06.003.
- [9] I.-C. Chou y E. O. Voit, “Recent developments in parameter estimation and structure identification of biochemical and genomic systems,” *Math. Biosci.*, vol. 219, no. 2, pp. 57–83, 2009, doi: 10.1016/j.mbs.2009.03.002.
- [10] A. Coronel, F. Huancas, C. Isoton, y A. Tello, “Optimal control problem and reaction identification term for carrier-borne epidemic spread with a general infection force and diffusion,” *Electron. Res. Arch.*, vol. 33, no. 7, pp. 4435–4467, 2025, doi: 10.3934/era.2025202.
- [11] A. Coronel, F. Huancas, y M. Sepúlveda, “Identification of space distributed coefficients in an indirectly transmitted diseases model,” *Inverse Problems*, vol. 35, no. 11, 2019, Art. ID 115001.

- [12] A. Coronel, F. Huancas, y M. Sepúlveda, “A note on the existence and stability of an inverse problem for a SIS model,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 77, no. 12, pp. 3186–3194, 2019, doi: 10.1016/j.camwa.2019.01.031.
- [13] A. Coronel, F. Huancas, E. Lozada, y M. Rojas-Medar, “Results for a control problem for a sis epidemic reaction–diffusion model,” *Symmetry*, vol. 15, no. 6, 2023, Art. ID 1224, doi: 10.3390/sym15061224.
- [14] B. Dembele, A. Friedman, y A.-A. Yakubu, “Mathematical model for optimal use of sulfadoxine–pyrimethamine as a temporary malaria vaccine,” *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 72, no. 4, pp. 914–930, 2010, doi: 10.1007/s11538-009-9476-9.
- [15] Z.-C. Deng, L. Yang, J.-N. Yu, y G.-W. Luo, “An inverse problem of identifying the coefficient in a nonlinear parabolic equation,” *Nonlinear Anal.*, vol. 71, no. 12, pp. 6212–6221, 2009, doi: 10.1016/j.na.2009.06.014.
- [16] O. Diekmann y J. A. P. Heesterbeek, *Mathematical epidemiology of infectious diseases: Model building, analysis and interpretation*, ser. Wiley Series in Mathematical and Computational Biology. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2000.
- [17] L. Djebara, R. Douaifia, S. Abdelmalek, y S. Bendoukha, “Global and local asymptotic stability of an epidemic reaction-diffusion model with a nonlinear incidence,” *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 45, no. 11, pp. 6766–6790, 2022.
- [18] J. Ge, L. Lin, y L. Zhang, “A diffusive SIS epidemic model incorporating the media coverage impact in the heterogeneous environment,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, vol. 22, no. 7, pp. 2763–2776, 2017, doi: 10.3934/dcdsb.2017134.
- [19] Q. Ge, Z. Li, y Z. Teng, “Probability analysis of a stochastic SIS epidemic model,” *Stoch. Dyn.*, vol. 17, no. 6, 2017, Art. ID 1750041, doi: 10.1142/S0219493717500411.
- [20] M. D. Gunzburger, *Perspectives in flow control and optimization*, ser. Advances in Design and Control. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2003, vol. 5.
- [21] A. Kirsch, *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, 2nd ed., ser. Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, 2011, vol. 120, doi: 10.1007/978-1-4419-8474-6.
- [22] M. Koivu-Jolma y A. Annala, “Epidemic as a natural process,” *Math. Biosci.*, vol. 299, pp. 97–102, 2018, doi: 10.1016/j.mbs.2018.03.012.

- [23] N. V. Krylov, *Lectures on elliptic and parabolic equations in Sobolev spaces*, ser. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008, vol. 96, doi: 10.1090/gsm/096.
- [24] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, y N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, ser. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1968, vol. 23.
- [25] G. M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996, doi: 10.1142/3302.
- [26] X. Lu, S. Wang, S. Liu, y J. Li, “An SEI infection model incorporating media impact,” *Math. Biosci. Eng.*, vol. 14, no. 5-6, pp. 1317–1335, 2017, doi: 10.3934/mbe.2017068.
- [27] T. T. Marinov, R. S. Marinova, J. Omojola, y M. Jackson, “Inverse problem for coefficient identification in SIR epidemic models,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 67, no. 12, pp. 2218–2227, 2014, doi: 10.1016/j.camwa.2014.02.002.
- [28] A. Mummert y O. M. Otunuga, “Parameter identification for a stochastic SEIRS epidemic model: case study influenza,” *J. Math. Biol.*, vol. 79, no. 2, pp. 705–729, 2019, doi: 10.1007/s00285-019-01374-z.
- [29] A. Nwankwo y D. Okuonghae, “Mathematical analysis of the transmission dynamics of HIV syphilis co-infection in the presence of treatment for syphilis,” *Bull. Math. Biol.*, vol. 80, no. 3, pp. 437–492, 2018, doi: 10.1007/s11538-017-0384-0.
- [30] A. Rahmoun, B. Ainseba, y D. Benmerzouk, “Optimal control applied on an HIV-1 within-host model,” *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 39, no. 8, pp. 2118–2135, 2016, doi: 10.1002/mma.3628.
- [31] C. M. Saad-Roy, P. van den Driessche, y A.-A. Yakubu, “A mathematical model of anthrax transmission in animal populations,” *Bull. Math. Biol.*, vol. 79, no. 2, pp. 303–324, 2017, doi: 10.1007/s11538-016-0238-1.
- [32] K. Sakthivel, S. Gnanavel, N. Barani Balan, y K. Balachandran, “Inverse problem for the reaction diffusion system by optimization method,” *Appl. Math. Model.*, vol. 35, no. 1, pp. 571–579, 2011, doi: 10.1016/j.apm.2010.07.024.
- [33] D. Uciński, *Optimal measurement methods for distributed parameter system identification*, ser. Systems and Control Series. CRC Press, Boca Raton, FL, 2005.
- [34] V. M. Veliov, “Numerical approximations in optimal control of a class of heterogeneous systems,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 70, no. 11, pp. 2652–2660, 2015, doi: 10.1016/j.camwa.2015.04.029.

-
- [35] A. Widder y C. Kuehn, “Heterogeneous population dynamics and scaling laws near epidemic outbreaks,” *Math. Biosci. Eng.*, vol. 13, no. 5, pp. 1093–1118, 2016, doi: 10.3934/mbe.2016032.
- [36] H. Xiang y B. Liu, “Solving the inverse problem of an SIS epidemic reaction-diffusion model by optimal control methods,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 70, no. 5, pp. 805–819, 2015, doi: 10.1016/j.camwa.2015.05.025.
- [37] S. Zhi, H.-T. Niu, y Y. Su, “Global dynamics of a diffusive SIRS epidemic model in a spatially heterogeneous environment,” *Appl. Anal.*, vol. 104, no. 3, pp. 390–418, 2025, doi: 10.1080/00036811.2024.2367667.