

C O M P E N D I O

Aspectos topológicos de las simetrías en superficies

JUAN ARMANDO PARRA^{1,✉} ISRAEL MORALES² ¹ Centro de Investigación en
Matemáticas, A.C. CIMAT. Guanajuato,
México.juan.parra@cimat.mx✉² Departamento de Matemática y
Estadística, Universidad de La Frontera,
Temuco, Chile.israel.morales@ufrontera.cl

RESUMEN

El grupo de homeomorfismos de una superficie topológica Σ , $\text{Homeo}(\Sigma)$, admite una topología conocida como la *topología compacto-abierta*, con la cual es un grupo topológico. En este escrito damos una demostración autocontenida de este hecho. Del mismo modo, utilizamos herramientas elementales para demostrar que $\text{Homeo}(\Sigma)$ es un *grupo polaco* (es decir, es separable y completamente metrizable). Traducimos la relación de *isotopía* en $\text{Homeo}(\Sigma)$ como arcoconexidad en $\text{Homeo}(\Sigma)$ y, denotando por $\text{Homeo}_0(\Sigma)$ a la componente arcoconexa de la identidad, usamos resultados clásicos de la Teoría Descriptiva de Conjuntos para probar que el *Grupo Modular Extendido* de Σ (o *mapping class group extendido*), $\text{Mod}^\pm(\Sigma) := \text{Homeo}(\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma)$, es un grupo polaco con la topología cociente. Al final de este compendio, discutimos una demostración alternativa de este resultado que se basa en ver al Grupo Modular Extendido como el grupo de automorfismo del *grafo de curvas*; esta conexión figura como una de las más importantes y bellas en toda la teoría de Grupos Modulares.

Palabras clave: Superficies topológicas, grupo de homeomorfismos, grupo modular de superficies, topología compacto-abierta, isotopía, grafo de curvas.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 57K20, 57S05, 54H11, 20F65, 03E15

Publicado: 21 de octubre de 2025

Aceptado: 29 de agosto de 2025

Recibido: 29 de noviembre de 2024



©2025 J. A. Parra *et al.* Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia
Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

S U R V E Y

Topological aspects of symmetries on surfaces

JUAN ARMANDO PARRA^{1,✉} ISRAEL MORALES² 

¹ Centro de Investigación en
Matemáticas, A.C. CIMAT. Guanajuato,
México.

juan.parra@cimat.mx✉

² Departamento de Matemática y
Estadística, Universidad de La Frontera,
Temuco, Chile.

israel.morales@ufrontera.cl

ABSTRACT

The homeomorphism group of a topological surface Σ , $\text{Homeo}(\Sigma)$, admits a topology known as the *compact-open topology*, with which it becomes a topological group. In this work, we provide a self-contained proof of this fact. Moreover, we use elementary tools to prove that $\text{Homeo}(\Sigma)$ is a *Polish group* (i.e., it is separable and completely metrizable). We translate the *isotopy* relation in $\text{Homeo}(\Sigma)$ as path-connectedness in $\text{Homeo}(\Sigma)$ and, denoting by $\text{Homeo}_0(\Sigma)$ the identity path component, we use classic results in Descriptive Set Theory to prove that the *Extended Mapping Class Group* of Σ , $\text{Mod}^\pm(\Sigma) := \text{Homeo}(\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma)$, is a Polish group with the quotient topology. At the end of this survey, we discuss an alternative proof of this result based on realizing the Extended Mapping Class Group as the automorphism group of the *complex of curves*; this connection arises as one of the most important and beautiful in the theory of Mapping Class Groups.

Keywords and Phrases: Topological surfaces, homeomorphism group, mapping class group of surfaces, compact-open topology, isotopy, complex of curves.

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 57K20, 57S05, 54H11, 20F65, 03E15

Published: 21 October, 2025

Accepted: 29 August, 2025

Received: 29 November, 2024



©2025 J. A. Parra *et al.* This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

1. Introducción

El concepto moderno de homeomorfismo hace referencia a una función entre dos espacios topológicos $X \rightarrow Y$ que es continua, invertible y cuya inversa es continua. Dicho concepto fue reformulado a lo largo de la historia para representar lo que significa hoy en día. Después de los avances de M. Fréchet y F. Hausdorff, finalmente W. Sierpinski en 1928 y K. Kuratowski en 1934 realizaron importantes escritos de topología donde el término homeomorfismo ya tenía el significado moderno. La palabra “homeomorfismo” la introdujo H. Poincaré en 1895 y originalmente hacía referencia a un difeomorfismo entre variedades diferenciables. Pronto H. Poincaré observó que los difeomorfismos forman un grupo interesante por sí mismo; con visión de gran alcance, se atrevió a afirmar que la ciencia cuyo objetivo es el estudio de este grupo, así como otros grupos análogos, recibiría el nombre de *analysis situs*, hoy topología. El desarrollo de las matemáticas ha confirmado el sentimiento de H. Poincaré; el estudio de objetos como el grupo de homeomorfismos, el grupo de difeomorfismos y el grupo modular de superficies, así como todas sus variantes, forman parte de la columna vertebral de las matemáticas. Para una revisión histórica de la evolución del concepto de homeomorfismo, recomendamos ampliamente la lectura de G. H. Moore [27].

Una de las motivaciones para estudiar el grupo de homeomorfismos o difeomorfismos de una variedad proviene de los sistemas dinámicos, en donde clásicamente se estudian las transformaciones de un conjunto de puntos en una variedad bajo iteraciones de un difeomorfismo, es decir, se estudia el comportamiento de un subgrupo cíclico del grupo de difeomorfismos de la variedad. En los últimos cincuenta años se ha adoptado el objetivo de no sólo estudiar subgrupos cíclicos de difeomorfismos u homeomorfismos, sino de subgrupos finitamente generados de ellos. Lo que se busca con esto es explicar la influencia algebraica en la dinámica que realiza la acción del grupo sobre la variedad y de ser posible construir relaciones entre propiedades algebraicas como nilpotencia, torsión, etc., con propiedades dinámicas como la entropía, puntos fijos, etc. Sin embargo, el estudio del grupo de homeomorfismos o difeomorfismos de una variedad no se limita a sistemas dinámicos; estos grupos forman parte importante en la clasificación de haces fibrados en Topología Algebraica [35]. Así mismo, el tema de estudiar la *continuidad automática* (tema propio de la Teoría Descriptiva de Conjuntos) de estos grupos ha derivado en importantes resultados de rigidez. Más motivaciones para estudiar el grupo de homeomorfismos de variedades se puede consultar en el interesante artículo de K. Mann [24].

En general, estudiar el grupo de homeomorfismos no es sencillo, sobre todo porque a pesar de ser un grupo topológico con buenas propiedades topológicas y algebraicas, es un grupo no numerable y no es localmente compacto. Surge así la necesidad de estudiar al *Grupo Modular* (conocido por *mapping class group* en la literatura inglesa), $\text{Mod}(M)$, de una variedad M , el cual se define como el cociente $\text{Homeo}(M)/\text{Homeo}_0(M)$, donde $\text{Homeo}_0(M)$ denota a la componente arcoconexa de la identidad. El estudio del Grupo Modular de variedades está motivada por su profunda conexión

con la clasificación de clases de haces fibrados, véase [29]. En otras situaciones resulta que el Grupo Modular es más sencillo de estudiar que el grupo de homeomorfismos en sí. El ejemplo típico de esto son los grupos modulares de *superficies de tipo finito*¹, los cuales son grupos finitamente generados. La historia de los grupos modulares de superficies se remonta a comienzos del siglo XX y su conexión con diversas áreas de las matemáticas (en la clasificación de 3-variedades, en Teoría de Teichmüller, en Geometría Algebraica, en la Teoría Geométrica de Grupos, por mencionar algunas), ha quedado confirmada en toda una vasta literatura; por ejemplo, el lector puede consultar las referencias [9,17].

Recientemente se ha iniciado el desarrollo sistemático de los grupos modulares de superficies de tipo infinito. A diferencia del caso de superficies de tipo finito, estos son grupos que ya no son finitamente generados. Recomendamos revisar [1] para una exposición amplia del desarrollo de la teoría de grupos modulares en superficies de tipo infinito. El rápido desarrollo de la teoría de estos grupos en los últimos 15 años justifica la necesidad de tener escritos accesibles a toda la comunidad hispanohablante que trate el tema de grupos modulares de superficies.

Con el objetivo de producir un texto autocontenido en la medida de lo posible, en este escrito recopilamos algunas de las propiedades topológicas y/o geométricas más básicas del grupo de homeomorfismos de una superficie topológica, así como del respectivo grupo modular. De ese modo, esperamos que un lector que no haya tenido un acercamiento a dichos grupos encuentre en nuestro escrito una introducción amena. La novedad de este trabajo es su enfoque unificado, ya que nuestro tratamiento de los temas incluye a todas las superficies topológicas; compactas o no compactas, orientables o no orientables, con frontera compacta o con frontera no compacta. Los autores esperan que ésta sea una lectura agradable, y que en el mejor de los casos, sea de alguna utilidad para el lector.

1.1. Estructura del texto

En la Sección 2 presentamos a las superficies, definimos la frontera de una superficie y la noción de orientabilidad. A pesar de ser fundamental en el estudio de superficies, no detallaremos en la clasificación de superficies. Sin embargo, en esta misma sección comentamos la bibliografía a la que se puede acudir.

En la Sección 3 introducimos la noción de homeomorfismo de una superficie Σ en sí misma. Exhibiremos ejemplos de las estructuras de la superficie que son transformadas por la acción de un homeomorfismo. Probaremos que con la operación composición y la topología compacto-abierta, el grupo de homeomorfismos $\text{Homeo}(\Sigma)$ es un grupo topológico Hausdorff y segundo numerable. Utilizaremos herramientas de Teoría Descriptiva de Conjuntos para probar que $\text{Homeo}(\Sigma)$ tiene una métrica compatible invariante por la operación del grupo. Definiremos de manera explícita una

¹Una superficie es de *tipo finito* si tiene grupo fundamental finitamente generado. En otro caso se dice que la superficie es de *tipo infinito*.

métrica (una para superficies compactas y otra para superficies no compactas) completa y compatible con la topología compacto-abierta. La existencia de dicha métrica concluye que $\text{Homeo}(\Sigma)$ es un *grupo polaco*.

En la Sección 4 definimos una relación de equivalencia en $\text{Homeo}(\Sigma)$, llamada *isotopía*. Veremos que dicha relación está estrechamente relacionada con la componente arcoconexa de la identidad (el cual es un subgrupo normal del grupo de homeomorfismos): dos homeomorfismos $f, g \in \text{Homeo}(\Sigma)$ son isotópicos si, y sólo si están en la misma componente conexa por trayectorias. El grupo cociente es conocido como Grupo Modular Extendido y será denotado por $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$. Demostraremos que $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ hereda propiedades topológicas de $\text{Homeo}(\Sigma)$, como el hecho de ser Hausdorff y segundo numerable, y que por lo tanto, es también metrizable. Explicaremos un panorama que utiliza resultados importantes de Teoría Descriptiva de Conjuntos para demostrar que la metrizabilidad en $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ es suficiente para que sea un grupo polaco. Al final de la Sección 4 introducimos el grafo de curvas de una superficie orientable de tipo infinito con frontera vacía, y discutimos una forma alternativa de demostrar que el Grupo Modular Extendido es polaco; esto se obtiene como consecuencia de ver a $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ como el grupo de automorfismos del grafo de curvas. A pesar de que nuestra intención es producir un texto autocontenido, en esta sección es deseado que el lector tenga una comprensión básica del concepto de homotopía y principios básicos del grupo fundamental. Dichos conceptos son utilizados en la Sección 4.5. Sin embargo, el resto de la Sección 4 no pide dichos prerrequisitos de manera imperativa.

1.2. Recomendaciones bibliográficas

Ponemos a disposición del lector referencias clásicas para el estudio de los grupos de transformaciones en superficies. *A primer on Mapping Class Groups* [9] es una guía autocontenida de teoremas, ejemplos y técnicas utilizadas en el estudio del Grupo Modular de una superficie de tipo finito. *Office hours with a geometric group theorist* [5] es una muy buena guía que puede servir a estudiantes de licenciatura en un primer acercamiento a Grupos Modulares de superficies de tipo finito así como a la Teoría Geométrica de Grupos. *Presentando al toro y sus simetrías* [18] es un escrito en donde se detalla el cálculo del Grupo Modular del toro. *Big Mapping Class Groups: An Overview* [1] es un sumario de resultados topológicos asociados al grupo modular de superficies de tipo infinito. *Notes on the Topology of Mapping Class Groups* [37] es una referencia para localizar resultados relevantes relacionando las técnicas de Teoría Descriptiva de Conjuntos con el grupo modular, particularmente de superficies de tipo infinito. La lectura *Superficies Topológicas y sus simetrías: una introducción a grupos modulares de superficies de tipo finito e infinito* [6] es una introducción accesible a grupos modulares de superficies de tipo finito e infinito, incluidas las superficies no orientables; en particular, en este texto el lector puede comenzar a informarse sobre los invariantes que clasifican a las superficies topológicas, incluidas las no compactas. Para consultas

de propiedades de grupos topológicos recomendamos *Beginner's Course in Topology* [10]. Una guía de la Teoría Descriptiva de Conjuntos que recomendamos es *Classical Descriptive Set Theory* [19]. Por último, un texto introductorio al estudio de haces fibrados es *Fiber bundles and homotopy* [36].

2. Superficies

Probablemente el ejemplo principal de una superficie es la gráfica de una función continua $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un subconjunto abierto conexo $U \subseteq \mathbb{R}^2$; recordemos que la gráfica de f es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\Gamma(f) := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U\}.$$

Las superficies son espacios topológicos especiales, que modelan “mundos posibles”. Por ejemplo la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ (Figura 2.1), se puede imaginar como la hoja de una planta en la que caminan las hormigas.

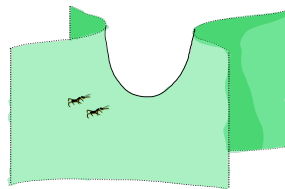


Figura 2.1: Porción de la gráfica de $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Para cualquier función continua $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ existe un homeomorfismo entre U y la gráfica $\Gamma(f)$ dado por la proyección $\pi(x, y, z) = (x, y)$. En otras palabras, la gráfica de f se puede aplanar. Sin embargo, existen mundos posibles que interpretamos como superficies que no se pueden aplanar, como la superficie de un planeta o el chocolate que recubre una dona glaseada. Por eso la definición de superficie topológica es más general. Partiremos primero de la definición de superficies sin frontera (o bien, con frontera vacía), la cual definiremos más tarde.

Definición 2.1 (Superficie topológica). *Un espacio topológico conexo Σ es una superficie (con frontera vacía) si es Hausdorff, segundo numerable² y cada punto $p \in \Sigma$ tiene un entorno $V \subseteq \Sigma$ homeomorfo a algún abierto de $\mathbb{R}^2$.*

Nótese que la definición no considera que una superficie Σ esté incluida como un subespacio de

²Un espacio topológico es segundo numerable si tiene una base numerable de abiertos.

$\mathbb{R}^n$, sino que es un espacio topológico abstracto que cumple las restricciones de la definición. Por ejemplo el plano proyectivo en el siguiente ejemplo es un espacio dado por clases de equivalencia.

Ejemplo 2.2. *Los siguientes espacios topológicos son superficies. En las imágenes colocamos las representaciones poligonales de las superficies, que consisten en realizar el pegado de los lados con la misma etiqueta en el sentido que indican las flechas.*

- El plano $\mathbb{R}^2$ es una superficie, así como cualquier subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y conexo.
- La esfera $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es una superficie compacta. Consideremos $N = (0, 0, 1)$, el polo norte y, $S = (0, 0, -1)$, el polo sur. Definimos los homeomorfismos

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \psi : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v, w) &\longmapsto \left(\frac{2u}{1-w}, \frac{2v}{1-w} \right); & (u, v, w) &\longmapsto \left(\frac{2u}{1+w}, \frac{2v}{1+w} \right), \end{aligned}$$

que prueban que $\mathbb{S}^2$ es una superficie. Estos homeomorfismos son conocidos como la proyección estereográfica de la esfera (Figura 2.3).

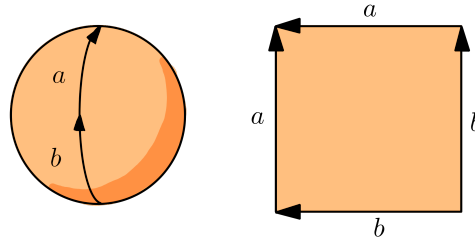


Figura 2.2: La esfera y su representación poligonal.

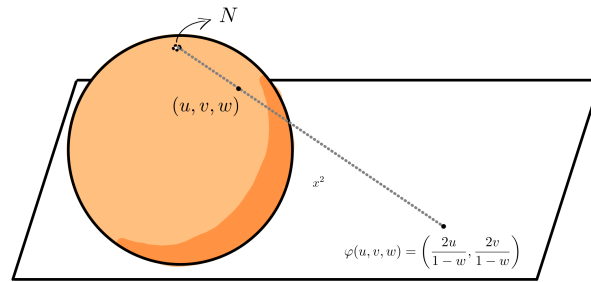


Figura 2.3: Obtención de proyección estereográfica mediante la recta que pasa por el polo norte $N = (0, 0, 1)$, intersecta a la esfera únicamente en (u, v, w) y después intersecta el plano $\mathbb{R}^2 \times \{-1\}$ en $\varphi(u, v, w)$.

- El toro $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es una superficie compacta. Podemos presentar al toro, también como

el espacio cociente

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 := \mathbb{R}^2 / \sim,$$

donde la relación de equivalencia $\sim$ está dada por: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ si y sólo si $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2$.

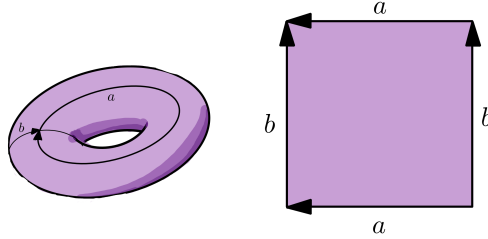


Figura 2.4: El toro y su representación poligonal.

- El plano proyectivo se define como el espacio cociente

$$\mathbb{RP}^2 := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim,$$

donde la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ está dada por: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$. Este espacio no se puede visualizar encajado en $\mathbb{R}^3$, pero sí podemos dar su representación poligonal.

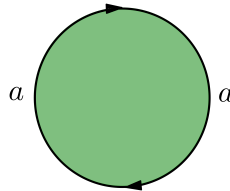


Figura 2.5: Representación poligonal de $\mathbb{RP}^2$.

- La escalera de Jacob es una superficie con género infinito, que se extiende de manera infinita hacia dos direcciones.

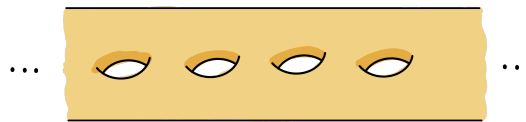


Figura 2.6: Escalera de Jacob.

- Basados en la nomenclatura de la clasificación de superficies no compactas (Subsección 2.2),

la siguiente superficie se conoce como la superficie con tres fines acumulados por género. Pero por simplicidad, nosotros la llamaremos trípode.

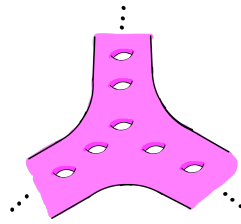


Figura 2.7: Trípode.

- El conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N} \times \{0\}$ es abierto en $\mathbb{R}^2$, por lo que es una superficie.

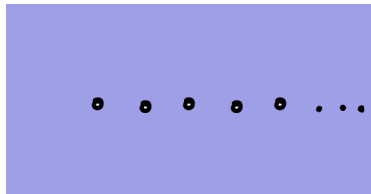


Figura 2.8: $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N} \times \{0\}$.

- Del mismo modo $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C} \times \{0\}$, donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de Cantor, es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y por ende, es una superficie.



Figura 2.9: $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C} \times \{0\}$.

- Existen superficies con ramificaciones infinitas, como el árbol de Cantor y el árbol florido de Cantor.

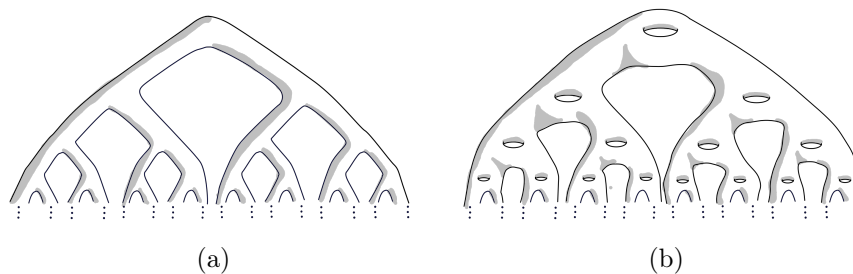


Figura 2.10: (a) Árbol de Cantor; (b) Árbol florido de Cantor.

Ejemplo 2.3 (Espacios que no son superficies). *Contrario a la intuición, existen espacios que cumplen ser localmente homeomorfos a $\mathbb{R}^2$ pero no ser Hausdorff. En este ejemplo también ejemplificamos con el cono espacios que no son localmente homeomorfos a $\mathbb{R}^2$.*

- *El cono está definido como el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. El origen $(0, 0, 0)$ es un punto del cono que no tiene una vecindad homeomorfa a algún abierto de $\mathbb{R}^2$.*

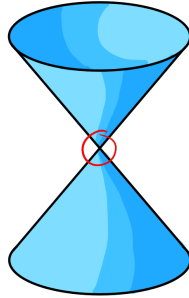


Figura 2.11: Punto singular en el cono.

- *El plano con dos orígenes es el espacio cociente*

$$X = \frac{\mathbb{R}^2 \times \{0, 1\}}{(x, y, 0) \sim (x, y, 1) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0)}.$$

Todo punto de X tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^2$, pero falla en ser Hausdorff para las imágenes de los puntos $(0, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

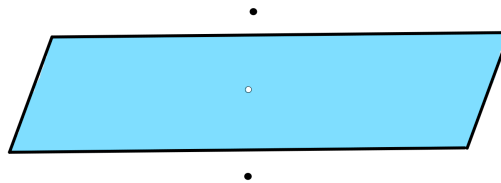


Figura 2.12: Plano con dos orígenes.

Hacemos énfasis en que la Definición 2.1 es exclusiva de superficies sin frontera pues en el estudio de homeomorfismos es importante distinguirlas de las superficies con frontera no vacía. Incluso veremos más adelante que el concepto de frontera en una superficie permite extender a toda la superficie ciertos homeomorfismos definidos en subsuperficies con frontera (como los que mencionaremos en el Ejemplo 3.3). ¿Pero a qué nos referimos con una *superficie con frontera*?

Dado que una superficie Σ es un espacio topológico abstracto que no está encajado necesariamente

dentro de algún otro espacio topológico X , no podemos especificar cuál es la frontera topológica de Σ dentro de X . Más bien, a lo que nos referimos es a una frontera geométrica, que captura la información del semiplano superior cerrado $\overline{\mathbb{H}^2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ como subespacio de $\mathbb{R}^2$. En la Figura 2.13 se puede notar que en $\overline{\mathbb{H}^2}$ hay abiertos como el subconjunto $V \subseteq \overline{\mathbb{H}^2}$ que también es un abierto de $\mathbb{R}^2$. Por otro lado hay abiertos como $U \subseteq \overline{\mathbb{H}^2}$ que son abiertos sólo del semiplano. Los puntos en la intersección de $U \cap \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ describen a lo que nos referimos como puntos frontera.

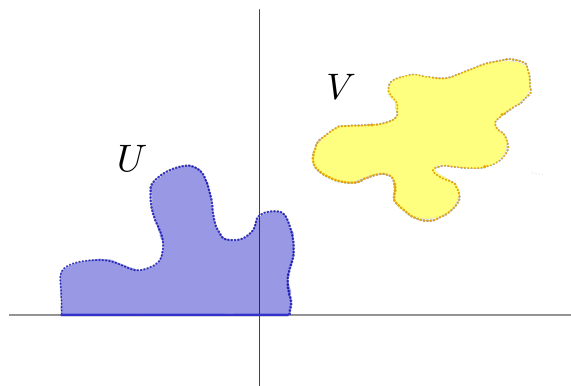


Figura 2.13: V un abierto de $\mathbb{R}^2$ y U abierto exclusivamente de $\overline{\mathbb{H}^2}$

Definición 2.4 (Superficie topológica con frontera). *Un espacio topológico conexo Σ es una superficie, con frontera posiblemente vacía, si es Hausdorff, segundo numerable y cada punto $p \in \Sigma$ tiene un entorno V homeomorfo a algún abierto de $\overline{\mathbb{H}^2}$.*

La **frontera geométrica** de una superficie Σ , o simplemente **frontera**, es el conjunto denotado por $\partial\Sigma$, que consta de todos los puntos $p \in \Sigma$ que no tienen una vecindad homeomorfa a algún abierto de $\mathbb{R}^2$. Entonces, una caracterización de los puntos frontera es la siguiente. Si $p \in \Sigma$ es un punto frontera y V es una vecindad de p con un homeomorfismo $\varphi : V \rightarrow W$ ($W \subseteq \overline{\mathbb{H}^2}$ abierto), entonces debe tenerse $\varphi(p) \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Recíprocamente, si $p \in \Sigma$ cumple que exista tal homeomorfismo $\varphi : V \rightarrow W$ (V abierto de Σ y W abierto de $\overline{\mathbb{H}^2}$) con $\varphi(p) \in \mathbb{R} \times \{0\}$, entonces p debe ser punto frontera. De lo contrario, $\varphi(p)$ tendría una vecindad en $\overline{\mathbb{H}^2}$ homeomorfa a una vecindad de $\mathbb{R}^2$. Eso contradice que los abiertos de $\overline{\mathbb{H}^2}$ que tocan el borde no son homeomorfos a abiertos de $\mathbb{R}^2$, por el Teorema de Invarianza del Dominio³ [12, Teorema 2.B3].

Los puntos en $\partial\Sigma$ se conocen como puntos frontera y los puntos en $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ como puntos interiores. Al conjunto de puntos interiores lo denotamos por $\text{int}(\Sigma)$. Claramente $\text{int}(\Sigma)$ es un abierto de Σ , por lo que $\partial\Sigma$ es cerrado. Además, se puede observar que cada punto $p \in \partial\Sigma$ tiene una vecindad relativa a $\partial\Sigma$ que es homeomorfa a un intervalo abierto de $\mathbb{R}$; es decir, la frontera es una 1-variedad. Siendo consistentes con la Definición 2.1, diremos que Σ es una superficie sin frontera si $\partial\Sigma = \emptyset$.

³El Teorema de Invarianza del Dominio afirma que una función continua e inyectiva $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, debe ser un mapeo abierto. La demostración de este teorema requiere el uso homología.

Un homeomorfismo entre superficies $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ cumple que $f(\partial\Sigma) = \partial\Sigma'$. Por lo tanto, tener o no frontera es un invariante topológico.

Ejemplo 2.5. Algunos ejemplos de superficies con frontera y sus representaciones poligonales son los siguientes.

- El semiplano superior cerrado $\overline{\mathbb{H}^2}$, con frontera $\partial\overline{\mathbb{H}^2} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.
- El disco cerrado $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, cuya frontera es $\partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1$.
- El anillo $\mathbb{A}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ es una superficie compacta con frontera $\partial\mathbb{A}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$, que es homeomorfa a $\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$.

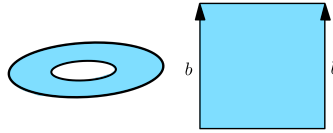


Figura 2.14: El anillo.

- La banda de Möbius, $\mathbb{BM}$, es la superficie parametrizada por

$$\mathbb{BM} := \left\{ \left(\left(1 - t \sin \frac{\theta}{2} \right) \cos \theta, \left(1 - t \sin \frac{\theta}{2} \right) \sin \theta, t \cos \frac{\theta}{2} \right) : (t, \theta) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times [0, 2\pi] \right\}.$$

La frontera de $\mathbb{BM}$ es homeomorfa a $\mathbb{S}^1$.

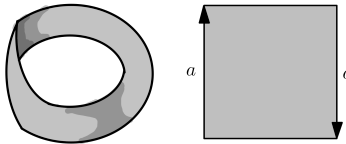


Figura 2.15: Banda de Möbius y su representación poligonal.

- La escalera de Jacob recortada por la mitad es una superficie con frontera no compacta. Sin embargo, toda componente conexa de la frontera es compacta homeomorfa al círculo.

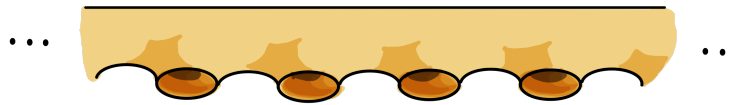


Figura 2.16: Escalera de Jacob recortada.

- $\mathbb{D}^2 \setminus \mathcal{C}$, donde $\mathcal{C} \subseteq \partial\mathbb{D}^2$ es homeomorfo al conjunto de Cantor, es otra superficie con frontera no compacta. En este caso, toda componente conexa de la frontera es no compacta homeomorfa a la línea real.

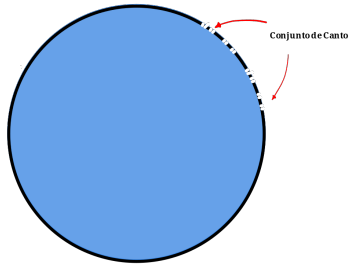


Figura 2.17: Disco menos un Cantor en la frontera

Ejemplo 2.6 (Suma conexa). Para construir más ejemplos de superficies suele utilizarse la suma conexa. La suma conexa de dos superficies Σ_1, Σ_2 , denotada por $\Sigma_1 \# \Sigma_2$, se define como la superficie que se obtiene al restar un disco abierto en cada una de las superficies e identificarlos por la frontera mediante la topología cociente.

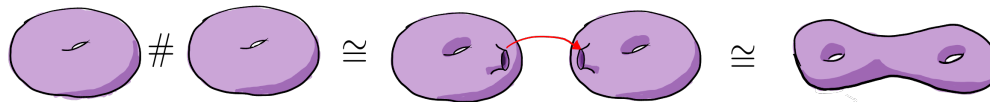


Figura 2.18: Suma conexa de dos toros.

2.1. Orientabilidad

En los ejemplos anteriores, la banda de Möbius y el plano proyectivo son ejemplos de superficies no orientables. En cambio, el resto fueron ejemplos de superficies orientables. La definición formal de orientabilidad requiere mayor profundidad y sugerimos al lector revisar [11] para una introducción formal mediante el grupo fundamental. También recomendamos revisar [22] para el caso de superficies con una estructura diferenciable. Nosotros expondremos el concepto de orientabilidad con un enfoque informal. Esperamos que a pesar de eso, esta sección le sirva a los lectores (en especial los que están iniciándose en el tema) para continuar la lectura de este artículo.

Dada una superficie Σ y un punto $p \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$, se puede definir el sentido en el que una curva da vueltas al rededor de p . En la Figura 2.19 se muestra que hay dos posibles sentidos.

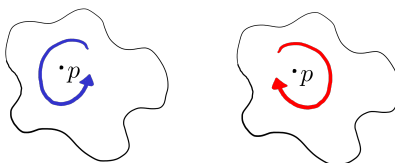


Figura 2.19: Elección de sentidos alrededor de p .

Una **orientación** en la superficie Σ consiste en una elección de sentidos en cada punto, de tal forma que en cada vecindad $V \subseteq \Sigma$ (homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^2$), todos los puntos tienen asignados sentidos “compatibles”. Diremos que una superficie es **orientable** si se le puede asignar una orientación compatible; en caso contrario diremos que es **no orientable**. Por ejemplo, en la Figura 2.20 (a) el toro tiene una elección de sentidos que efectivamente conforma una orientación en el toro. Sin embargo, en la Figura 2.20 (b) en la banda de Möbius se muestra una vecindad, donde los sentidos asignados a los puntos fueron incompatibles.

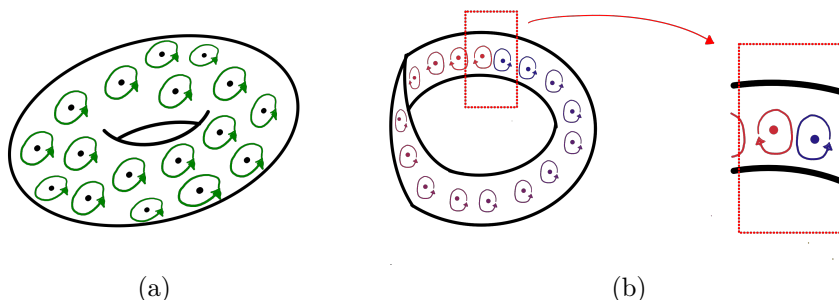


Figura 2.20: (a) orientación en el toro; (b) sentidos incompatibles en la banda de Möbius.

Teorema 2.7. *Una superficie Σ es no orientable si y sólo si $\mathbb{BM}$ está encajada en Σ .*

Demostración. ($\Leftarrow$) Si pudiera asignársele una elección de sentidos a cada punto de Σ , dicha elección definiría una elección de sentidos en $\mathbb{BM}$. Esta elección no puede ser compatible en $\mathbb{BM}$, pues $\mathbb{BM}$ es no orientable. Por lo tanto, tampoco es compatible en Σ , implicando que esta última es no orientable.

($\Rightarrow$) Por el Teorema de Clasificación de Superficies compactas (ver [11]), cualquier superficie compacta no orientable tiene un encaje de la banda de Möbius. Por otro lado, para cualquier superficie no compacta Σ podemos encontrar una colección de superficies compactas $\{\Sigma_n\}$ tal que $\Sigma_n \subseteq \text{int}(\Sigma_{n+1}) \subseteq \Sigma$ y que $\bigcup \Sigma_n = \Sigma$. Si cada subsuperficie Σ_n es orientable, entonces se puede definir una orientación global en Σ . De esta manera, si Σ es no orientable, alguna de las Σ_n tendría que ser no orientable. En dicho caso se tiene que Σ tendría un encaje de la banda de Möbius. $\square$

Ejemplo 2.8. $\mathbb{RP}^2$ tiene un encaje de $\mathbb{BM}$, por lo que no es orientable.

Nos bastará poder interpretar la no orientabilidad de una superficie como el hecho de tener sólo una cara, como es el caso de la banda de Möbius $\mathbb{BM}$. Así, si decidiéramos pintar una superficie no orientable, sólo podríamos usar un color. En superficies orientables como la esfera o el toro podemos usar dos colores: uno para la parte externa y otro para la parte interna.

Notación 2.9. Usualmente utilizamos la letra S para representar superficies orientables. Para superficies no orientables reservamos la letra N .

2.2. Comentarios sobre la clasificación de superficies

La clasificación de superficies comprende una serie de teoremas que proveen una lista de todas las superficies que cumplen ciertas características. En dichos teoremas también se describe un procedimiento para determinar si dos superficies no son homeomorfas, usualmente comparando una colección de *invariantes*⁴.

No enunciaremos los teoremas de clasificación, pero sugerimos al lector revisar nuestras recomendaciones bibliográficas. Para la clasificación de superficies compactas véase [11]. Para la clasificación de superficies no compactas puede revisarse [31]. Para una revisión de los teoremas de clasificación de superficies (compactas o no compactas, orientables o no orientables) así como los invariantes que determinan por completo a una superficie recomendamos ver el Capítulo 1 del escrito *Superficies Topológicas y sus simetrías: una introducción a grupos modulares de superficies de tipo finito e infinito* [6].

3. El grupo de homeomorfismos de una superficie

En esta sección estudiaremos la estructura algebraica del grupo (con la operación composición de funciones) de todos los homeomorfismos $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ de una superficie Σ (posiblemente con frontera no vacía), el cual denotamos por $\text{Homeo}(\Sigma)$. Dotaremos al grupo $\text{Homeo}(\Sigma)$ de una estructura topológica, la cual se conoce como **topología compacto-abierta**. Veremos que ambas estructuras (la estructura de grupo y la estructura topológica) en $\text{Homeo}(\Sigma)$ son compatibles. En otras palabras, $\text{Homeo}(\Sigma)$ es un grupo topológico.

⁴Un invariante asociado a una superficie Σ es un objeto $\varphi(\Sigma)$, tal que si Σ es homeomorfa a Σ' , entonces $\varphi(\Sigma) = \varphi(\Sigma')$. Ejemplos: la orientabilidad, la frontera, característica de Euler, género, espacio de fines, espacio de fines acumulados por género, espacio de fines acumulados por género no orientable.

Definición 3.1. *Un grupo G con una topología τ es un grupo topológico si las operaciones*

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (a, b) & \longmapsto & a \cdot b \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ a & \longmapsto & a^{-1} \end{array}$$

son continuas.

Nuestra meta principal será demostrar que el grupo de homeomorfismos de una superficie Σ es un **grupo polaco**, que significa que es separable⁵ y tiene una métrica completa compatible⁶ con la topología compacto-abierto.

Los grupos polacos son objetos de estudio en el ámbito de la Teoría Descriptiva de Conjuntos, la cual desarrolla herramientas para deducir propiedades topológicas de los morfismos o acciones de dichos grupos. Un tema recurrente en este ámbito es el de determinar si un grupo Polaco G tiene la propiedad de *Continuidad Automática* (propiedad AC); este se refiere a que para H un grupo topológico separable arbitrario, todo homomorfismo algebraico de grupos $G \rightarrow H$ es continuo. Recomendamos ver el capítulo 9 en [19] para una introducción a este tema. Una gran variedad de grupos topológicos tiene la propiedad AC: por ejemplo, el grupo de automorfismos de $\mathbb{Q}$ que preservan el orden, el grupo $\text{Homeo}(\mathbb{R})$ de homeomorfismos de $\mathbb{R}$ [33], el grupo $\text{Homeo}(\Sigma)$ de homeomorfismos de una superficie compacta Σ [32], y más generalmente, el grupo $\text{Homeo}(M)$ de homeomorfismos de una variedad compacta M [25].

3.1. Ejemplos de homeomorfismos

El hecho de pensar en un homeomorfismo $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ parece trivial, pues ya sabíamos que Σ era homeomorfa a sí misma. Sin embargo, hay propiedades de la superficie Σ que pueden verse alteradas mediante la acción de dicho homeomorfismo; puede alterarse el anudamiento de curvas cerradas simples⁷ (Ejemplo 3.3) o puede alterarse la orientación de la superficie (Ejemplo 3.7). Como ejemplo de la primera clase de transformaciones introducimos el *giro de Dehn*.

Ejemplo 3.2 (Giro de Dehn en el anillo). *Recordemos que el anillo $\mathbb{A}$ es una superficie orientable con frontera no vacía dada por $\mathbb{A} = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$. Definamos la función*

$$\begin{array}{ccc} T : \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ te^{i\theta} & \longmapsto & te^{i\theta+2\pi i(t-1)}. \end{array}$$

Podemos ver que la función T es un homeomorfismo cuya restricción a la frontera de $\mathbb{A}$ es la función

⁵Un espacio topológico X se dice *separable* si contiene un subconjunto denso numerable.

⁶Una métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ en un espacio topológico (X, τ) es *compatible* con la topología τ si la topología inducida por la métrica d coincide con τ .

⁷Una *curva cerrada simple* en Σ es un encaje topológico del círculo $\mathbb{S}^1$ en Σ , es decir, es una función inyectiva $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \Sigma$ que es homeomorfismo sobre su imagen.

identidad y su acción en el interior del anillo realiza una rotación mientras rodea la superficie como puede verse en la Figura 3.1.

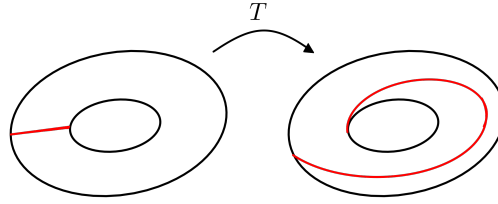


Figura 3.1: Acción del giro de Dehn T sobre el arco que conecta las dos componentes de frontera del anillo.

El hecho de que el giro de Dehn fija puntualmente la frontera es de especial utilidad para definir giros de Dehn en otras superficies. Esto se debe a que cada punto interior de la superficie tiene una vecindad homeomorfa a un disco de $\mathbb{R}^2$, el cual tendrá encajado al anillo como un cerrado de Σ .

Ejemplo 3.3 (Giros de Dehn en cualquier superficie). Sea Σ una superficie y $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \Sigma$ un encaje del anillo. Recordemos que $T : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ denota el giro de Dehn en el anillo. Podemos definir $\tilde{T} : \Sigma \rightarrow \Sigma$ mediante

$$\tilde{T}(p) = \begin{cases} p & \text{si } p \in \Sigma \setminus \varphi(\mathbb{A}) \\ \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}(p) & \text{si } p \in \varphi(\mathbb{A}). \end{cases}$$

Si encontramos el encaje apropiado del anillo en el toro (Figura 3.2), obtenemos un giro de Dehn que altera el anudamiento de la curva naranja.

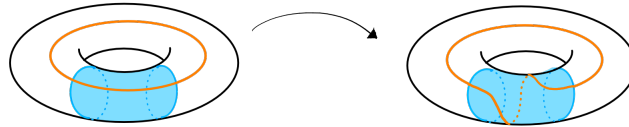


Figura 3.2: Giro de Dehn en el toro.

El giro de Dehn en un anillo que está encajado en un disco en realidad no afecta el anudamiento del mismo. Es decir, podemos realizar un proceso de deformación continua para restaurar el arco rojo a su posición original (Figura 3.3). Este proceso de deformación es conocido como *isotopía* y lo abordaremos formalmente en la Sección 4 (Definición 4.1). El problema consiste en encontrar un encaje apropiado del anillo en la superficie Σ , de modo que defina giros de Dehn que alteren efectivamente el anudamiento de curvas, como lo es en el caso del giro de Dehn en el Toro ilustrado en la Figura 3.2. Incluso habrá superficies como $\mathbb{R}^2$ o la esfera, para los cuales no podrán encontrarse homeomorfismos que alteren el anudamiento de curvas. Por ejemplo, cada giro de Dehn en $\mathbb{R}^2$

proviene de una transformación continua que puede deshacerse del mismo modo (Figura 3.3).

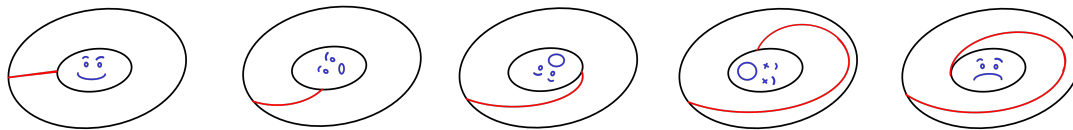


Figura 3.3: Deformación continua del giro de Dehn en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 3.4 (Homeomorfismos en la esfera). Sea $p \in \mathbb{S}^2$ un punto fijo. Recordando la proyección estereográfica, podemos definir un homeomorfismo $\varphi : \mathbb{S}^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Cualquier homeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ define un homeomorfismo $\tilde{f} : \mathbb{S}^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{p\}$ dado por $\tilde{f} = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Dicho homeomorfismo se puede extender a un homeomorfismo en toda la esfera que fija al punto p .

Con la construcción del homeomorfismo $\tilde{f}$ podemos manipular la esfera así como si lo hiciéramos con $\mathbb{R}^2$. Una aplicación de este hecho aparece en el Ejemplo 3.27.

En algunas superficies podemos exhibir algunos ejemplos de homeomorfismos que modifican o permutan las estructuras de una superficie, sin provenir de giros de Dehn.

Ejemplo 3.5 (Traslación de Género). La escalera de Jacob puede encajarse en $\mathbb{R}^3$ de manera simétrica a lo largo del eje x , y del plano xy . En dicho caso, la traslación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x - 1, y, z)$ se restringe a un homeomorfismo dentro de la escalera de Jacob.

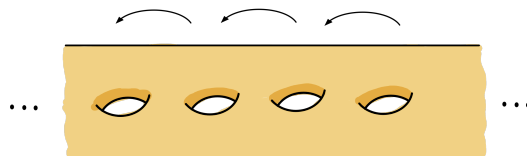


Figura 3.4: Traslación del género en la Escalera de Jacob.

Ejemplo 3.6 (Permutación de fines acumulados por género). Así como en el Ejemplo 3.5, algunas rotaciones de $\mathbb{R}^3$ también se pueden restringir a homeomorfismos de superficies encajadas. Tal es el caso de la superficie trípode en la que se realiza una rotación por un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$. Nótese que este homeomorfismo tiene orden 3.

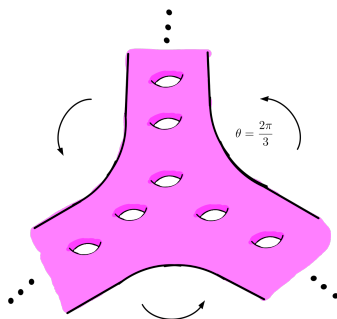


Figura 3.5: Rotación de fines.

Homeomorfismos que invierten la orientación. Un homeomorfismo $f : S \rightarrow S$ en una superficie orientable S tiene la cualidad de preservar o invertir la orientación de la superficie. En la literatura que concierne a los grupos modulares de superficies es relevante la distinción entre homeomorfismos que preservan o invierten la orientación.

La diferencia entre dichos homeomorfismos se ejemplifica con la Figura 3.6. Los homeomorfismos que preservan la orientación, preservan el sentido en que las curvas rodean un punto y su imagen. Por ejemplo, la función identidad $id_S : S \rightarrow S$ es un homeomorfismo que preserva la orientación. Una definición precisa de lo que significa preservar o invertir orientación puede revisarse en [22] para el caso diferenciable.

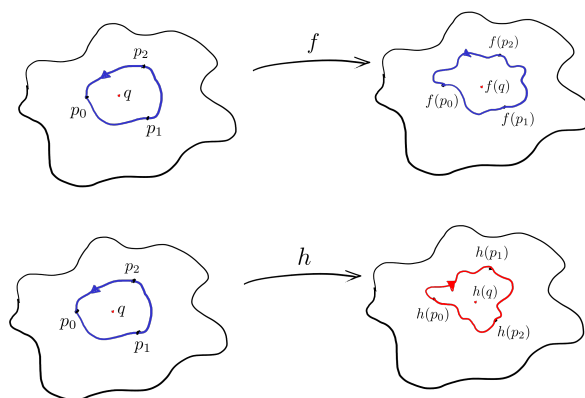


Figura 3.6: El homeomorfismo f preserva la orientación; el homeomorfismo h invierte la orientación.

Ejemplo 3.7. A continuación presentamos homeomorfismos que invierten la orientación en algunas superficies orientables.

- En $\mathbb{R}^2$ la conjugación compleja $(x, y) = z \mapsto \bar{z} = (x, -y)$ invierte la orientación.
- En la esfera, $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ dado por $f(x, y, z) = (x, y, -z)$ invierte la orientación.

- La suma conexa de tres toros $S_3 := \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ (ver Ejemplo 2.6), puede encajarse en $\mathbb{R}^3$ de manera simétrica a lo largo del plano xy , de tal forma que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x, y, z) = (x, y, -z)$ cumple que $f(S_3) = S_3$. En dicho caso, la reflexión f se restringe a un homeomorfismo de $S_3 \rightarrow S_3$ que invierte la orientación.

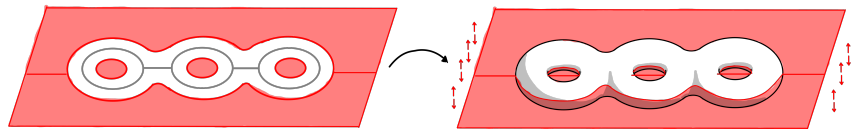


Figura 3.7: Construcción del encaje simétrico de S_3 a lo largo del plano xy .

Cualquier superficie orientable (posiblemente de tipo infinito y posiblemente con frontera no vacía) puede encajarse en $\mathbb{R}^3$ de manera simétrica a lo largo del plano xy . La forma de lograr tal encaje se describe en [28, Sección 4.2.1], mediante el inflamiento de una vecindad regular de una gráfica plana que describe la estructura de la superficie. Por lo tanto, la reflexión siempre define un homeomorfismo que invierte la orientación.

3.2. Topología compacto-abierta

Como mencionamos previamente, el grupo de homeomorfismos también tiene estructura topológica. Dado un compacto $K \subseteq \Sigma$ y un abierto $U \subseteq \Sigma$ de una superficie Σ , definimos

$$(K, U) := \{f \in \text{Homeo}(\Sigma) : f(K) \subseteq U\}.$$

Dichos conjuntos conforman una *prebase*⁸ para la topología en $\text{Homeo}(\Sigma)$ que se conoce como la **topología compacto-abierta**. Con dicha topología, tenemos el siguiente teorema, cuya demostración se divide en las Proposiciones 3.10 y 3.11.

Teorema 3.8. *El grupo de homeomorfismos de una superficie Σ , $\text{Homeo}(\Sigma)$, es un grupo topológico con la topología compacto-abierta.*

El teorema anterior es general en el sentido de que es independiente de si la superficie Σ es orientable, compacta o con frontera no vacía. Para proceder con la demostración de las Proposiciones 3.10 y 3.11 debemos simplificar la prebase para la topología compacto-abierta. Esto lo haremos mediante el siguiente resultado.

Lema 3.9. *La colección de abiertos (en la topología compacto-abierta) $\{(\overline{K}, U)\}$ donde $K \subseteq \Sigma$ es abierto y conexo con $\overline{K}$ compacto y $U \subseteq \Sigma$ abierto, conforma una prebase de la topología compacto-abierta.*

⁸Una prebase $\mathcal{P}$ para una topología de X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es X . La **topología generada por una prebase** $\mathcal{P}$ es aquella definida por la colección de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{P}$.

Demostración. Sea (C, U) un prebásico en la topología compacto-abierta y tomemos $f \in (C, U)$. Entonces $C \subseteq f^{-1}(U)$. Dado que Σ es Hausdorff, localmente conexo y localmente compacto, para cada $p \in C$, existe un abierto U_p , conexo y *relativamente compacto*⁹ tal que $p \in U_p \subseteq \overline{U_p} \subseteq f^{-1}(U)$. Por la compacidad de C , podemos tomar una cantidad finita $p_1, \dots, p_k \in C$ tales que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_{p_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^k \overline{U_{p_i}} \subseteq f^{-1}(U)$. Se sigue que $f \in \bigcap_{i=1}^k (\overline{U_{p_i}}, U) \subseteq (C, U)$. $\square$

Proposición 3.10. *La operación composición*

$$\begin{aligned} \mu : \text{Homeo}(\Sigma) \times \text{Homeo}(\Sigma) &\longrightarrow \text{Homeo}(\Sigma) \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g, \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. Sea (K, U) un abierto prebásico cualquiera y sean $f, g \in \text{Homeo}(\Sigma)$ tales que $\mu(f, g) = f \circ g \in (K, U)$. Se cumple entonces que $g(K) \subseteq f^{-1}(U)$. Dado que Σ es localmente compacta y que $g(K)$ es compacto, existe un abierto $V \subseteq \text{Homeo}(\Sigma)$ relativamente compacto tal que $g(K) \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq f^{-1}(U)$. Se tiene así que $g(K) \subseteq V$ y $f(\overline{V}) \subseteq U$, lo que implica $(f, g) \in (\overline{V}, U) \times (K, V) \subseteq \mu^{-1}(K, U)$. Esto prueba que la operación composición es continua. $\square$

Proposición 3.11. *La involución*

$$\begin{aligned} \nu : \text{Homeo}(\Sigma) &\longrightarrow \text{Homeo}(\Sigma) \\ f &\longmapsto f^{-1}, \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Tomemos un abierto prebásico $(\overline{K}, U)$ como los definidos en el Lema 3.9, y sea $h \in \text{Homeo}(\Sigma)$ tal que $\nu(h) = h^{-1} \in (\overline{K}, U)$. Del mismo modo que se demostró en el Lema 3.9, existen entornos $V_1, V_2 \subseteq \Sigma$ abiertos, tales que

$$h^{-1}(K) \subseteq h^{-1}(\overline{K}) \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq U.$$

Se sigue que $\overline{V_2} \setminus V_1 \subseteq U \setminus h^{-1}(\overline{K})$. Aplicando h se obtiene que $h(\overline{V_2} \setminus V_1) = h(\overline{V_2}) \setminus h(V_1) \subseteq h(U) \setminus \overline{K}$. De esta manera, dado $p \in h^{-1}(K) \subseteq V_1$, el conjunto

$$M := (\{p\}, K) \cap (\overline{V_2} \setminus V_1, h(U) \setminus \overline{K}),$$

define una vecindad de h .

Veamos que $\nu(M) \subseteq (\overline{K}, U)$. En efecto, tomemos $f \in M$. Por un lado, tenemos que $\Sigma = f(V_1) \sqcup f(\overline{V_2} \setminus V_1) \sqcup f(\Sigma \setminus \overline{V_2})$ es una unión disjunta y por otro lado sabemos que $f(\overline{V_2} \setminus V_1) \subseteq h(U) \setminus \overline{K}$.

⁹Un subconjunto $A \subseteq X$ de un espacio topológico X es *relativamente compacto* si su cerradura en X es compacta.

De este modo concluimos que $\overline{K} \subseteq f(V_1) \sqcup f(\Sigma \setminus \overline{V_2})$. Sin embargo, $\overline{K}$ es conexo, por lo que debe tenerse $\overline{K} \subseteq f(V_1)$ o bien $\overline{K} \subseteq f(\Sigma \setminus \overline{V_2})$. Dado que $f(p) \in K$, tenemos que $\overline{K} \cap f(V_1) \neq \emptyset$. Así, $\overline{K} \subseteq f(V_1)$, y por lo tanto $\nu(f) = f^{-1} \in (\overline{K}, U)$. $\square$

Una de las propiedades más interesantes de la topología compacto-abierta es que la acción de grupo de homeomorfismos sobre la superficie Σ es continua; en otras palabras, la *función evaluación*

$$\begin{array}{ccc} \text{Homeo}(\Sigma) \times \Sigma & \longrightarrow & \Sigma \\ (f, p) & \longmapsto & f(p) \end{array}$$

es continua; abajo en la Proposición 3.12 damos una prueba de este resultado.

En general, R. Arens decide llamar *topología admisible* de $\text{Homeo}(X)$ a toda aquella que hace continua a la acción del grupo de homeomorfismos sobre el espacio topológico X . Una consecuencia importante del estudio de Arens es que para toda superficie Σ , la topología compacto-abierta en $\text{Homeo}(\Sigma)$ es, de hecho, la topología más gruesa entre todas aquellas que cumplen la propiedad de admisibilidad. Recomendamos revisar el interesante artículo [2, Teorema 2] para más detalles.

Proposición 3.12. *Sea Σ una superficie topológica y $\text{Homeo}(\Sigma)$ el grupo de homeomorfismo de Σ con la topología compacto-abierta. Entonces la función evaluación*

$$\begin{array}{ccc} \text{Homeo}(\Sigma) \times \Sigma & \longrightarrow & \Sigma \\ (f, p) & \longmapsto & f(p) \end{array}$$

es continua.

Demostración. Sean $f \in \text{Homeo}(\Sigma)$ y $p \in \Sigma$. Sea $U \subseteq \Sigma$ una vecindad de $f(p)$. Entonces $f^{-1}(U)$ es una vecindad de p . Sabemos que Σ es localmente compacta, por lo que existe un abierto V con $\overline{V}$ compacto y

$$p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq f^{-1}(U).$$

Podemos deducir que $f(\overline{V}) \subseteq U$ y con ello $f \in (\overline{V}, U)$. Nótese que $(f, p) \in (\overline{V}, U) \times V$ y que cada $(h, q) \in (\overline{V}, U) \times V$ cumple $h(q) \in h(\overline{V}) \subseteq U$, por lo que $(\overline{V}, U) \times V$ está contenido en la preimagen de U bajo la función evaluación. $\square$

Observación 3.13. *La continuidad de la función evaluación implica que: si $\{f_n\}$ es una sucesión de homeomorfismos que converge a $f \in \text{Homeo}(\Sigma)$ con la topología compacto-abierta, entonces f_n converge a f puntualmente.*

El grupo de homeomorfismos hereda propiedades topológicas de Σ , como las enunciadas a continuación.

Proposición 3.14. *Para toda superficie Σ , $\text{Homeo}(\Sigma)$ es Hausdorff.*

Demostración. Dados $f, g \in \text{Homeo}(\Sigma)$ distintos, en algún punto $p \in \Sigma$ tendremos $f(p) \neq g(p)$. Ya que Σ es Hausdorff, podemos encontrar $U, V \subseteq \Sigma$ vecindades de $f(p)$ y $g(p)$ respectivamente que son disjuntas. Nótese que $f \in (\{p\}, U)$, $g \in (\{p\}, V)$ y $(\{p\}, U) \cap (\{p\}, V) = \emptyset$. $\square$

Proposición 3.15. *Para toda superficie Σ , $\text{Homeo}(\Sigma)$ es segundo numerable.*

Demostración. Escogemos una base numerable $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de abiertos de Σ , relativamente compactos, homeomorfos al disco $\mathbb{D}^2$ (o al semidisco $\mathbb{D}^2 \cap \mathbb{H}^2$ para puntos frontera). La colección numerable de abiertos $\Gamma = \{(\overline{B_n}, B_m)\}_{n, m \in \mathbb{N}}$ es una prebase para $\text{Homeo}(\Sigma)$ con la topología compacto-abierta. Notemos que para cualquier homeomorfismo $f \in \text{Homeo}(\Sigma)$, y cualquier abierto B_n , existe m tal que $\overline{B_m} \subseteq f^{-1}(B_n)$. Así que $f \in (\overline{B_m}, B_n)$.

Ahora, basta ver que $\mathcal{B}(\Gamma)$, la base generada por Γ , genera la topología compacto-abierta. Esto, porque $\mathcal{B}(\Gamma)$ consiste en las intersecciones finitas de los elementos de Γ , por lo tanto sigue siendo numerable. Sea (K, U) cualquier abierto prebásico de $\text{Homeo}(\Sigma)$ y tomemos $f \in (K, U)$. Dado $x \in K$, existe j_x tal que $f(x) \in B_{j_x} \subseteq \overline{B_{j_x}} \subseteq U$. Similarmente, existe i_x tal que

$$x \in B_{i_x} \subseteq \overline{B_{i_x}} \subseteq f^{-1}(B_{j_x}) \subseteq f^{-1}(\overline{B_{j_x}}) \subseteq f^{-1}(U),$$

de modo que $f(\overline{B_{i_x}}) \subseteq B_{j_x} \subseteq U$. Por la compacidad de K , existen $x_1, \dots, x_k \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{l=1}^k B_{i_{x_l}}$. Nótese que $f \in \bigcap_{l=1}^k (\overline{B_{i_{x_l}}}, B_{j_{x_l}})$. Pero si $g \in \bigcap_{l=1}^k (\overline{B_{i_{x_l}}}, B_{j_{x_l}})$, entonces

$$g(K) \subseteq \bigcup_{l=1}^k g(B_{i_{x_l}}) \subseteq \bigcup_{l=1}^k B_{j_{x_l}} \subseteq U.$$

Por lo tanto $f \in \bigcap_{l=1}^k (\overline{B_{i_{x_l}}}, B_{j_{x_l}}) \subseteq (K, U)$, probando lo deseado. $\square$

Observación 3.16. *Una consecuencia de que $\text{Homeo}(\Sigma)$ sea segundo numerable es que es separable. De cada abierto de la base numerable se puede escoger un punto, para formar un subconjunto $D \subseteq \text{Homeo}(\Sigma)$, que será denso y numerable.*

Observación 3.17. *Las demostraciones expuestas en esta sección son válidas, en general, para $\text{Homeo}(X)$, cuando X es un espacio topológico Hausdorff, localmente compacto y localmente conexo. Tales propiedades son satisfechas por superficies. Específicamente la Proposición 3.14 sólo utiliza que Σ sea Hausdorff; las Proposiciones 3.10 y 3.12 requieren adicionalmente que Σ sea localmente compacta; mientras que para el Lema 3.9, la Proposición 3.11 y el Teorema 3.8 también se utilizó que Σ fuera localmente conexa.*

3.3. Metrizabilidad invariante del grupo de homeomorfismos

El grupo $(\mathbb{R}^2, +)$ con la métrica euclidiana es un grupo topológico, donde las traslaciones $p \mapsto p + c$ son isometrías. Esta propiedad de la métrica se conoce como *invarianza de la operación del grupo*. Como $\mathbb{R}^2$ es conmutativo, no hace falta distinguir si la invarianza es mediante sumar por la izquierda o por la derecha. En general este no es el caso, como veremos en la Sección 3.4 con el grupo $\text{Homeo}(\Sigma)$. De momento, consideremos una cualidad de metrizabilidad en grupos descrita en la siguiente definición.

Definición 3.18. Sea G un grupo con una métrica $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que d es una métrica invariante izquierda si

$$d(f, g) = d(hf, hg), \quad \text{para cada } f, g, h \in G.$$

La métrica d es invariante derecha si

$$d(f, g) = d(fh, gh), \quad \text{para cada } f, g, h \in G.$$

Si G es un grupo con una métrica d invariante tanto por la izquierda como por la derecha, entonces G es grupo topológico con la topología inducida por d . Para esto basta ver que la función $(g, h) \mapsto g^{-1}h$ es continua (por el Lema 3.30). Esto sigue directamente de la desigualdad

$$d(g^{-1}h, \hat{g}^{-1}\hat{h}) \leq d(\hat{g}, g) + d(\hat{h}, h).$$

En general una métrica arbitraria en un grupo, no suele ser invariante izquierda y derecha al mismo tiempo. Además, hay ocasiones en las que no habrá invarianza izquierda ni derecha (Ejemplo 3.27).

Observación 3.19. Sea G un grupo topológico, con una métrica d invariante por la izquierda, compatible con la topología. Dado que $G \times G \rightarrow G \times G : (f, g) \mapsto (f^{-1}, g^{-1})$ es un homeomorfismo, la métrica $d'(f, g) = d(f^{-1}, g^{-1})$ es invariante por la derecha y es compatible con la topología. Análogamente si d es invariante derecha, entonces d' es invariante izquierda.

Una forma de comprobar que $\text{Homeo}(\Sigma)$ tiene una métrica compatible que es invariante por la izquierda (o por la derecha) es aplicando el siguiente teorema, cuyas hipótesis son claramente satisfechas por el grupo de homeomorfismos de una superficie. Una demostración se puede encontrar en [7, Teorema 2.B.2].

Teorema 3.20 (Birkhoff-Kakutani). Sea G un grupo topológico. Entonces, G es Hausdorff y el neutro $1 \in G$ tiene una base numerable de abiertos si, y sólo si, G es metrizable. Más aún, la métrica compatible $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$ se puede escoger de forma que sea invariante izquierda.

Corolario 3.21. *El grupo $\text{Homeo}(\Sigma)$ admite una métrica invariante izquierda.*

El teorema anterior es muy fuerte porque logra sincronizar la topología de un grupo topológico con una métrica invariante izquierda (o derecha). Sin embargo, la existencia de una métrica invariante izquierda no significa que sea completa. Un claro ejemplo es $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Aún así, hay situaciones en las que sí se puede afirmar que una métrica invariante izquierda es una métrica completa. Por ejemplo, si G es un grupo topológico localmente compacto con una métrica compatible d invariante izquierda, entonces G es completo con dicha métrica [7, Observación 2.B.1].

Queremos encontrar una métrica completa para $\text{Homeo}(\Sigma)$. La razón por la que no acudimos al planteamiento anterior es porque para superficies cuyo grupo fundamental no es finitamente generado, el grupo de homeomorfismos no es localmente compacto (Observación 4.10 de la Sección 4). Es por ello que tenemos que buscar una alternativa más elemental.

3.4. El grupo de homeomorfismos es un grupo polaco

Se dice que un grupo topológico G es un *grupo polaco* si es separable y es completamente metrizable. Es decir, existe una métrica $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$ completa y compatible con la topología de G . En esta sección nos dedicaremos a probar que el grupo de homeomorfismos de toda superficie, con la topología compacto-abierta, es un grupo polaco.

Teorema 3.22. *Para toda superficie Σ , el grupo de homeomorfismos $\text{Homeo}(\Sigma)$ es un grupo polaco.*

De la Observación 3.16 sabemos que $\text{Homeo}(\Sigma)$ es separable, por lo que para demostrar que es polaco bastará con exhibir una métrica completa compatible con la topología compacto-abierta.

Dado que las superficies son espacios completamente metrizables (consecuencia del Teorema 4.5 y 4.6 de [20]), podemos suponer que en una superficie Σ existe una métrica $d : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ completa. Dado $f \in \text{Homeo}(\Sigma)$, un compacto $K \subseteq \Sigma$ y un número $\varepsilon > 0$, definimos

$$[f, K, \varepsilon] := \left\{ g \in \text{Homeo}(\Sigma) : \sup_{x \in K} d(f(x), g(x)) < \varepsilon \right\}.$$

Estos conjuntos conforman una base para la topología conocida como ***topología de convergencia compacta***.

Resulta que en $\text{Homeo}(\Sigma)$, la topología *compacto-abierta* coincide con la de *convergencia compacta* [30, Teorema 46.8]. Así que podemos aprovechar esta nueva descripción y definir, de manera explícita, métricas compatibles y completas en $\text{Homeo}(\Sigma)$. Las métricas que definiremos a continuación dependerán de si la superficie Σ es compacta o no.

Definición 3.23. Sea Σ una superficie compacta con una métrica completa d . Definimos la métrica $\rho : \text{Homeo}(\Sigma) \times \text{Homeo}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(f, g) = \max_{x \in \Sigma} d(f(x), g(x)).$$

Con la métrica ρ considérese en $\text{Homeo}(\Sigma)$ la métrica $D : \text{Homeo}(\Sigma) \times \text{Homeo}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$D(f, g) = \rho(f, g) + \rho(f^{-1}, g^{-1}).$$

Para el caso no compacto tenemos la métrica que describimos a continuación. En esencia son similares, salvo el hecho de que se requiere el uso de una saturación por compactos. Diremos que una colección $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de Σ es una *saturación por compactos* si cada K_n es compacto, $K_n \subseteq \text{int } K_{n+1}$ y $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \Sigma$.

Definición 3.24. Sea Σ una superficie no compacta y $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una saturación por compactos de Σ . Dados $f, g \in \text{Homeo}(\Sigma)$ definimos

$$\rho_n(f, g) := \min \left\{ \max_{x \in K_n} \{d(f(x), g(x))\}, 2^{-n} \right\}.$$

Se define en $\text{Homeo}(\Sigma)$ la métrica $\rho : \text{Homeo}(\Sigma) \times \text{Homeo}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(f, g) \leq 1,$$

y mediante ρ se define la métrica $D : \text{Homeo}(\Sigma) \times \text{Homeo}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$D(f, g) := \rho(f, g) + \rho(f^{-1}, g^{-1}).$$

Mostraremos que las métricas ρ y D en la Definición 3.24 son compatibles con la topología de convergencia compacta (Proposición 3.25). Para verificar la compatibilidad de las métricas ρ y D de la Definición 3.23 se puede emular la misma demostración.

Proposición 3.25. La métrica ρ de la Definición 3.24 es compatible con la topología de convergencia compacta.

Demostración. Veamos que ρ es compatible con la topología de convergencia compacta. Tomemos un abierto básico de la topología de convergencia compacta

$$[h, K, \varepsilon] = \left\{ g' \in \text{Homeo}(\Sigma) : \sup_{x \in K} d(h(x), g'(x)) < \varepsilon \right\},$$

con $K \subseteq \Sigma$ compacto, $h \in \text{Homeo}(\Sigma)$ y $\varepsilon > 0$. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $K \subseteq K_n$. Definamos $\varepsilon' :=$

$\min\{\varepsilon, 2^{-n-1}\}$ y tomemos

$$g \in B_\rho(h, \varepsilon') := \{g' \in \text{Homeo}(\Sigma) : \rho(h, g') < \varepsilon'\}.$$

Tenemos que $\max_{x \in K} d(h(x), g(x)) \leq \rho_n(h, g) < \rho(h, g) < \varepsilon$. Por lo tanto $g \in [h, K, \varepsilon]$. De este modo $B_\rho(h, \varepsilon') \subseteq [h, K, \varepsilon]$.

Ahora, si tomamos una bola arbitraria

$$B_\rho(h, \varepsilon) := \{g' \in \text{Homeo}(\Sigma) : \rho(h, g') < \varepsilon\},$$

definida con algún $h \in \text{Homeo}(\Sigma)$ y $\varepsilon > 0$, entonces para algún natural $n \geq 2$ se tiene $\sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Definimos $\varepsilon' = \min\{\frac{\varepsilon}{2n}, 2^{-n}\}$ y tomamos cualquier

$$g \in \bigcap_{k=1}^{n-1} [h, K_k, \varepsilon'],$$

donde estamos intersectando abiertos prebásicos de la topología de convergencia compacta. Se verifica que $\rho_k(h, g) < \varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{2n}$ para toda $k < n$. De este modo

$$\rho(h, g) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2n} < \varepsilon,$$

y por lo tanto, $g \in B_\rho(h, \varepsilon)$. Esto prueba que

$$\bigcap_{k=1}^{n-1} \left[h, K_k, \min\left\{\frac{\varepsilon}{2n}, 2^{-n}\right\} \right] \subseteq B_\rho(h, \varepsilon). \quad \square$$

La métrica ρ de la Definición 3.24, no asegura completitud métrica, porque si una sucesión de homeomorfismos $\{f_n\}$ es de Cauchy, poco sabemos de la sucesión $\{f_n^{-1}\}$. De ahí nuestra necesidad de considerar la métrica D . Tanto la métrica D de la Definición 3.23 como la métrica D de la Definición 3.24 son completas. En la siguiente proposición sólo demostraremos el caso de la métrica D de la Definición 3.24, pues el caso de la Definición 3.23 es aún más sencillo.

Proposición 3.26. *Sea Σ una superficie no compacta. La métrica D de la Definición 3.24, es una métrica completa en $\text{Homeo}(\Sigma)$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de $\text{Homeo}(\Sigma)$ respecto a la métrica D . Tomemos $p \in \Sigma$ y sea $M \in \mathbb{N}$ tal que el compacto K_M contenga al punto p . Dado $\varepsilon > 0$, con $2^{-M} > \varepsilon$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $\varepsilon > D(f_n, f_m)$. De la siguiente cadena de desigualdades

$$2^{-M} > \varepsilon > D(f_n, f_m) \geq \rho(f_n, f_m) \geq \rho_M(f_n, f_m) \geq d(f_n(p), f_m(p))$$

concluimos que para $m, n \geq N$ se tiene $d(f_n(p), f_m(p)) < \varepsilon$, lo cual implica que la sucesión $\{f_n(p)\}$ es de Cauchy en Σ , y debe converger a algún punto $f(p) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p)$.

El hecho de que $p \in K_M$ haya sido arbitrario, implica que la sucesión f_n es uniformemente de Cauchy en K_M , y por lo tanto, converge de manera uniforme a f en K_M . Así que f es continua tanto en K_M como en $\text{int}(K_M)$. Nuevamente, $M \in \mathbb{N}$ fue arbitrario, y f se puede definir en $\bigcup_{M \in \mathbb{N}} \text{int}(K_M) = \Sigma$. Por lo tanto f es continua en Σ .

De manera análoga podemos demostrar que la sucesión f_m^{-1} converge de manera puntual a una función continua $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$.

Probaremos ahora que f es un homeomorfismo cuya inversa coincide con h . Tomemos $p \in \Sigma$ y definamos $q_m := f_m^{-1}(p)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{q_m\}$ converge a $h(p)$ con $h(p) \in \text{int}(K_M)$ para algún natural M . Por lo tanto, existe un $L \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m > L$, se tiene $q_m \in \text{int}(K_M) \subseteq K_M$.

Por otro lado, sabemos que la sucesión $\{f_n\}$ es de Cauchy, por lo que para todo $0 < \varepsilon < 2^{-M}$ existe un natural L' tal que para todo $m, n > L'$ se satisface

$$2^{-M} > \varepsilon > D(f_n, f_m) \geq \rho_M(f_n, f_m).$$

Dado que $\rho_M(f_n, f_m) < 2^{-M}$, se tiene que

$$\rho_M(f_n, f_m) = \max_{q \in K_M} d(f_n(q), f_m(q)).$$

Por lo tanto, si $m, n > \max\{L, L'\}$, se tiene por un lado que $q_m \in K_M$, y por otro lado

$$d(f_n(f_m^{-1}(p)), p) = d(f_n(q_m), f_m(q_m)) \leq \max_{q \in K_M} d(f_n(q), f_m(q)) = \rho_M(f_n, f_m) \leq D(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Tomar los límites $m \rightarrow \infty$ y $n \rightarrow \infty$ para ver que

$$\varepsilon > \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} d(f_n(f_m^{-1}(p)), p) = d\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(\lim_{m \rightarrow \infty} f_m^{-1}(p)\right), p\right) = d(f(h(p)), p).$$

Dado que ε fue arbitrario, se tiene que $d(f(h(p)), p) = 0$, por lo que $f(h(p)) = p$. De manera análoga se cumple que $h(f(p)) = p$. Terminamos concluyendo así que h es la función inversa de f .

Finalmente, veamos que f_n converge a f respecto a la métrica D . Sea $\varepsilon > 0$. Por un lado podemos

encontrar $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por otro lado, como las sucesiones $\{f_n\}$ y $\{f_n^{-1}\}$ convergen uniformemente en cada compacto K_i a f y f^{-1} , respectivamente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, y toda $k \leq M$ se tenga

$$\rho_k(f_n, f), \rho_k(f_n^{-1}, f^{-1}) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

De este modo se concluye que si $n \geq N$, entonces

$$D(f_n, f) < \varepsilon. \quad \square$$

Por el hecho de que un homeomorfismo no es necesariamente una isometría, la métrica ρ de la Definición 3.23 en general no es invariante izquierda (Ejemplo 3.27), aunque un cálculo sencillo verifica que ρ sí es invariante derecha (Proposición 3.28).

Ejemplo 3.27 (La métrica ρ en $\text{Homeo}(\mathbb{S}^2)$ no es invariante izquierda). *Recordemos que el diámetro de la esfera $\mathbb{S}^2$, $\text{diam}(\mathbb{S}^2)$, está dado por la distancia entre el polo norte $N = (0, 0, 1)$ y el polo sur $S = (0, 0, -1)$. En la esfera, podemos tomar un homeomorfismo f cuya distancia a la identidad $\text{id}_{\mathbb{S}^2}$ cumpla que para alguna $p_0 \in \mathbb{S}^2$,*

$$\text{diam}(\mathbb{S}^2) > \rho(f, \text{id}_{\mathbb{S}^2}) = d(f(p_0), p_0) > 0,$$

por ejemplo, tomar f una rotación por un ángulo diminuto.

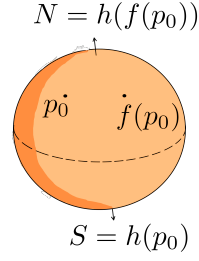
También podemos construir un homeomorfismo h de la esfera tal que $h(f(p_0)) = N$, y $h(p_0) = S$ (Figura 3.8). Para una construcción del homeomorfismo h recordar el Ejemplo 3.4. Esto implica que

$$\rho(hf, h) = \text{diam}(\Sigma) > \rho(f, \text{id}).$$

Proposición 3.28. *Sea Σ una superficie compacta y ρ la métrica en $\text{Homeo}(\Sigma)$ de la Definición 3.23. Entonces ρ es invariante derecha.*

Demostración. Sean $h, f, g \in \text{Homeo}(\Sigma)$. Dado $x \in \Sigma$, definimos $y = h^{-1}(x)$, y notemos que

$$d(fh(x), gh(x)) = d(f(y), g(y)) \leq \rho(f, g).$$

Figura 3.8: Homeomorfismo h que no es isometría.

De este modo $\rho(fh, gh) \leq \rho(f, g)$. Lo anterior funciona para cualesquiera $f, g, h \in \text{Homeo}(\Sigma)$. Así que podemos definir los homeomorfismos $\tilde{f} = fh, \tilde{g} = gh, \tilde{h} = h^{-1}$, y seguir teniendo

$$\rho(f, g) = \rho(\tilde{f}\tilde{h}, \tilde{g}\tilde{h}) \leq \rho(\tilde{f}, \tilde{g}) = \rho(fh, gh).$$

Por lo tanto, $\rho(fh, gh) = \rho(f, g)$. □

La métrica ρ de la Definición 3.24 no va a ser invariante derecha y tampoco invariante izquierda, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.29 (La métrica ρ en $\text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$ no es invariante izquierda ni invariante derecha). *En el plano $\mathbb{R}^2$, consideremos para cada $n \geq 1$ el conjunto $K_n := \overline{B}_{2^{n-4}}(0) = \{p \in \mathbb{R}^2 : |p| \leq 2^{n-4}\}$. Si hacemos $f := id, g := -id$ y $h := 2id$, tendremos*

$$d(f(p), g(p)) = 2|p| \quad \text{y} \quad d(fh(p), gh(p)) = 4|p| = d(hf(p), hg(p)).$$

Con ello se observa que $\rho_1(f, g) = \min\{2^{-2}, 2^{-1}\} = 2^{-2}$ y similarmente $\rho_1(hf, hg) = \rho_1(fh, gh) = 2^{-1}$. Pero para $n \geq 2$ sucede que

$$\rho_n(f, g) = 2^{-n} = \rho_n(fh, gh) = \rho_n(gf, hg).$$

Por lo tanto $\rho(f, g) \neq \rho(fh, gh) = \rho(hf, hg)$.

3.5. Subgrupos especiales

Incluidos en $\text{Homeo}(\Sigma)$ existen algunos subgrupos que son muy importantes en la literatura. Por ejemplo, $\text{Homeo}_0(\Sigma)$, que denota a la componente arcoconexa de la identidad id_Σ , es un subgrupo normal, como demostraremos en la Proposición 3.31.

Lema 3.30. *Sea G un grupo con topología τ . Entonces G es grupo topológico si y sólo si la función $\lambda(f, g) = f^{-1} \cdot g$ es continua.*

Demostración. Si G es un grupo topológico, la continuidad de λ se sigue de ver a esta función como la siguiente composición de funciones continuas

$$\begin{array}{ccccc} \lambda : & G \times G & \xrightarrow{\nu \times id} & G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \\ & (f, g) & \mapsto & (f^{-1}, g) & \mapsto & f^{-1} \cdot g. \end{array}$$

Recíprocamente, supongamos que la función λ es continua. Entonces la involución se compone de las siguientes funciones continuas

$$\begin{array}{ccccc} \nu : & G & \longrightarrow & G \times \{1\} & \xrightarrow{\lambda} & G \\ & f & \mapsto & (f, 1) & \mapsto & f^{-1} \cdot 1 = f^{-1}. \end{array}$$

En consecuencia, la operación del grupo se compone de funciones continuas

$$\begin{array}{ccccc} \mu : & G \times G & \xrightarrow{\nu \times id} & G \times G & \xrightarrow{\lambda} & G \\ & (f, g) & \mapsto & (f^{-1}, g) & \mapsto & (f^{-1})^{-1} \cdot g = f \cdot g. \end{array}$$

□

Proposición 3.31. *Sea G un grupo topológico y G_0 la componente arcoconexa del elemento neutro $1 \in G$. Se cumple que G_0 es un subgrupo normal de G .*

Demostración. Por el Lema 3.30 tenemos función $\lambda : G \times G \rightarrow G$ dada por $\lambda(g, h) = g^{-1}h$ es continua. Si $g, h \in G_0$, entonces existen dos caminos $\mathcal{L}, \mathcal{C} : [0, 1] \rightarrow G$ de tal forma que $\mathcal{L}(0) = 1 = \mathcal{C}(0)$, $\mathcal{L}(1) = g$ y $\mathcal{C}(1) = h$. Con esto podemos construir el camino

$$\begin{array}{ccccc} [0, 1] & \longrightarrow & G \times G & \longrightarrow & G \\ t & \mapsto & (\mathcal{L}(t), \mathcal{C}(t)) & \mapsto & \mathcal{L}(t)^{-1}\mathcal{C}(t) \end{array}$$

define un camino que conecta a 1 con $g^{-1}h$. Esto prueba que $g^{-1}h \in G_0$. Concluimos así que $G_0 \leq G$.

Veamos que G_0 es normal en G . Nuevamente por el Lema 3.30 tenemos que la conjugación $h \mapsto g^{-1}hg$ es una función continua. Dado $h \in G_0$ y cualquier $g \in G$, existe un camino $\mathcal{L} : [0, 1] \rightarrow G$ tal que $\mathcal{L}(0) = 1$ y $\mathcal{L}(1) = h$. Por lo tanto, tenemos la composición de funciones continuas

$$\begin{array}{ccccc} [0, 1] & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G \\ t & \mapsto & \mathcal{L}(t) & \longrightarrow & g^{-1}\mathcal{L}(t)g \end{array}$$

que conecta a 1 con $g^{-1}hg$, y se concluye que $g^{-1}hg \in G_0$.

□

Si $\partial\Sigma \neq \emptyset$, podemos definir

$$\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma) := \{f \in \text{Homeo}(\Sigma) : f|_{\partial\Sigma} = \text{id}_{\partial\Sigma}\},$$

y si $\partial\Sigma = \emptyset$ conviene establecer

$$\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma) := \text{Homeo}(\Sigma).$$

Proposición 3.32. *Para toda superficie Σ , $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ es un subgrupo normal cerrado de $\text{Homeo}(\Sigma)$.*

Demostración. Sean $f \in \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ y $h \in \text{Homeo}(\Sigma)$. Entonces para cualquier $p \in \partial\Sigma$, se debe tener que $h(p) \in \partial\Sigma$. Por lo tanto $f(h(p)) = h(p)$, concluyendo que $h^{-1} \circ f \circ h(p) = h^{-1}(f(h(p))) = h^{-1}(h(p)) = p$. De este modo $h^{-1}fh \in \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$.

El hecho de ser cerrado se argumenta usando que si $\{f_n\} \subseteq \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ converge a algún $f \in \text{Homeo}(\Sigma)$ en la topología compacto-abierta, entonces $\{f_n\}$ converge puntualmente a f (Observación 3.13). En ese sentido, para toda $p \in \partial\Sigma$, se tiene que $p = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) = f(p)$. Por lo tanto, $f \in \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$. $\square$

En caso de que la superficie S sea orientable, para los homeomorfismos que preservan la orientación reservamos la notación siguiente

$$\text{Homeo}^+(S) := \{f \in \text{Homeo}(S) : f \text{ preserva la orientación}\}.$$

Recordemos que toda superficie orientable admite homeomorfismos que invierten la orientación (véase el Ejemplo 3.7). Si la superficie N es no orientable, por convención ponemos

$$\text{Homeo}^+(N) := \text{Homeo}(N).$$

Proposición 3.33. *Para toda superficie orientable S , $\text{Homeo}^+(S)$ es un subgrupo normal abierto y cerrado de $\text{Homeo}(S)$ que tiene índice 2.*

Demostración. Si f preserva la orientación y g la invierte, entonces $f \circ g$ y $g \circ f$ invierten la orientación. Si h también invierte la orientación, entonces $g \circ h$ preserva la orientación, pues sólo hay dos orientaciones posibles. De este modo $g \circ f \circ g^{-1} \in \text{Homeo}^+(S)$ para todo $g \in \text{Homeo}(S)$ y todo $f \in \text{Homeo}^+(S)$.

Si f y g invierten la orientación, entonces $f^{-1} \circ g$ preserva la orientación implicando que f y g son de la misma clase de equivalencia en $\text{Homeo}(S)/\text{Homeo}^+(S)$. De ello que $|\text{Homeo}(S)/\text{Homeo}^+(S)| = 2$.

Las métricas de las definiciones 3.23 y 3.24 permiten concluir que si dos homeomorfismos $f, g \in \text{Homeo}(S)$ son suficientemente cercanos, entonces ambos preservan la orientación de la superficie o ambos la invierten (Figura 3.9). Esto significa que la asignación orientación $\mathcal{O} : \text{Homeo}(S) \rightarrow \{0, 1\}$

$$h \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } h \text{ preserva orientación} \\ 0 & \text{si la invierte} \end{cases}$$

es localmente constante. En otras palabras, $\mathcal{O}$ es continua, donde $\{0, 1\}$ tiene la topología discreta. Nótese que esto implica que $\text{Homeo}^+(S) = \mathcal{O}^{-1}\{1\}$ es un subconjunto abierto y cerrado de $\text{Homeo}(S)$. $\square$

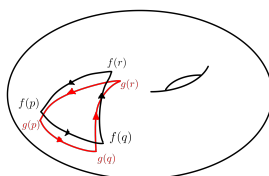


Figura 3.9: Acción de f y g en una triangulación orientada de S .

Por último, podemos definir

$$\text{Homeo}^+(\Sigma; \partial\Sigma) := \text{Homeo}^+(\Sigma) \cap \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma).$$

Nótese que si S es una superficie orientable con $\partial S \neq \emptyset$, entonces todo homeomorfismo $f \in \text{Homeo}(S; \partial S)$ también está en $\text{Homeo}^+(S)$. Al ser una intersección de subgrupos normales y cerrados, $\text{Homeo}^+(\Sigma; \partial\Sigma)$ es un subgrupo normal y cerrado del grupo de homeomorfismos.

Proposición 3.34. *Si S es una superficie orientable entonces todo elemento de $\text{Homeo}_0(S)$ preserva la orientación de S , es decir,*

$$\text{Homeo}_0(S) \leq \text{Homeo}^+(S).$$

Demostración. Recordemos que en la demostración de la Proposición 3.33 utilizamos la continuidad de la asignación orientación

$$\mathcal{O} : \text{Homeo}(S) \rightarrow \{0, 1\}$$

para ver que $\text{Homeo}^+(S)$ es cerrado en $\text{Homeo}(S)$. En este caso, notemos además que la imagen de $\text{Homeo}_0(S)$ bajo $\mathcal{O}$ es conexo y contiene a $\{1\}$. Concluimos que $\mathcal{O}(\text{Homeo}_0(S)) = \{1\}$. $\square$

Observación 3.35. *Nótese que si G es un grupo polaco y $H \leq G$ es un subgrupo cerrado, entonces H también es un grupo polaco. Esto porque cualquier métrica completa compatible con la topología de G induce una métrica completa compatible con la topología de H .*

4. El grupo modular de una superficie

En la Sección 3 discutimos la metrizableidad de $\text{Homeo}(\Sigma)$. Esto introduce una forma de medir cuánto de diferentes son dos homeomorfismos. Si la distancia entre dos homeomorfismos es suficientemente pequeña, esperaríamos que ambos transformaran de manera similar la superficie.

En esta sección definiremos el concepto *isotopía*, el cual describe a qué nos referimos cuando decimos que dos homeomorfismos transforman de manera similar la superficie. También, exploraremos la relación de este concepto con la conexidad por trayectorias en $\text{Homeo}(\Sigma)$. De este modo, podremos definir el *Grupo Modular* $\text{Mod}(\Sigma)$ (*Mapping Class Group*, $\text{MCG}(\Sigma)$, en inglés), y revisaremos cómo $\text{Mod}(\Sigma)$ hereda propiedades topológicas de $\text{Homeo}(\Sigma)$: como el hecho de ser un grupo topológico, Hausdorff y segundo numerable. Al final haremos una breve revisión de las alternativas para demostrar que también es un grupo polaco.

4.1. La relación entre isotopía y arcoconexidad

Una isotopía describe cómo un homeomorfismo se convierte en otro pasando continuamente por homeomorfismos intermedios indexados por tiempos $t \in [0, 1]$.

Definición 4.1. *Sea Σ una superficie. Una isotopía es una función $H : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \Sigma$ continua, tal que para todo $t \in [0, 1]$ la función*

$$\begin{aligned} H_t : \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ p &\longmapsto H(p, t) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

Podemos establecer la siguiente relación en $\text{Homeo}(\Sigma)$: diremos que dos homeomorfismos $f, g \in \text{Homeo}(\Sigma)$ son isotópicos si existe una isotopía $H : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \Sigma$ tal que $H_0 = f$ y $H_1 = g$.

La relación de isotopía es una relación de equivalencia. Más aún, f es isotópica a g si y sólo si $f^{-1} \circ g$ es isotópica a la identidad. Es importante notar que una isotopía es en particular una homotopía. Por lo tanto, si un homeomorfismo f es isotópico a id_Σ , entonces debe fijar la clase de homotopía de toda curva. Por ejemplo en la Figura 4.1, se observa que el giro de Dehn T ha cambiado la clase de homotopía de la curva naranja, y por ello no es isotópico a id_Σ . Para el converso, basta encontrar una colección particular de curvas cerradas simples, tal que si f fija la

clase de isotopía de cada una de ellas, entonces f es isotópico a id_Σ , este criterio se conoce como el *Método de Alexander* (ver detalles en [9, Proposición 2.8]).

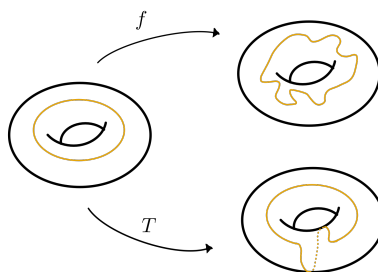


Figura 4.1: f fija la clase de isotopía de la curva naranja; el giro de Dehn T no es isotópico a la identidad.

Es de nuestro interés detallar las propiedades topológicas de $\text{Homeo}(\Sigma)$ que son consecuencia de la relación de isotopía. Por ejemplo, la proposición siguiente describe la relación que tiene el concepto de isotopía con la conexidad por trayectorias de $\text{Homeo}(\Sigma)$.

Proposición 4.2. *Sea $F : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \Sigma$ una función (no necesariamente continua) tal que para todo $t \in [0, 1]$, se tenga $F_t \in \text{Homeo}(\Sigma)$. Defina la función $\mathcal{L}$ por*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : [0, 1] &\longrightarrow \text{Homeo}(\Sigma) \\ t &\longmapsto F_t. \end{aligned}$$

Entonces F es continua si y sólo si $\mathcal{L}$ es continua.

Demostración. Supongamos que F es continua. Basta ver que $\mathcal{L}^{-1}(K, U)$ es un abierto, para K compacto y U abierto de Σ . Notar que

$$\mathcal{L}^{-1}(K, U) = \{t \in [0, 1] : K \times \{t\} \subseteq F^{-1}(U)\}.$$

Tomando $t_0 \in \mathcal{L}^{-1}(K, U)$ se tiene que $K \times \{t_0\} \subseteq F^{-1}(U)$. Por el Lema del Tubo [30, Lema 26.8], existe una vecindad W de t_0 con $K \times W \subseteq F^{-1}(U)$. Por lo tanto $t_0 \in W \subseteq \mathcal{L}^{-1}(K, U)$.

Ahora, supongamos que $\mathcal{L}$ es continua. Notemos que la función F se puede factorizar como la siguiente composición

$$\begin{aligned} F : \Sigma \times [0, 1] &\longrightarrow \Sigma \times \text{Homeo}(\Sigma) \longrightarrow \Sigma \\ (p, t) &\longmapsto (p, F_t) \longmapsto F_t(p) = F(p, t). \end{aligned}$$

La continuidad de la función evaluación (Proposición 3.12)

$$\begin{aligned} \text{Homeo}(\Sigma) \times \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ (f, p) &\longmapsto f(p) \end{aligned}$$

implica la continuidad de F . □

Del mismo modo que las proposiciones de la Sección 3.2, el resultado anterior puede generalizarse cuando Σ es sustituida por un espacio topológico X localmente compacto y Hausdorff, ya que son las hipótesis requeridas en la demostración de la Proposición 3.12.

Recordemos que $\text{Homeo}_0(\Sigma)$ denota a la componente arcoconexa de $\text{Homeo}(\Sigma)$ que contiene al homeomorfismo identidad. Por la Proposición 4.2 podemos caracterizar la relación de isotopía como sigue:

$$\begin{aligned} f \text{ y } g \text{ son isotópicos} &\Leftrightarrow f^{-1} \circ g \text{ es isotópico a } id_{\Sigma} \Leftrightarrow f^{-1} \circ g \in \text{Homeo}_0(\Sigma) \\ &\Leftrightarrow f \text{ y } g \text{ están en la misma clase lateral} \\ &\text{de } \text{Homeo}(\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma). \end{aligned}$$

La relevancia de esta condición cobra sentido por el hecho de que $\text{Homeo}_0(\Sigma)$ es subgrupo normal de $\text{Homeo}(\Sigma)$ (Proposición 3.31), por lo que el cociente $\text{Homeo}(\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma)$ tiene estructura de grupo. Del mismo modo, podemos restringir la definición de isotopía

Definición 4.3. (*Isotopía relativa a la frontera*) Sea Σ una superficie con $\partial\Sigma \neq \emptyset$. Una isotopía relativa a la frontera es una isotopía $H : \Sigma \times I \rightarrow \Sigma$ tal que para todo $t \in [0, 1]$, $H_t \in \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$.

Denotamos por $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$ a la componente arcoconexa de $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ que contiene a id_{Σ} . Nuevamente $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$ es un subgrupo normal de $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$. Notemos que la Proposición 4.2 también aplica para isotopías relativas a $\partial\Sigma$ respecto a la arcoconexidad de $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$. En ese sentido, también podemos caracterizar la relación de isotopía relativa a la frontera como

$$\begin{aligned} f \text{ y } g \text{ son isotópicos relativo a } \partial\Sigma &\Leftrightarrow f^{-1} \circ g \in \text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma) \\ &\Leftrightarrow f \text{ y } g \text{ están en la misma clase lateral} \\ &\text{de } \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma). \end{aligned}$$

4.2. Definición del grupo modular

Recordemos que $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$ es un subgrupo normal de $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ y también de $\text{Homeo}^+(\Sigma; \partial\Sigma)$. Dado que la relación de isotopía “ f isotópico a g ” es equivalente a que $f^{-1} \circ g \in$

$\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$. Entonces, las clases de isotopía coinciden con el grupo cociente

$$\text{Homeo}^+(\Sigma; \partial\Sigma)/\text{isotopía} = \text{Homeo}^+(\Sigma; \partial\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma).$$

Definición 4.4. Dada una superficie Σ , definimos el Grupo Modular de Σ como el grupo cociente

$$\text{Mod}(\Sigma) := \text{Homeo}^+(\Sigma; \partial\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma).$$

Si S es una superficie orientable, entonces podemos definir el Grupo Modular Extendido como

$$\text{Mod}^\pm(S) := \text{Homeo}(S; \partial S)/\text{Homeo}_0(S; \partial S).$$

Observación 4.5. Nótese que para una superficie orientable S , existe distinción entre $\text{Mod}(S)$ y $\text{Mod}^\pm(S)$ sólo si $\partial S = \emptyset$. Esto es porque si $\partial S \neq \emptyset$, entonces todo elemento $f \in \text{Homeo}(S; \partial S)$ preserva la orientación.

Recordemos que, por convención, si N es una superficie no orientable entonces $\text{Homeo}^+(N; \partial N) = \text{Homeo}(N; \partial N)$. Por lo tanto, el Grupo Modular y el Grupo Modular Extendido de una superficie no orientable coinciden.

Naturalmente tenemos las funciones proyección

$$\begin{array}{ccc} p : \text{Homeo}^+(\Sigma; \partial\Sigma) & \longrightarrow & \text{Mod}(\Sigma) \\ f & \longmapsto & [f]. \end{array} \quad y \quad \begin{array}{ccc} p^\pm : \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma) & \longrightarrow & \text{Mod}^\pm(\Sigma) \\ f & \longmapsto & [f], \end{array}$$

las cuales son homomorfismos de grupos sobreyectivos. Nótese que $\text{Mod}(\Sigma) \leq \text{Mod}^\pm(\Sigma)$, ya que los elementos de ambos son clases laterales $g \cdot \text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$, para algún $g \in \text{Homeo}^+(\Sigma; \partial\Sigma)$ ó $g \in \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$.

Podemos dotar a $\text{Mod}(\Sigma)$ y a $\text{Mod}^\pm(S)$ de la topología cociente proveniente de la función proyección respectiva. En ese caso, deducimos que $\text{Mod}(\Sigma)$ es un subgrupo cerrado de $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$. Recordemos que la topología cociente es la más pequeña que hace que cada proyección p y $p^\pm$ sea una función cociente¹⁰. Veremos que con esta nueva topología, el grupo modular es un grupo topológico.

Proposición 4.6. Si G es un grupo topológico y H es un subgrupo de G , entonces la proyección $p : G \rightarrow G/H$ es una función abierta.

Demostración. Sólo hay que notar que si $B \subseteq G$ es un abierto, entonces

$$p^{-1}(p(B)) = B \cdot H = \bigcup_{h \in H} Bh$$

¹⁰Una función sobreyectiva entre espacios topológicos $Q : X \rightarrow Z$ es función cociente si, $U \subseteq Z$ es abierto si y sólo si $Q^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto. En particular, una función cociente es continua.

es unión de abiertos. Por ser p una función cociente, tenemos que $p(B)$ es abierto. $\square$

Procedemos ahora a demostrar que el Grupo Modular es un grupo topológico. Para ello nos apoyaremos en el siguiente resultado.

Lema 4.7. Sean X, Y, Z espacios topológicos y suponga que $\lambda : Z \rightarrow Y$ es una función, $\varphi : X \rightarrow Y$ es una función continua tal que $\varphi = \lambda \circ Q$, donde $Q : X \rightarrow Z$ es una función que cumple alguna de las siguientes posibilidades

- Q es una función cociente,
- Q es abierta sobreyectiva,
- Q es cerrada sobreyectiva.

Entonces λ es una función continua.

Demostración. Dado $U \subseteq Y$ abierto, la continuidad de φ implica que $\varphi^{-1}(U) = (\lambda \circ Q)^{-1}(U) = Q^{-1}(\lambda^{-1}(U))$ es abierto. Si Q es cociente o abierto, trivialmente $\lambda^{-1}(U)$ es abierto. Esto prueba que λ es continuo en dichos casos.

El caso en que Q sea una función cerrada es análogo. Notar que la hipótesis de sobreyectividad se usó para argumentar que $Q(Q^{-1}(A)) = A$. $\square$

Proposición 4.8. Dado un grupo topológico G y un subgrupo normal $H \leq G$, el cociente G/H con la topología cociente es un grupo topológico.

Demostración. Por el Lema 3.30 basta ver que la función $\lambda([f], [g]) = [f]^{-1}[g] = [f^{-1}g]$ es continua en G/H . Si φ denota la composición de funciones siguiente

$$\begin{array}{ccccc} \varphi : & G \times G & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/H \\ & (f, g) & \longmapsto & f^{-1} \cdot g & \longmapsto & [f^{-1} \cdot g], \end{array}$$

entonces φ es una composición de funciones continuas, porque G es grupo topológico.

Por otro lado, la función Q definida por

$$\begin{array}{ccc} Q : & G \times G & \longrightarrow & G \times G \\ & (f, g) & \longmapsto & ([f], [g]) \end{array}$$

es sobreyectiva y abierta, pues $Q = p \times p$. El resultado se sigue de que $\varphi = \lambda \circ Q$ y del Lema 4.7. $\square$

Corolario 4.9. *Para toda superficie Σ , $\text{Mod}(\Sigma)$ y $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ son grupos topológicos.*

Si G es un grupo topológico localmente compacto y $H \leq G$ cualquier subgrupo, entonces G/H es localmente compacto. Por lo tanto hacemos la siguiente observación.

Observación 4.10. *En general, el grupo de homeomorfismos, $\text{Homeo}(\Sigma)$, no es localmente compacto, pues si Σ es de tipo infinito entonces $\text{Mod}(\Sigma)$ no es localmente compacto ([1, Teorema 4.2]).*

Proposición 4.11. *Para toda superficie Σ , el Grupo Modular Extendido $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ es segundo numerable. En particular, el Grupo Modular, $\text{Mod}(\Sigma)$, es segundo numerable.*

Demostración. Recordemos que $\text{Homeo}(\Sigma)$ es segundo numerable. Dado que la función cociente $p : \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma) \rightarrow \text{Mod}^\pm(\Sigma)$ es abierto, dada una base numerable $\{B_n\}$ de $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$, la colección $\{p(B_n)\}$ conforma una colección numerable de abiertos en $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$. De hecho $\{p(B_n)\}$ es base para $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$. Si U es abierto de $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ y $y \in U$, entonces existe $x \in \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ tal que $y = p(x) \in U$. Pero $x \in p^{-1}(U)$, y este último es abierto. Dado que $\{B_n\}$ es base, existe $n \in \mathbb{N}$ con $x \in B_n \subseteq p^{-1}(U)$. Se sigue que $y = p(x) \in p(B_n) \subseteq p(p^{-1}(U)) = U$, porque p es sobreyectiva. Se sigue que $\{p(B_n)\}$ es una base numerable de $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$. $\square$

Observación 4.12. *Dado que $\text{Mod}(\Sigma) \leq \text{Mod}^\pm(\Sigma)$ son ambos segundo numerables, tenemos en consecuencia que ambos son separables (Observación 3.16).*

4.3. Conexidad y conexidad por trayectorias en $\text{Homeo}(\Sigma, \partial\Sigma)$

En nuestra discusión que resta de este escrito tengamos en cuenta la siguiente

Definición 4.13. *Una superficie es de tipo finito si su grupo fundamental es finitamente generado. En caso contrario, se dice que la superficie es de tipo infinito.*

El siguiente teorema tiene consecuencias muy importantes para lo que resta del escrito. Una demostración general se puede encontrar en [38, Teorema 6.11].

Teorema 4.14. *Para toda superficie Σ , la componente $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$ es un subgrupo cerrado de $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$.*

Para superficies de tipo finito el resultado es más fuerte ([38, Teorema 6.11]), pues en este contexto resulta que $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$ es abierto (y por lo tanto, es cerrado). En consecuencia, $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$ coincide con la componente conexa que la contiene. Nótese que esto implica que si Σ es una superficie de tipo finito, entonces $\text{Mod}(\Sigma)$ es discreto, esto será relevante en la Sección 4.5 en donde damos una prueba alternativa de que $\text{Mod}(\Sigma)$ es grupo polaco.

Se puede dar una demostración elemental del Teorema 4.14 usando el llamado *Método de Alexander* [9, Proposición 2.8] el cual merece unas palabras, pues puede resultar muy ilustrativo para los interesados en estudiar grupos modulares de superficies (revisar también [37]). Este método describe un criterio para decidir si un homeomorfismo es isotópico a id_Σ . Una versión simplificada, aunque débil, se puede interpretar de la siguiente manera: si $f \in \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ fija la clase de isotopía de toda curva cerrada simple de Σ , entonces f es isotópico a la identidad.

El método de Alexander tiene validez para todas las superficies, salvo una lista pequeña de ellas. Para superficies de tipo infinito, está garantizada su validez (ver [13, 15]). Mientras tanto, si Σ es una superficie de tipo finito, la superficie debe satisfacer $3g - 3 + n + b \geq 4$ si Σ es orientable, ó $g + n + b \geq 5$ si Σ es no orientable, donde g denota el género, n el número de ponchaduras y b el número de componentes frontera de la superficie (ver [13, Teorema 2.1]).

Una consecuencia directa de la siguiente proposición y de que $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$ es cerrado es que $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ es Hausdorff. Recordar que por el Teorema 3.20, una consecuencia adicional será que el Grupo Modular tiene una métrica invariante izquierda compatible con la topología.

Proposición 4.15. *Sea G un grupo topológico y suponga que H es un subgrupo normal G . Entonces H es cerrado en G si y sólo si G/H es Hausdorff.*

Demostración. $\implies$ Supongamos que H es cerrado. Para ver que G/H es Hausdorff basta probar que la diagonal

$$\Delta_{G/H} = \{([g], [h]) \in G/H \times G/H : [g] = [h]\}$$

es cerrado en G/H . Si $p : G \rightarrow G/H$ denota la proyección a las clases laterales, entonces

$$p^{-1} \{[e]\} = H$$

es cerrado. Como p es función cociente, se tiene que $\{[e]\}$ es cerrado. Luego, dado que G/H es un grupo topológico, la función

$$\begin{aligned} \lambda : G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \\ ([g], [h]) &\longmapsto [g^{-1}h] \end{aligned}$$

es continua. Así, $\lambda^{-1} \{[e]\} = \Delta_{G/H}$ es cerrado.

$\Leftarrow$ Supongamos ahora que G/H es Hausdorff. En todo espacio que es Hausdorff, todo subespacio unipuntual es cerrado. De esta manera, $\{[e]\}$ es cerrado en G/H . Como p es continua, inmediatamente obtenemos que

$$p^{-1} \{[e]\} = H$$

es cerrado en G . □

4.4. El grupo modular es un grupo polaco

Hasta este momento hemos visto que $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ hereda de $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ las propiedades de ser grupo topológico, Hausdorff, segundo numerable y separable. En gran medida estas propiedades fueron heredadas directamente porque $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ es un cociente de $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ por un subgrupo. Adicionalmente $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ también hereda de $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ la propiedad de ser grupo polaco. Aunque contrario a las propiedades mencionadas, la demostración de ser polaco recae sobre el Teorema de Sierpinski ([19, Teorema 8.19]), que es un resultado importante de la Teoría Descriptiva de Conjuntos. Nos enfocaremos en explicar sólo un breve panorama para quien busque el camino a la demostración.

En la sección 4.5 explicamos una manera alternativa a esta para probar que el Grupo Modular Extendido (de una superficie orientable con frontera vacía) es un grupo polaco. Lo esencial de este enfoque reside en ver a $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ como el grupo de automorfismos del *grafo de curvas*, un objeto que ha sido piedra angular en el estudio de grupos modulares.

Teorema 4.16 (Sierpinski). *Sean X un espacio polaco y Y un espacio separable y metrizable. Suponga que existe una función $f : X \rightarrow Y$ continua, abierta y sobreyectiva. Entonces Y es un espacio polaco.*

Recordemos que la proyección $p : \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma) \rightarrow \text{Mod}^\pm(\Sigma)$ es continua, abierta y sobreyectiva, donde $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ es un grupo polaco. Por otro lado, sabemos que $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ es separable, por lo que basta demostrar que es metrizable.

Proposición 4.17. *Para toda superficie Σ , el grupo modular extendido, $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$, es metrizable.*

Demostración. Recordemos que $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$ denota a la componente arcoconexa de $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ que contiene a id_Σ . Por el Teorema 4.14, la componente conexa de la identidad de $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ es subgrupo cerrado de $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$. Por la Proposición 4.15, el cociente $\text{Mod}^\pm(\Sigma) = \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$ es Hausdorff. Por otro lado, $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ es segundo numerable (Proposición 4.11). Por el Teorema 3.20, existe una métrica invariante izquierda compatible con la topología de $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$. $\square$

Por el Teorema de Sierpinski (Teorema 4.16) y la Proposición 4.17 obtenemos que el Grupo Modular Extendido de una superficie es un grupo polaco. Al ser $\text{Mod}(\Sigma)$ un subgrupo cerrado de $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$, la propiedad de grupo polaco es heredada también a $\text{Mod}(\Sigma)$. Esto justifica el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.18. *Para toda superficie Σ , el Grupo Modular Extendido, $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$, es un grupo polaco. Así mismo, el Grupo Modular, $\text{Mod}(\Sigma)$, es un grupo polaco.*

4.5. Prueba alternativa usando el grafo de curvas

Una de las herramientas más usadas para estudiar al Grupo Modular de una superficie ha sido a través del paradigma del *grafo de curvas* (Definición 4.22). En esta sección final usaremos una fuerte relación del Grupo Modular con el grafo de curvas (se puede ver al grupo modular extendido de casi toda superficie como el grupo de automorfismos del grafo de curvas, Teorema 4.24), para deducir de esto que el Grupo Modular es polaco. En nuestra argumentación sólo nos ocuparemos de superficies orientables de tipo infinito, pues para superficies de tipo finito, el argumento es más sencillo sin necesidad de utilizar el grafo de curvas (vea los comentarios al final de esta sección). En lo que resta de este apartado supondremos que Σ es una superficie orientable de tipo infinito y con frontera vacía. El grafo de curvas será tal que sus vértices son representados por clases de isotopía de curvas cerradas simples en la superficie. Recapitulamos estos conceptos brevemente.

Definición 4.19 (Curvas cerradas simples). *Una curva cerrada simple en una superficie Σ es un encaje $\gamma : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \Sigma$.*

Así como podemos decir que dos homeomorfismos son isotópicos cuando podemos deformar uno en el otro realizando una trayectoria continua de homeomorfismos, asimismo podemos deformar una curva cerrada simple en otra por medio de una trayectoria continua de curvas cerradas simples, conocida como isotopía de curvas cerradas simples. La principal diferencia con la isotopía de homeomorfismos, es que esta toma en cuenta una transición de funciones, mientras que una isotopía de curvas cerradas simples será una isotopía entre conjuntos: precisamente sobre sus imágenes. Lo que se gana al identificar una curva con su imagen es que se ignora por completo su orientación.

Definición 4.20 (Isotopía de curvas cerradas simples). *Dos curvas cerradas simples $\alpha, \beta : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Sigma$ son isotópicas si existe una función continua $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \Sigma$ tal que $H_0(\mathbb{S}^1) = \alpha(\mathbb{S}^1)$, $H_1(\mathbb{S}^1) = \beta(\mathbb{S}^1)$ y para cada tiempo $t \in [0, 1]$, la curva $H_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Sigma$ es una curva cerrada simple.*

Para definir el grafo de curvas, tomaremos en cuenta sólo un tipo de curvas cerradas simples que conocemos como curvas *esenciales*, y pueden ser definidas incluso si $\partial\Sigma \neq \emptyset$.

Definición 4.21 (Curva esencial). *Una curva cerrada simple $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Sigma$ se dice esencial si no es homotópicamente trivial ni homotópica a la frontera de un disco menos un punto.*

La relación de isotopía de curvas también es una relación de equivalencia. Dado que ignora el hecho de que $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\bar{\alpha})$, donde $\bar{\alpha}$ es el camino recorrido en el sentido inverso, la isotopía de curvas conforma clases de equivalencia de curvas esenciales isotópicas sin orientación. A dicho conjunto de clases de curvas lo denotamos por $\mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$, y conformará el conjunto de vértices del grafo de curvas en Σ .

Definición 4.22 (Grafo de curvas). *El grafo de curvas de la superficie Σ , denotado por $\mathcal{C}(\Sigma)$, es el grafo cuyo conjunto de vértices es $\mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$, el conjunto de todas las clases de isotopía de curvas cerradas simples esenciales y no orientadas. Dos vértices del grafo de curvas $a, b \in \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ están conectados por una arista si existen representantes $\alpha \in a, \beta \in b$ con $\alpha \cap \beta = \emptyset$.*

El grafo de curvas de Σ es conexo, más aún, $\mathcal{C}(\Sigma)$ tiene diámetro 2. Esto se puede ver de la siguiente manera: cómo Σ es una superficie de tipo infinito, si α y β son dos curvas esenciales en Σ arbitrarias entonces existe una tercera curva γ que no intersecta ni a α ni a β , todo esto incluso hasta isotopía.

En el contexto de superficies de tipo finito, el grafo de curvas tiene propiedades geométricas más ricas, es Gromov hiperbólico y tiene diámetro infinito, las cuales lo hacen idóneo para estudiar la geometría a larga escala del grupo modular y del espacio de Teichmüller asociado a la superficie. En esta dirección, recomendamos las lecturas [26, 34].

Topología de permutación en el grupo de automorfismos de $\mathcal{C}(\Sigma)$. Cualquier grafo tiene asociado su grupo de automorfismos, en nuestro caso, recordamos que el *grupo de automorfismos* del grafo de curvas $\mathcal{C}(\Sigma)$, denotado por $\text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$, consiste en todas las biyecciones $\varphi : \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ que preservan la incidencia, es decir, dos vértices a y b están conectadas por una arista si, y sólo si $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$ están conectadas.

Ahora imponemos una topología sobre el grafo de curvas. Dado un subconjunto de vértices $A \subseteq \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$, el *estabilizador puntual* de A se define como

$$U(A) := \{\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma)) : \varphi([\alpha]) = [\alpha], \forall [\alpha] \in A\}.$$

La colección de todas las traslaciones $\{\varphi \cdot U(A)\}$, con $A \subseteq \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ finito y $\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$ constituye una base para una topología de $\text{Aut}(\mathcal{C}^{(0)}(\Sigma))$, la cual se conoce como la *topología permutación*.

Más adelante demostraremos que el Grupo Modular Extendido, $\text{Mod}^{\pm}(\Sigma)$, es isomorfo, como grupo topológico, a $\text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$ (Teorema 4.24). De este hecho y junto al resultado siguiente se podrá deducir fácilmente que el Grupo Modular Extendido de Σ es un grupo Polaco.

Teorema 4.23. *Para toda superficie Σ , el grupo de automorfismos del grafo de curvas de Σ , $\text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$, es un grupo polaco.*

Esbozamos brevemente la demostración del Teorema 4.23. El *grupo simétrico infinito*, denotado por $\text{Sym}(\mathbb{N})$, está definido como el grupo de todas las biyecciones $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ con la operación composición de funciones. Por otro lado, el espacio $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de todas las funciones $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ con la topología producto, donde a los naturales $\mathbb{N}$ se les asigna la topología discreta, es un espacio polaco. Claramente, el grupo simétrico infinito es un subespacio de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Resulta que con esta topología el grupo simétrico

infinito $\text{Sym}(\mathbb{N})$ es un grupo polaco; esto es consecuencia de ver a $\text{Sym}(\mathbb{N})$ como subconjunto¹¹ G_δ de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Para consultar los detalles de todos estos hechos recomendamos al lector consultar la tesis de maestría de L. Elliott [8]. Ahora, el conjunto de vértices del grafo de curvas es numerable, de esta manera podemos ver al grupo $\text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$ como subgrupo del grupo simétrico infinito $\text{Sym}(\mathbb{N})$. Un teorema de P. J. Cameron ([4, Theorem 5.8]) permite concluir que $\text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$ es cerrado en el grupo simétrico infinito y, por lo tanto, es un grupo polaco.

El grupo modular extendido como el grupo de automorfismos del grafo de curvas. El grupo modular extendido $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ actúa de manera natural sobre el grafo de curvas $\mathcal{C}(\Sigma)$: en el conjunto de vértices esta acción se ve de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \text{Mod}^\pm(\Sigma) \times \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma) &\longrightarrow \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma) \\ ([f], [\alpha]) &\longmapsto [f \circ \alpha]. \end{aligned}$$

Esta acción está bien definida, pues todo homeomorfismo de Σ transforma curvas esenciales en curvas esenciales. Más todavía, la acción es por automorfismos, pues si denotamos por $\varphi_{[f]} : \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$, $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$, a la función inducida por el homeomorfismo $f \in \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ entonces $\varphi_{[f]}$ es un automorfismo con inversa $\varphi_{[f]}^{-1} = \varphi_{[f^{-1}]}$. En resumen tenemos un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \pi : \text{Mod}^\pm(\Sigma) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma)) \\ [f] &\longmapsto \varphi_{[f]}. \end{aligned}$$

En la teoría de grupos modulares, una de las conexiones más importantes y bellas, nos dice que el homomorfismo de grupos π es un isomorfismo de grupos topológicos. La importancia de esta conexión queda manifiesta en la diversidad de resultados que de ésta se derivan, véase [17].

Teorema 4.24. *Sea Σ una superficie orientable de tipo infinito con frontera vacía. Entonces $\pi : \text{Mod}^\pm(\Sigma) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$ es un isomorfismo de grupos topológicos.*

Demostración. El Método de Alexander para superficies de tipo infinito [15] verifica que el morfismo π es inyectivo. La prueba de la sobreyectividad de π que esbozamos a continuación es una adaptación del argumento en el artículo [14]; la sobreyectividad de π fue establecida de forma independiente en [3]. Suponga que $\varphi : \mathcal{C}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{C}(\Sigma)$ es un isomorfismo simplicial del grafo de curvas de Σ . Sea $S_1 \subset S_2 \subset \dots$ una saturación principal¹² de Σ por subsuperficies de tipo finito y denote por B al conjunto de todas las curvas frontera de las superficies S_i . El primer paso clave en la

¹¹Un subconjunto de un espacio topológico X es G_δ si es igual a la intersección numerable de abiertos en X .

¹²Dada una superficie de tipo infinito Σ , se dice que una sucesión $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subsuperficies de Σ de tipo finito es una saturación principal de Σ si $\Sigma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ se satisfacen las siguientes condiciones: (i) el interior de S_i está contenido en el interior de S_{i+1} , (ii) $\partial S_i \setminus \partial \Sigma$ es una unión disjunta finita de curvas esenciales separadoras en Σ y, (iii) el interior de cada componente conexa de $S_{i+1} \setminus \bar{S}_i$ tiene suficiente complejidad topológica, para detalles véase [14, Definición 2.8].

prueba es demostrar que existe un homeomorfismo $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ tal que φ coincide con $\pi([f])$ en B , es decir, $\varphi([\beta]) = \varphi_{[f]}([\beta])$ para todo $\beta \in B$. La herramienta principal para establecer esto es el uso del *grafo de adyacencia* ([14, Definición 2.7]) asociada a una descomposición en pantalones de S , véase también [14, Proposición 3.1]. El siguiente paso es demostrar que la restricción de φ a $\mathcal{C}(S_i)$ define una función simplicial inyectiva $\varphi_i : \mathcal{C}(S_i) \rightarrow \mathcal{C}(f(S_i))$. Aplicando el trabajo de K. Shackleton sobre la rigidez combinatoria del grafo de curvas de superficies de tipo finito se obtienen homeomorfismos $g_i : S_i \rightarrow f(S_i)$ que coinciden con φ_i . La prueba finaliza mostrando que esta colección de homeomorfismos induce un homeomorfismo global $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$ tal que $\pi([h])$ coincide con φ en todo $\mathcal{C}(\Sigma)$.

Hasta este punto, el morfismo de grupos π es un isomorfismo de grupos. Podemos observar que π es continua; en efecto, si $A := \{[\alpha_1], \dots, [\alpha_n]\}$ es un conjunto finito de vértices del grafo de curvas, entonces $\pi^{-1}(U(A))$ consiste de todas las clases de isotopía de homeomorfismos $[f] \in \text{Mod}^\pm(\Sigma)$ tales que $f \circ \alpha_i$ es isotópica a α_i para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Consideremos, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, una vecindad regular de α_i , $N(\alpha_i)$ (la cual es homeomorfa a un anillo encajada en Σ), y definamos el abierto $[\alpha_i, N(\alpha_i)] := \{[g] \in \text{Mod}^\pm(\Sigma) \mid g(\alpha_i) \subseteq N(\alpha_i)\}$. La continuidad de π se deduce de observar que $\bigcap_{i=1}^n [\alpha_i, N(\alpha_i)]$ forma una vecindad de $[Id_\Sigma]$ que coincide con $\pi^{-1}(U(A))$.

Para ver la continuidad de π^{-1} , tomemos ahora $[K, U] = \{[g] \in \text{Mod}^\pm(\Sigma) \mid g(K) \subseteq U\}$ vecindad de $[Id_\Sigma]$ con $K \subseteq \Sigma$ compacto y $U \subseteq \Sigma$ abierto. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que $K \subseteq U$. El Método de Alexander ([9, Proposición 2.8]) para superficies de tipo finito permite asegurar la existencia de una colección finita $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de curvas esenciales contenidas en K tales que $[Id_\Sigma] \in \bigcap_{i=1}^n [\alpha_i, N(\alpha_i)] \subseteq [K, U]$ donde $N(\alpha_i)$ es una vecindad regular de α_i completamente contenida en K . Haciendo A igual al conjunto de clases de isotopía de las curvas α_i podemos ver que $U(A) \subseteq (\pi^{-1})^{-1}([K, U])$. De esto se puede concluir que la inversa de π , π^{-1} , es continua. $\square$

Superficies de tipo finito. Convencernos de que el Grupo Modular Extendido es un grupo polaco es más directo en el caso de superficies de tipo finito. Si Σ es una superficie orientable de tipo finito con frontera vacía, podemos usar nuevamente el Método de Alexander para obtener que $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ es discreto¹³. La razón es que la componente arcoconexa de la identidad, $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$, es abierto en el grupo de homeomorfismos. En efecto, por la Proposición 2.8 en [9] existe una colección finita $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de curvas esenciales en Σ tales que $[Id_\Sigma] \in \bigcap_{i=1}^n (\alpha_i, N(\alpha_i)) \subseteq \text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$ donde $N(\alpha_i)$ es una vecindad regular de α_i . Ahora, el hecho de que $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ sea discreto implica que éste sea numerable pues hemos visto que, en general, $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ es segundo numerable. Esto a su vez implica que $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ es localmente compacto. Por [7, Observación 2.B.1] se concluye que el grupo Modular Extendido es un grupo polaco.

¹³El Método de Alexander es aplicable para todas las superficies de tipo finito, excepto una cantidad finita de ellas. Para ver que el grupo modular extendido es discreto en los casos restantes, recomendamos al lector consultar [9].

Cabe destacar que la conexión del grupo modular extendido con el grafo de curvas, es decir, el Teorema 4.24, es cierto para casi todas las superficies de tipo finito. Al ser un resultado clásico en la teoría de grupos modulares, este teorema lleva por nombre “Teorema de Ivanov”([16, 21, 23]).

Superficies no orientables. El paradigma de ver al grupo modular extendido como el grupo de automorfismos del grafo de curvas también es válido para superficies no orientables; recomendamos consultar [13] y las referencias contenidas allí. Una vez establecido este resultado, la demostración de que el grupo modular extendido es grupo polaco es exactamente igual a la que hemos descrito aquí para superficies orientables.

Agradecimientos

Ambos autores agradecemos a los organizadores de la *Octava Escuela Oaxaqueña de Matemáticas 2023*, evento en el cual nació este proyecto. Así mismo, agradecemos la hospitalidad del Instituto de Matemáticas UNAM Unidad Oaxaca. El primer autor agradece el apoyo de “*Beca posdoctoral ANID Fondecyt 3240229*” para la realización de este trabajo. El segundo autor agradece el apoyo del CONAHCYT a través de las Becas Nacionales de Posgrado durante la realización de este escrito. Agradecemos a Luis Hernández Lamóneda, Rita Jiménez Rolland y a Carlos A. Pérez Estrada por compartir valiosos comentarios a versiones preliminares de este trabajo. Finalmente agradecemos a los revisores cuyos comentarios ayudaron a mejorar la exposición y el contenido.

Referencias

- [1] J. Aramayona y N. G. Vlamis, “Big mapping class groups: an overview,” in *In the tradition of Thurston—geometry and topology*. Springer, Cham, 2020, pp. 459–496, doi: 10.1007/978-3-030-55928-1_12.
- [2] R. F. Arens, “A topology for spaces of transformations,” *Ann. of Math. (2)*, vol. 47, pp. 480–495, 1946, doi: 10.2307/1969087.
- [3] J. Bavard, S. Dowdall, y K. Rafi, “Isomorphisms between big mapping class groups,” *Int. Math. Res. Not. IMRN*, no. 10, pp. 3084–3099, 2020, doi: 10.1093/imrn/rny093.
- [4] P. J. Cameron, *Permutation groups*, ser. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 1999, vol. 45, doi: 10.1017/CBO9780511623677.
- [5] M. Clay y D. Margalit, Eds., *Office hours with a geometric group theorist*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2017.
- [6] N. Colin, R. Jiménez-Rolland, e I. Morales, *Superficies topológicas y sus simetrías: una introducción a grupos modulares de superficies de tipo finito e infinito*. En preparación.
- [7] Y. Cornuier y P. de la Harpe, *Metric geometry of locally compact groups*, ser. EMS Tracts in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2016, vol. 25.
- [8] L. Elliott, “Infinite symmetric groups,” M.Sc. thesis, The University of St Andrews, Scotland, 2017, disponible en https://le27.github.io/Luke-Elliott/files/Luke_Masters_Dissertation.pdf.
- [9] B. Farb y D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, ser. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012, vol. 49.
- [10] D. B. Fuks y V. A. Rokhlin, *Beginner’s course in topology*, ser. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1984, doi: 10.1007/978-3-642-61755-3.
- [11] J. Gallier y D. Xu, *A guide to the classification theorem for compact surfaces*, ser. Geometry and Computing. Springer, Heidelberg, 2013, vol. 9, doi: 10.1007/978-3-642-34364-3.
- [12] A. Hatcher, *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [13] J. Hernández Hernández y C. E. Hidber, “First integral cohomology group of the pure mapping class group of a non-orientable surface of infinite type,” *New York J. Math.*, vol. 30, pp. 1705–1749, 2024.
- [14] J. Hernández Hernández, I. Morales, y F. Valdez, “Isomorphisms between curve graphs of infinite-type surfaces are geometric,” *Rocky Mountain J. Math.*, vol. 48, no. 6, pp. 1887–1904, 2018, doi: 10.1216/rmj-2018-48-6-1887.

- [15] J. Hernández Hernández, I. Morales, y F. Valdez, “The Alexander method for infinite-type surfaces,” *Michigan Math. J.*, vol. 68, no. 4, pp. 743–753, 2019, doi: 10.1307/mmj/1561773633.
- [16] N. V. Ivanov, “Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces,” in *Progress in knot theory and related topics*, ser. Travaux en Cours. Hermann, Paris, 1997, vol. 56, pp. 113–120.
- [17] N. V. Ivanov, “Mapping class groups,” in *Handbook of geometric topology*. North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 523–633.
- [18] R. Jiménez Rolland y J. C. Santiago, “Presentando al toro y sus simetrías,” *Miscelánea Matemática*, vol. 75, pp. 35–54, 2022.
- [19] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1995, vol. 156, doi: 10.1007/978-1-4612-4190-4.
- [20] S. Kobayashi y K. Nomizu, *Foundations of differential geometry. Vol. I*, ser. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.
- [21] M. Korkmaz, “Automorphisms of complexes of curves on punctured spheres and on punctured tori,” *Topology Appl.*, vol. 95, no. 2, pp. 85–111, 1999, doi: 10.1016/S0166-8641(97)00278-2.
- [22] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2003, vol. 218, doi: 10.1007/978-0-387-21752-9.
- [23] F. Luo, “Automorphisms of the complex of curves,” *Topology*, vol. 39, no. 2, pp. 283–298, 2000, doi: 10.1016/S0040-9383(99)00008-7.
- [24] K. Mann, “The structure of homeomorphism and diffeomorphism groups,” *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 68, no. 4, pp. 482–492, 2021, doi: 10.1090/noti.
- [25] K. Mann, “Automatic continuity for homeomorphism groups and big mapping class groups,” *Michigan Math. J.*, vol. 74, no. 1, pp. 215–224, 2024, doi: 10.1307/mmj/20216095.
- [26] Y. N. Minsky, “A geometric approach to the complex of curves on a surface,” in *Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995)*. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996, pp. 149–158.
- [27] G. H. Moore, “The evolution of the concept of homeomorphism,” *Historia Math.*, vol. 34, no. 3, pp. 333–343, 2007, doi: 10.1016/j.hm.2006.07.006.
- [28] I. Morales y F. Valdez, “Loxodromic elements in big mapping class groups via the Hooper-Thurston-Veech construction,” *Algebr. Geom. Topol.*, vol. 22, no. 8, pp. 3809–3854, 2022, doi: 10.2140/agt.2022.22.3809.
- [29] S. Morita, *Geometry of characteristic classes*, ser. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, vol. 199, doi: 10.1090/mmono/199.

- [30] J. R. Munkres, *Topology: a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- [31] I. Richards, “On the classification of noncompact surfaces,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 106, pp. 259–269, 1963, doi: 10.2307/1993768.
- [32] C. Rosendal, “Automatic continuity in homeomorphism groups of compact 2-manifolds,” *Israel J. Math.*, vol. 166, pp. 349–367, 2008, doi: 10.1007/s11856-008-1034-x.
- [33] C. Rosendal y S. a. Solecki, “Automatic continuity of homomorphisms and fixed points on metric compacta,” *Israel J. Math.*, vol. 162, pp. 349–371, 2007, doi: 10.1007/s11856-007-0102-y.
- [34] S. Schleimer, “Notes on the complex of curves,” 2006, notas no publicadas. Notas disponibles en <https://sschleimer.warwick.ac.uk/Maths/notes2.pdf>.
- [35] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, ser. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.
- [36] D. Tamaki, *Fiber bundles and homotopy*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2021.
- [37] N. G. Vlamis, “Notes on the topology of mapping class groups,” 2019, preprint no publicado. Notas disponibles en <https://math.nickvlamis.com/research>.
- [38] N. G. Vlamis, “Homeomorphism groups of self-similar 2-manifolds,” in *In the tradition of Thurston III. Geometry and dynamics*. Springer, Cham, 2024, pp. 105–167, doi: 10.1007/978-3-031-43502-7_5.