CUBO, A Mathematical Journal
Vol. 27, no. 2, pp. 461–504, Agosto 2025
DOI: 10.56754/0719-0646.2702.461

COMPENDIO

Esquemas de subdivisión no lineales: 25 años de historia a través de 75 contribuciones

Sergio Amat[1,✉]
Sonia Busquier[1]
David Levin[2]
Juan C. Trillo[1]

[1] *Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. Universidad Politécnica de Cartagena, España.*
sergio.amat@upct.es[✉]
sonia.busquier@upct.es
jc.trillo@upct.es

[2] *School of Mathematical Sciences. Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Israel.*
levindd@gmail.com

RESUMEN

Los esquemas de subdivisión son una herramienta muy utilizada en gráficos por computadora y modelado geométrico, permitiendo la generación de curvas y superficies suaves a partir de datos discretos. Aunque los esquemas de subdivisión lineales son muy utilizados, los esquemas no lineales ofrecen mayor flexibilidad, permitiendo el manejo de datos con irregularidades y facilitando la preservación de formas. Además, estos esquemas son útiles para abordar subdivisión en variedades, corregir las oscilaciones de Gibbs alrededor de singularidades y en general intentar abordar problemas donde los enfoques lineales no aportan resultados satisfactorios. Este artículo revisa 25 años de contribuciones relacionadas con la construcción, el análisis y el uso, en diversas aplicaciones, de esquemas de subdivisión no lineales.

Palabras clave: Subdivisión no lineal, aproximación geométrica, representación de superficies, esquemas de multirresolución, aplicaciones en gráficos por ordenador, procesamiento geométrico

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 65D05, 65D17, 68U05, 68U07.

Publicado: 21 de octubre de 2025
Aceptado: 11 de septiembre de 2025
Recibido: 25 de noviembre de 2024

CUBO, A Mathematical Journal
Vol. 27, no. 2, pp. 461–504, August 2025
DOI: 10.56754/0719-0646.2702.461

SURVEY

Non-linear subdivision schemes: 25 years of history through 75 contributions

Sergio Amat[1,✉]
Sonia Busquier[1]
David Levin[2]
Juan C. Trillo[1]

[1] *Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. Universidad Politécnica de Cartagena, Spain.*
sergio.amat@upct.es✉
sonia.busquier@upct.es
jc.trillo@upct.es

[2] *School of Mathematical Sciences. Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Israel.*
levindd@gmail.com

ABSTRACT

Subdivision schemes are a very useful tool in computer graphics and geometric modelling, allowing for the generation of curves and smooth surfaces starting from discrete data. Even though linear subdivision schemes are used profusely, non-linear schemes offer more flexibility, allowing for the handling of data with irregularities and making the shape preservation easier. In addition, these schemes are useful to deal with subdivision on manifolds, to correct Gibbs oscillations around singularities, and, in general, to try to tackle problems where linear approaches do not provide satisfactory results. This article reviews 25 years of contributions related to the construction, analysis, and use, in different applications, of non-linear subdivision schemes.

Keywords and Phrases: Non-linear subdivision, geometric approximation, surface representation, multiresolution schemes, computer graphics applications, geometric processing

2020 AMS Mathematics Subject Classification: 65D05, 65D17, 68U05, 68U07.

Published: 21 October, 2025
Accepted: 11 September, 2025
Received: 25 November, 2024

1. Introducción

Los esquemas de subdivisión son procesos iterativos que permiten construir curvas o superficies suaves a partir de un conjunto discreto de puntos. En aplicaciones gráficas por computadora y modelado geométrico, estos esquemas se han convertido en una herramienta esencial. Los esquemas de subdivisión tradicionales son lineales, lo que implica que los nuevos puntos generados son combinaciones lineales de puntos vecinos, facilitando el análisis matemático mediante teorías clásicas como las matriciales o la teoría de Fourier. Sin embargo, existen muchas aplicaciones que exigen mayor flexibilidad para considerar datos más complejos e irregulares, lo que ha motivado el desarrollo de esquemas de subdivisión no lineales. A diferencia de los esquemas lineales, los esquemas no lineales pueden: adaptarse a la geometría local de los datos, ajustarse mejor a situaciones donde los datos contienen ruido, cambios pronunciados o incluso irregularidades, permiten trabajar directamente en variedades, preservan propiedades geométricas intrínsecas y pueden adaptarse la presencia de discontinuidades no generando oscilaciones tipo Gibbs, [31], 2002.

Estos esquemas se enmarcan dentro de las áreas de análisis numérico, teoría de la aproximación y modelado geométrico computacional, con conexiones estrechas a las ondículas y a la representación multirresolución.

Más concretamente, los esquemas de subdivisión son procesos iterativos diseñados para generar curvas o superficies suaves a partir de un conjunto discreto de puntos de control $p^{(0)}$. En cada paso, una regla de refinamiento S reemplaza los puntos $\{p^{(k)}\}$ en el nivel k por una secuencia más densa $\{p^{(k+1)}\}$ en el nivel $k+1$, es decir:

$$p^{(k+1)} = S(p^{(k)}).$$

En los esquemas lineales, las nuevas posiciones se obtienen mediante un operador lineal S. Sin embargo, estos métodos presentan limitaciones cuando los datos contienen irregularidades, ruido o discontinuidades, ya que pueden introducir oscilaciones no deseadas o distorsionar formas geométricas básicas (círculos, esferas).

Por el contrario, los esquemas de subdivisión no lineales introducen reglas de refinamiento adaptativas que dependen de la geometría local de los datos. De este modo, permiten:

- Trabajar directamente sobre variedades o espacios no euclidianos.
- Preservar formas geométricas intrínsecas (círculos, esferas, cilindros).
- Reducir efectos no deseados como las oscilaciones de Gibbs en presencia de discontinuidades.
- Mejorar la flexibilidad en aplicaciones donde los enfoques lineales no son satisfactorios.

Estos esquemas tienen relevancia práctica en áreas como el modelado geométrico, la animación por computadora, el diseño asistido por ordenador (CAD), el procesado de imágenes y el análisis numérico de ecuaciones en derivadas parciales.

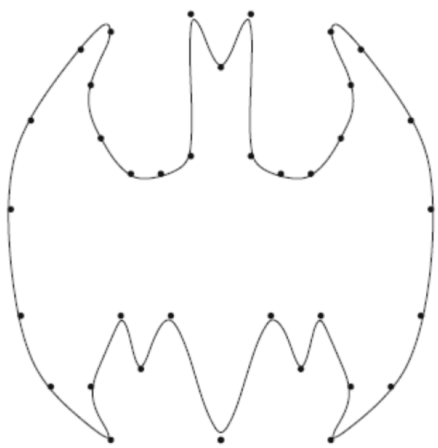

Figura 1: A partir de los puntos de control se itera un algoritmo de subdivisión no lineal en la izquierda y uno lineal en la derecha. Observamos como el algoritmo lineal produce oscilaciones tipo Gibbs debajo de la cabeza.

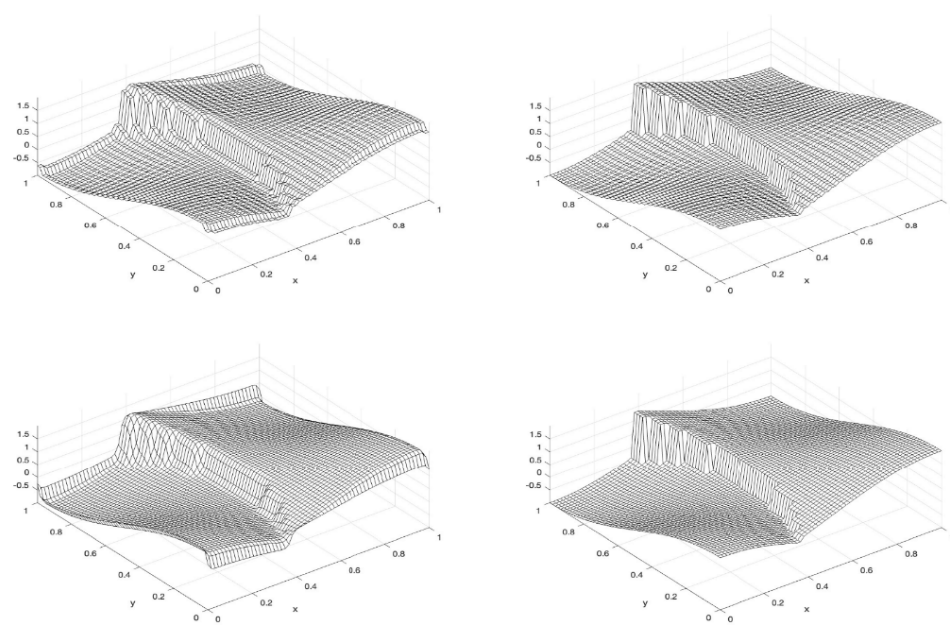

Figura 2: En esta figura se muestran las reconstrucciones de unos datos discontinuos con algoritmos de subdivisión lineales (izquierda) y no lineales (derecha). Observamos como los algoritmos lineales producen oscilaciones tipo Gibbs en presencia de discontinuidades.

Esta revisión la hemos estructurado en cinco secciones monotemáticas y una última de conclusiones. La segunda sección aborda algunos trabajos relacionados con esquemas de subdivisión en variedades. La preservación de formas geométricas será estudiada en la sección tercera. La siguiente sección está dedicada a la adaptación de los esquemas de subdivisión a la presencia de discontinuidades. La sección cinco aborda los esquemas de multirresolución no lineales que son una generalización de las ondículas (wavelets) y que son altemente usadas en procesamiento de imágenes. Finalmente, en la sexta sección se repasan algunas de las nuevas teorías desarrolladas para el análisis de la convergencia, la regularidad y la estabilidad de los esquemas de subdivisión no lineales en distintos contextos.

2. Esquemas de subdivisión para variedades

Los esquemas de subdivisión lineales tradicionales están formulados para datos que residen en espacios euclidianos. Sin embargo, muchas aplicaciones requieren trabajar con datos que residen en variedades. En este contexto, los esquemas de subdivisión no lineales son particularmente útiles ya que permiten definir las reglas de subdivisión directamente sobre la geometría de la variedad, respetando las propiedades intrínsecas de la superficie o espacio subyacente. Esto es crucial, por ejemplo, en el modelado de superficies en geometrías no planas, en la interpolación de datos en espacios curvados, en gráficos por computadora cuando se modelan superficies curvas o en la reconstrucción de formas tridimensionales complejas, [54], 1998.

El principal desafío en estos esquemas radica en definir reglas de interpolación y refinamiento que preserven las propiedades topológicas y métricas de la variedad. Técnicas como el uso de proyecciones locales, interpolación geodésica o métodos basados en paralelismo de transporte han sido exploradas para garantizar que los nuevos puntos generados por el esquema sigan respetando la estructura geométrica subyacente.

A continuación, revisaremos algunas aportaciones interesantes:

- Ajuste de Clotoides y Subdivisión Hermítica Geométrica: Ulrich Reif y Andreas Weinmann [60], 2021.

  Este artículo trata sobre la subdivisión hermítica geométrica para curvas planas, donde se refina iterativamente un polígono inicial usando información adicional de tangentes o vectores normales en los vértices. El componente clave para los esquemas de subdivisión propuestos está basado en el promedio de clotoides. Se propone una nueva estrategia para aproximar clotoides interpoladoras hermíticas, la cual se utiliza para definir los análogos geométricos hermíticos de los conocidos esquemas de Lane-Riesenfeld y el esquema de cuatro puntos.

  Concretamente, el objetivo principal es generar curvas planas mediante pares de puntos y vectores tangentes o normales asociados. En lugar de promediar puntos y vectores tangentes de manera lineal, como en los esquemas tradicionales, se propone un promedio basado en clotoides. Las clotoides son curvas con curvatura lineal, y su uso permite obtener una mejor representación geométrica de las formas naturales de las curvas.

Se introduce el problema de interpolación Hermítica entre dos puntos p_0 y p_1, con ángulos tangentes α_0 y α_1. El esquema propuesto emplea clotoides, cuyas ecuaciones dependen de la curvatura κ de la curva, definida como $\kappa = \frac{\alpha'}{v}$, donde $v = |p'|$ es la velocidad de la curva y $\alpha^{'}$ la derivada del ángulo tangente.

Para aproximar la interpolación hermítica con clotoides, se utiliza la función de ángulo tangente $\beta(t)$, que puede escribirse como:

$$\beta(t) = \beta_0\phi_0(t) + \beta_{1/2}\phi_{1/2}(t) + \beta_1\phi_1(t)$$

donde las funciones de Lagrange $\phi_0(t)$, $\phi_{1/2}(t)$ y $\phi_1(t)$ son polinomios cuadráticos.

La fórmula aproximada para resolver este problema se describe mediante una función F, que aproxima el ángulo intermedio $\beta_{1/2}$ y la velocidad v. Esta aproximación es eficiente en términos de computación y produce un error pequeño en la interpolación.

Se presentan ejemplos numéricos que ilustran la eficiencia de los esquemas de subdivisión propuestos. En particular, los esquemas basados en clotoides generan curvas suaves que preservan las características geométricas deseadas, como la continuidad de la tangente y una distribución de curvatura más uniforme en comparación con otros métodos basados en círculos.

- Hermite multi-ondículas para datos en variedades: Mariantonia Cotronei, Caroline Moosmüller, Tomas Sauer, Nada Sissouno, [22], 2023.

  Este artículo presenta una construcción de multiwavelets interpolatorios de Hermite para funciones que toman valores en geometrías no lineales, como variedades Riemannianas o grupos de Lie. Los wavelets adaptados a datos con valores en variedades tienen aplicaciones importantes en la compresión y el procesamiento de señales.

  La clave es la conexión entre esquemas de subdivisión y wavelets, usando un enfoque de predicción-corrección basado en esquemas de subdivisión de Hermite. Se demuestra que los coeficientes de los wavelets decaen de manera similar al caso lineal.

  Un esquema de subdivisión de Hermite lineal se define por:

$$p^{(n+1)} = S_{A[n]}p^{(n)},$$

  donde $p^{(n)}$ es una secuencia de datos y $S_{A[n]}$ es un operador asociado con la máscara $A[n]$. Este esquema reproduce funciones como polinomios o exponenciales, asegurando la convergencia de las secuencias generadas.

El sistema de multiwavelets se construye usando la transformación:

$$S_{A[n]} D_n p^{(n)} = D_{n+1} p^{(n+1)},$$

donde D_n es una matriz de escalado. El objetivo es preservar las propiedades de los wavelets lineales en el contexto de datos sobre variedades.

En el esquema de predicción-corrección, la reconstrucción se basa en:

$$c_{n+1,2i} = S_{A[n]} c_{n,i}, \quad d_{n+1,2i+1} = c_{n+1,2i+1} - S_{A[n]} c_{n,i}.$$

Este esquema garantiza que la corrección mediante d_n anule los elementos no deseados en los datos originales.

Para extender estos conceptos a datos con valores en variedades M, se utilizan el transporte paralelo y el mapa exponencial:

$$p_j = \exp_{m_j}\left(\sum_{k\in Z} a_{j-2k} \exp_{m_j}^{-1}(p_k)\right),$$

donde exp es el mapa exponencial, y el transporte paralelo P_q^p asegura que los cálculos se realicen en el marco adecuado de la variedad.

El mapa exponencial en un punto $m \in M$:

$$\exp_m : T_m M \to M$$

lleva un vector tangente $v \in T_m M$ al punto alcanzado al caminar en M siguiendo la geodésica con velocidad inicial v.

El decaimiento de los coeficientes de wavelets en el caso de datos sobre variedades sigue una propiedad similar al caso lineal:

$$\|d[n]\|_\infty \leq C 2^{-2n}.$$

Esto asegura que los wavelets pueden representar eficientemente los datos manteniendo una tasa de compresión adecuada.

Este trabajo extiende los wavelets tipo Hermite a datos con valores en variedades, manteniendo propiedades fundamentales como el decaimiento de los coeficientes. Esta técnica tiene aplicaciones en el procesamiento de señales geométricas y la compresión de datos.

- Esquemas de subdivisión para datos valorados en variedades con simetría temporal: Duchamp, Xie y Yu, [27], 2016.

  Este trabajo investiga la suavidad de esquemas de subdivisión no lineales para datos valorados en variedades, conocidos como esquemas de subdivisión con un único punto base. Estos esquemas surgen en la construcción de transformaciones tipo wavelet para datos definidos sobre una variedad M, como las matrices simétricas positivas. Se estudian las condiciones de suavidad C^k y cómo los esquemas de subdivisión garantizan simetría temporal pero no espacial. Se estudian las condiciones de suavidad C^k y cómo los esquemas de subdivisión garantizan simetría temporal pero no espacial.

  Se define un esquema de subdivisión sobre una variedad M como:

$$(Sx)_{2h+\sigma} = \exp_{x_h}\left(\sum_{\ell} a_{2\ell+\sigma} \log_{x_h}(x_{h-\ell})\right), \quad \sigma = 0, 1, \quad h \in \mathbb{Z},$$

  donde $\exp_{x_h}$ es el mapa exponencial en el punto x_h, $\log_{x_h}$ es su inverso local, y a_ℓ es la máscara de un esquema de subdivisión lineal subyacente S_{lin}.

  Se explora la equivalencia de suavidad entre el esquema no lineal S y su versión lineal S_{lin}. Se sabe que la equivalencia C^3 se logra si un cierto tensor asociado al mapa de retracción f, llamado P_f, se anula:

$$P_f(u) = F_{0,2}\left(u, F_{0,2}(u,u)\right) + \frac{1}{2}F_{1,2}(u,u,u) - \frac{1}{2}F_{0,3}(u,u,u),$$

  donde $F_{\alpha,\beta}$ representa derivadas parciales del mapa f y $P_f = 0$ garantiza la equivalencia C^3.

  El trabajo analiza cómo el mapa de retracción f define una conexión afín sin torsión en M, con coeficientes de conexión dados por:

$$\Gamma_{ij}^k = -\frac{\partial^2 f^k(x,0)}{\partial X_i \partial X_j},$$

  y cómo la simetría temporal (invariancia ante $t \to -t$) influye en la equivalencia C^4. Si el esquema lineal S_{lin} tiene simetría temporal dual, esto implica que $P_f = 0$ y se mantiene la suavidad C^4 sin restricciones adicionales sobre el comportamiento de cuarto orden del mapa de retracción f.

  El artículo muestra que los esquemas de subdivisión con un único punto base pueden alcanzar una suavidad hasta C^4 bajo ciertas condiciones. Sin embargo, para grados mayores de suavidad, la curvatura juega un rol esencial, limitando la aplicabilidad de estos esquemas a ciertos tipos de variedades con curvatura cero.

  En conjunto, los trabajos de Reif y Weinmann [60], Cotronei *et al.* [22], y Duchamp *et al.* [27] muestran la evolución de los esquemas de subdivisión desde curvas planas basadas en clotoides, pasando por extensiones a variedades Riemannianas, hasta alcanzar análisis de suavidad en contextos más generales. Una diferencia clave es que mientras los dos primeros se enfocan en la construcción geométrica, el tercero pone énfasis en condiciones de regularidad C^k. Así, puede verse una progresión natural desde lo constructivo hacia lo analítico.

Finalizamos, con cuatro aportaciones independientes de gran interés y seguimiento:

- Esquemas de subdivisión con dilatación general en el contexto geométrico y no lineal: Andreas Weinmann, [65], 2012.

  Este artículo investiga esquemas de subdivisión con dilatación general en entornos geométricos y no lineales. Los esquemas de subdivisión tradicionales suelen utilizar un factor de dilatación fijo, pero el autor amplía este enfoque permitiendo dilataciones generales, lo que resulta en un mayor control sobre el refinamiento. El trabajo analiza la convergencia y la regularidad de estos esquemas en espacios métricos y geométricos, haciendo hincapié en su aplicabilidad en la interpolación de datos y en el diseño de curvas y superficies no lineales.

- Sobre el esquema de subdivisión log-exp de Donoho: elección de retracción y simetría temporal: Esfandiar Nava-Yazdani y Thomas P. Y. Yu, [57], 2006.

  Este artículo examina el esquema de subdivisión log-exp de Donoho, enfocado en la elección de la retracción y la simetría temporal. El esquema log-exp es un método no lineal que utiliza funciones logarítmicas y exponenciales para suavizar y refinar curvas y superficies. Los autores investigan diferentes opciones de retracción para optimizar el comportamiento del esquema y analizan su simetría temporal, lo que es clave para garantizar la estabilidad en aplicaciones de procesamiento de señales y modelado geométrico.

- Ondículas interpolatorias en variedades: Philipp Grohs y Johannes Wallner, [42], 2009.

  Este artículo introduce una nueva clase de wavelets interpolatorios diseñados para trabajar con datos valorados en variedades. Los wavelets tradicionales son herramientas poderosas para representar funciones y señales en el dominio euclidiano, pero los autores extienden este concepto al caso de datos ubicados en espacios más generales, como las variedades. El artículo presenta un análisis teórico de la construcción y aplicación de estos wavelets, con especial énfasis en la interpolación de datos geométricos, con aplicaciones potenciales en gráficos por computadora y procesamiento de datos científicos.

- Análogos logarítmico-exponenciales de esquemas de subdivisión univariados en grupos de Lie y sus propiedades de suavidad: Philipp Grohs y Johannes Wallner, [41], 2007.

  Este artículo explora los análogos log-exponenciales de los esquemas de subdivisión univariados dentro del contexto de los grupos de Lie. Los autores investigan cómo los esquemas de subdivisión pueden adaptarse para operar en grupos de Lie, manteniendo propiedades de suavidad similares a los esquemas tradicionales. Este enfoque es útil en áreas donde las simetrías continuas, descritas por los grupos de Lie, juegan un papel importante, como en física teórica y simulaciones geométricas.

Tabla 1: Comparación de esquemas de subdivisión en variedades.

Autores	Tipo de variedad	Aporte distintivo
Reif y Weinmann	Planas	Preservación de tangentes y curvatura
Cotronei *et al.*	Riemannianas, Lie	Extensión de wavelets a datos geométricos
Duchamp *et al.*	Positivas simétricas	Equivalencia con esquemas lineales
Weinmann	Geométricas generales	Control de refinamiento en espacios métricos

3. Preservación de formas geométricas

En este contexto, "preservación de formas geométricas" significa que, bajo la iteración del esquema de subdivisión, ciertas figuras básicas permanecen invariantes. Es decir, si los puntos de control iniciales pertenecen a una de estas formas, entonces la curva o superficie límite también lo hará, incluso tras infinitas iteraciones. Una de las ventajas más importantes de los esquemas de subdivisión no lineales es su capacidad para preservar formas geométricas particulares, como círculos en 2D o esferas en 3D, entre otras formas interesantes. Esto es especialmente relevante en el contexto de modelado geométrico y gráficos por computadora, donde la precisión en la representación de estas formas es crítica. En los esquemas lineales, las formas geométricas suaves como los círculos y esferas a menudo se distorsionan a medida que se refinan los puntos debido a la naturaleza rígida y global de las reglas de subdivisión. Por ejemplo, en un esquema lineal, un círculo podría volverse ligeramente ovalado o distorsionado debido a errores acumulativos.

Los esquemas no lineales abordan este problema ajustando las reglas de subdivisión localmente, de modo que los puntos generados respeten las propiedades geométricas de las formas originales. En el caso de un círculo, por ejemplo, los esquemas no lineales pueden mantener la curvatura constante a lo largo de toda la forma, lo que asegura que el refinamiento sucesivo no altere su estructura global [50], 1996.

Para esferas en 3D, se pueden aplicar técnicas similares, garantizando que las nuevas subdivisiones mantengan las propiedades de simetría y curvatura de la esfera original. Algunos esquemas no lineales utilizan operadores geométricos específicos que se ajustan al radio local de la esfera, permitiendo que los nuevos puntos permanezcan sobre la superficie esférica en lugar de desviarse hacia fuera o hacia dentro. Esto es fundamental en aplicaciones como la animación de personajes, simulaciones físicas y diseño de objetos tridimensionales, donde la precisión en la representación de esferas y otras formas geométricas básicas es esencial [23], 1997.

A continuación, revisaremos algunas aportaciones en este contexto:

- Esquema de Subdivisión Interpolatoria Hermítica basado en Splines de Bernstein Bézier: Mahendra Kumar Jena, [49], 2021.

  Este artículo introduce un nuevo esquema de subdivisión interpolatoria Hermítica no lineal para la interpolación de curvas, construido a partir de un spline racional de Bernstein Bézier. El esquema permite interpolar tanto los valores de la función como sus derivadas. Se presenta un análisis de convergencia, reproducción de polinomios y propiedades de preservación de la forma. Se demuestra que las funciones límite generadas por el esquema son globalmente C^1 y que el esquema también reproduce polinomios cuadráticos, preservando la monotonía y la convexidad.

  El esquema Hermítico es una técnica recursiva para calcular una función $\phi(x)$ y sus derivadas. Se parte de una función inicial $f_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^{d+1}$, donde el primer componente corresponde a los valores de ϕ, el segundo a su derivada ϕ', y así sucesivamente. La regla de subdivisión tiene la forma:

$$f_{n+1}(i) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} A(i-2j) f_n(j)$$

  donde $A(i)$ es una matriz de máscara y $f_n(i)$ es la secuencia refinada en el paso n.

  El esquema se construye a partir de los polinomios de Bernstein Bézier racionales de grado 2. Para un intervalo $[a, b]$, las coordenadas baricéntricas de un punto x se definen como $b_0(x) = \frac{b-x}{b-a}$ y $b_1(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Los polinomios de Bernstein Bézier son:

$$B_0(x) = (b_0(x))^2, \quad B_1(x) = 2b_0(x)b_1(x), \quad B_2(x) = (b_1(x))^2$$

  Con esto, los polinomios de Bernstein Bézier racionales se escriben como:

$$R_0(x) = \frac{w_0 B_0(x)}{\sum w_i B_i(x)}, \quad R_1(x) = \frac{w_1 B_1(x)}{\sum w_i B_i(x)}, \quad R_2(x) = \frac{w_2 B_2(x)}{\sum w_i B_i(x)}$$

  donde w_0, w_1, w_2 son los pesos.

  El esquema es C^1-convergente y reproduce polinomios cuadráticos cuando se eligen adecuadamente los pesos w_0 y w_2. Para la convergencia, se utiliza una técnica basada en diferencias divididas, que permite garantizar que las funciones límite sean suaves y continuas en todo el dominio.

  Se demuestra que el esquema preserva la monotonía y convexidad de los datos iniciales. Si los datos de entrada son monótonos crecientes o convexos, el esquema garantizará que la curva interpolada mantenga estas propiedades a lo largo de todas las iteraciones.

  Este nuevo esquema de subdivisión interpolatoria Hermítica basado en splines de Bernstein Bézier es adecuado para la generación de curvas suaves que reproducen polinomios de grado 2, preservan la forma y garantizan la convergencia C^1. Su aplicación puede ser útil en problemas donde se requiera una interpolación precisa que mantenga la geometría de los datos originales.

- Un esquema de subdivisión generalizado no lineal de grado arbitrario con un parámetro de tensión: Zeze Zhang, Hongchan Zheng, Jie Zhou y Lulu Pan, [73], 2020.

  Este artículo presenta un esquema de subdivisión no lineal de grado arbitrario con un parámetro de tensión. Este esquema refina pares punto-normal en 2D, y se construye sobre el esquema de subdivisión lineal generalizada con un parámetro de tensión, reemplazando el promedio aritmético ponderado en el esquema lineal con un promedio circular:

  Dado dos pares punto-normal $P_0 = (p_0, n_0)$ y $P_1 = (p_1, n_1)$, el *promedio circular* se define como el par $P_t = (p_t, n_t)$, donde:

$$p_t \in \text{arco}(p_0, p_1), \qquad n_t = \frac{n_0 \oplus n_1}{\|n_0 \oplus n_1\|},$$

  siendo $\oplus$ el promedio geodésico de las normales unitarias. De esta forma, p_t se mantiene sobre el círculo determinado por p_0 y p_1.

  Se demuestra que este esquema alcanza suavidad C^1 con una elección adecuada del parámetro de tensión cuando el grado es $m \geq 3$.

  El esquema de subdivisión generalizada lineal con un parámetro de tensión para un grado $m \geq 2$ se define por la siguiente iteración:

$$p_i^{(m)} = \frac{1}{2}\left(p_i^{(m-1)} + p_{i+1}^{(m-1)}\right)$$

  donde p_i son los puntos del polígono de control inicial y u es el parámetro de tensión. Este esquema es una generalización del algoritmo de Lane Riesenfeld.

  El promedio circular se aplica a pares punto-normal. Dados dos pares punto-normal $P_0 = (p_0, n_0)$ y $P_1 = (p_1, n_1)$, con p_0, p_1 puntos y n_0, n_1 vectores normales unitarios, el promedio circular produce un nuevo par $P_t = (p_t, n_t)$, donde p_t está sobre el arco entre p_0 y p_1, y n_t es el promedio geodésico de los vectores normales.

  El esquema no lineal se construye reemplazando el promedio aritmético en el esquema lineal por el circular. La regla de refinamiento es:

$$P_{2i+1}^{(j)} = P_i^{(j)} \odot P_{i+1}^{(j)}$$

  donde $\odot$ denota el promedio circular. Este esquema permite reconstruir curvas suaves y controlar la forma de la curva límite a través del parámetro de tensión u.

  La convergencia del esquema se asegura bajo ciertas condiciones. Definimos la diferencia entre puntos consecutivos como:

$$e_j = \sup_i |p_{j,i+1} - p_{j,i}|$$

y mostramos que la secuencia e_j es contractiva, es decir:

$$e_{j+1} \leq \eta e_j \quad \text{con} \quad 0 < \eta < 1$$

lo que implica la convergencia del esquema para cualquier conjunto de datos de entrada.

El esquema alcanza suavidad C^1 para $m \geq 3$ si el parámetro de tensión u satisface:

$$\sqrt{2} - 1 < u < \sqrt{2} + 1$$

Esto asegura que las curvas generadas sean suaves sin perder la capacidad de reconstruir curvas como el círculo.

Este esquema es útil para controlar la suavidad y la forma de las curvas límite, alcanzando suavidad C^1 con la elección adecuada de parámetros. Futuras investigaciones se centrarán en demostrar órdenes de suavidad superiores.

- Esquemas de subdivisión no lineales para funciones hiperbólicas y trigonométricas: Donat y López Ureña, [25], 2017.

  Este trabajo introduce una nueva familia de esquemas de subdivisión interpolatorios no lineales, con capacidad para reproducir funciones hiperbólicas y trigonométricas, así como polinomios de hasta segundo grado. Los esquemas tradicionales de subdivisión lineales y no estacionarios pueden lograr esta reproducción, pero requieren la determinación práctica de parámetros dependientes del nivel, lo cual complica la implementación en aplicaciones de modelado geométrico.

  Este trabajo se enfoca en esquemas binarios estacionarios donde la regla de refinamiento está dada por:

$$(Sf)_{2i+j} = \phi_j(f_{i-q}, \ldots, f_{i+q}), \quad j = 0, 1, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

  Si las funciones ϕ_j son lineales, el esquema se puede representar como:

$$\phi_j(f_{i-q}, \ldots, f_{i+q}) = \sum_{l=-q}^{q} a_j f_{i+l},$$

  donde $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ es la máscara del operador lineal S.

  Uno de los principales resultados es que los esquemas no lineales estacionarios propuestos pueden reproducir espacios de polinomios exponenciales de la forma:

$$W_{0,\gamma} = \text{span}\{1, \exp(\gamma t), \exp(-\gamma t)\}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, el esquema puede generar con precisión formas cónicas (círculos, elipses) mediante la interpolación de funciones trigonométricas. La reproducción se garantiza cuando los datos iniciales pertenecen a este espacio de funciones.

El trabajo también analiza las condiciones para obtener funciones límite con derivadas continuas, lo que se relaciona con la preservación de la monotonía de los datos iniciales.

Los esquemas de subdivisión no lineales propuestos ofrecen una herramienta eficiente para la reproducción exacta de secciones cónicas y formas hiperbólicas sin necesidad de un preprocesamiento de los datos. Estos esquemas son una extensión de los métodos tradicionales, permitiendo la generación de formas complejas con alta precisión.

- Curvas y superficies de subdivisión punto-normal: X. Yang, [71], 2006.

Este trabajo propone esquemas de subdivisión no lineales punto-normal (PN) para el modelado de curvas y superficies. Los esquemas refinan tanto las posiciones de los vértices como las normales en los puntos de control, lo que permite reproducir primitivas geométricas como círculos, cilindros y esferas.

El esquema de subdivisión PN refina los vértices y normales de la siguiente forma:

$$q_i^{k+1} = \sum_j a_{i-2j} p_j^k, \quad n_i^{k+1} = \frac{\sum_j a_{i-2j} n_j^k}{\left\| \sum_j a_{i-2j} n_j^k \right\|}, \quad p_i^{k+1} = q_i^{k+1} + \sum_j a_{i-2j} h_{ij}^k n_i^{k+1},$$

donde h_{ij}^k es la altura en la dirección de la normal n_i^{k+1} y q_i^{k+1} es el vértice subdividido linealmente.

Los esquemas de subdivisión PN preservan ciertas propiedades geométricas, como:

- Invarianza geométrica: Las curvas y superficies PN son invariantes bajo traslaciones, escalas y rotaciones del sistema de coordenadas.
- Preservación de círculos y esferas: Si los puntos de control y las normales iniciales están sobre un círculo o esfera, los puntos subdivididos también lo estarán.

Se demuestra que los esquemas de subdivisión PN tienen la misma convergencia y órdenes de suavidad que los esquemas lineales subyacentes.

Los esquemas de subdivisión PN propuestos generalizan los esquemas de subdivisión lineales tradicionales al permitir el control mediante puntos y normales. Estos esquemas son eficientes para modelar superficies suaves con alta precisión, preservando formas geométricas simples como círculos y esferas, y manteniendo el mismo grado de suavidad que los esquemas lineales.

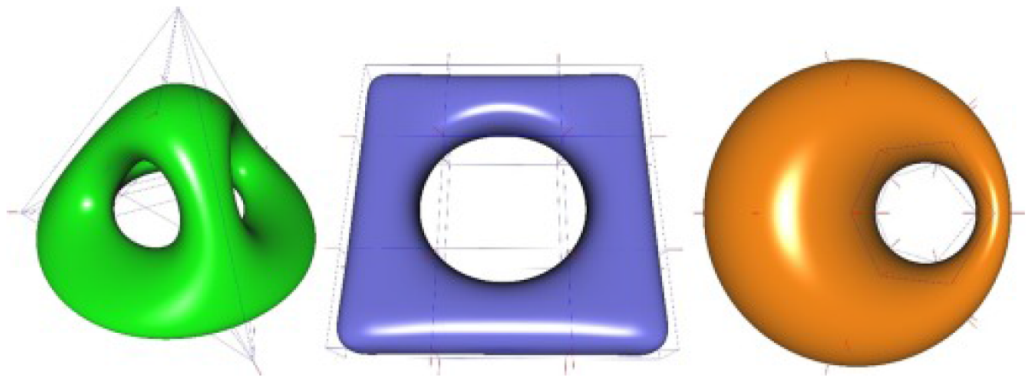

Figura 3: Superficies generadas con algoritmos de subdivisión punto-normal introducidos por Yang, [71].

- Un nuevo esquema de subdivisión de corte de esquinas invariante circular de cuatro puntos para diseño de curvas: Jian-ao Lian, [52], 2012.

  Este artículo introduce un nuevo esquema de subdivisión de corte de esquinas de cuatro puntos, invariante bajo transformaciones circulares, para el diseño de curvas. El método presentado permite generar curvas suaves y estéticamente agradables a partir de un conjunto inicial de puntos de control, manteniendo la propiedad de invariancia circular, lo que lo hace especialmente útil en aplicaciones gráficas. El autor proporciona un análisis detallado de la convergencia y suavidad del esquema, destacando sus ventajas en comparación con otros métodos de subdivisión existentes.

- Subdivisión con control exacto de bordes y geometría sin variedad: Fehmi Cirak y Quan Long, [18], 2011.

  Este artículo propone un enfoque novedoso para el control exacto de bordes y geometrías sin variedad utilizando esquemas de subdivisión. Las capas de subdivisión permiten la creación de superficies suaves que se ajustan con precisión a los bordes definidos por el usuario. El enfoque también aborda geometrías complejas no manifold, que son estructuras que no pueden ser descritas completamente por métodos de subdivisión tradicionales. Este trabajo tiene importantes aplicaciones en simulaciones de ingeniería y modelado geométrico avanzado.

- Subdivisión de curvas con control de longitud de arco: Victoria Hernández Mederos, Jorge C. Estrada-Sarlabous, Silvio R. Morales y Ioannis Ivrissimtzis, [47], 2009.

  Este artículo propone un esquema de subdivisión de curvas que controla la longitud de arco. En lugar de refinar las curvas de manera uniforme, los autores presentan un método que ajusta dinámicamente los puntos de control para mantener una distribución controlada de la longitud de arco. Este enfoque es útil en aplicaciones donde la precisión en la longitud de las curvas es crucial, como en el modelado geométrico, el diseño de caminos y trayectorias, y la animación por computadora.

- Esquemas de subdivisión no lineales circulares para el diseño de curvas: Jian-ao Lian, Yonghui Wang y Yonggao Yang, [53], 2009.

  Este artículo introduce esquemas de subdivisión no lineales diseñados para generar curvas circulares en aplicaciones de diseño geométrico. Los autores desarrollan un método basado en la subdivisión que se adapta a la naturaleza geométrica de las curvas circulares, permitiendo la creación de curvas suaves y precisas a partir de puntos de control discretos. Este enfoque es útil en el diseño asistido por computadora (CAD) y en gráficos por computadora para representar con precisión formas circulares y curvas cerradas.

- Un esquema de subdivisión no lineal que preserva círculos: Pavel Chalmovianský y Bert Jüttler, [17], 2007.

  Este artículo presenta un esquema de subdivisión no lineal que preserva las propiedades geométricas de las curvas circulares. Los autores desarrollan un algoritmo que permite la generación y refinamiento de curvas manteniendo su naturaleza circular durante el proceso de subdivisión. El esquema es útil en el diseño geométrico y en aplicaciones donde la precisión en la representación de curvas circulares es crucial.

- Esquemas de subdivisión basados en las normales para el diseño de curvas: Xunnian Yang, [70], 2006.

  Este artículo introduce un esquema de subdivisión basado en normales para el diseño de curvas. El método se basa en la utilización de las normales de las curvas en puntos de control para mejorar la suavidad y precisión de las curvas generadas. Este enfoque es útil en el diseño asistido por computadora (CAD) y en gráficos por computadora, donde se requiere un control preciso sobre la forma y suavidad de las curvas.

En esta línea de trabajo se observa una evolución desde métodos orientados a propiedades locales, como el esquema de Jena [49] que garantiza monotonía y convexidad, hasta propuestas más globales como la de Yang [70, 71] que asegura invariancia de círculos y esferas bajo refinamiento iterativo. Mientras los enfoques basados en promedio circular (Zhang *et al.* [73]) introducen un parámetro de tensión que permite cierto control del refinamiento, los métodos geométricos de Lian [52, 53] y Chalmovianský-Jüttler [17] se centran en mantener formas circulares exactas en el límite. En conjunto, estos trabajos muestran un balance entre flexibilidad algorítmica y preservación estricta de la geometría.

Tabla 2: Esquemas no lineales orientados a preservación de formas geométricas.

Autores	Forma preservada	Ventaja principal
Jena	Curvas convexas	Monotonía y convexidad
Zhang *et al.*	Círculos	Control por parámetro de tensión
Yang	Círculos y esferas	Invariante bajo isometrías
Lian	Curvas circulares	Suavidad con invariancia
Chalmovianský y Jüttler	Círculos	Mantiene circularidad exacta

4. Adaptación a las presencia de discontinuidades

Uno de los problemas comunes en esquemas de subdivisión lineales, especialmente cuando se aplican a señales o datos con discontinuidades (por ejemplo, bordes afilados en imágenes), es la aparición de oscilaciones de Gibbs. Estas oscilaciones son artefactos no deseados que surgen en las cercanías de discontinuidades cuando los esquemas suavizan excesivamente la señal o la superficie. Las discontinuidades también pueden haber aparecido por falta de datos cerca de regiones con gradientes altos (variaciones muy rápidas).

Los esquemas de subdivisión no lineales son efectivos para mitigar este fenómeno, ya que pueden adaptarse mejor a la presencia de bordes o discontinuidades. A diferencia de los métodos lineales, que aplican las mismas reglas de refinamiento en toda la señal, los esquemas no lineales pueden ajustar las reglas de subdivisión localmente para evitar sobre-suavización en áreas con características importantes, como bordes [50], 1996.

Algunas estrategias no lineales para eliminar las oscilaciones de Gibbs incluyen el uso de operadores adaptativos, donde los coeficientes de subdivisión varían en función de la pendiente local o la curvatura, lo que permite preservar mejor las características significativas de la señal. Otra técnica es incorporar regularización basada en variación total o métodos relacionados, que son adecuados para manejar discontinuidades.

Veamos algunas de las aportaciones en este contexto:

- Sobre una familia de esquemas de subdivisión no oscilatorios teniendo una regularidad C^r, $r > 1$: Sergio Amat, Juan Ruiz, Juan C. Trillo y Dionisio F. Yáñez, [11], 2020.

  Este artículo presenta una familia de esquemas de subdivisión no oscilatorios con regularidad C^r para $r > 1$. Los autores desarrollan esquemas que permiten obtener suavidad en los resultados interpolados, evitando fenómenos de oscilación que pueden ocurrir en los procesos de subdivisión. El enfoque está en garantizar un equilibrio entre la suavidad y la precisión del esquema, explorando cómo estos esquemas pueden ser aplicados en contextos numéricos y gráficos.

- Sobre una familia estable de esquemas de subdivisión no lineales eliminando el fenómeno de Gibbs: Sergio Amat, Juan Ruiz, J. Carlos Trillo y Dionisio F. Yáñez, [10] 2019.

  Los autores introducen una familia de esquemas de subdivisión no lineales de cuatro puntos que eliminan el fenómeno de Gibbs, un problema común en el procesamiento de señales y gráficos que genera oscilaciones no deseadas en los bordes de las señales. El artículo aborda la estabilidad y la convergencia de estos esquemas, proponiendo métodos efectivos para suavizar las transiciones sin perder precisión en la interpolación, lo cual es especialmente útil en aplicaciones como el tratamiento de imágenes y gráficos digitales.

- Una familia de esquemas interpolatorios ternarios de 5-puntos con regularidad C^2: Muhammad Aslam, [15], 2018.

  Este artículo presenta una familia de esquemas de subdivisión ternarios no lineales de interpolación con suavidad C^2. El trabajo se centra en desarrollar métodos que aseguren una suavidad considerable en las curvas y superficies generadas, lo que es crucial para aplicaciones gráficas y de modelado geométrico. La investigación analiza tanto las propiedades geométricas como las cualidades numéricas de estos esquemas, enfatizando su aplicabilidad en interpolación y gráficos computacionales, logrando transiciones suaves y sin distorsiones.

- Esquemas de subdivisión no lineales ternarios de $(2n-1)$ puntos: Muhammad Aslam, [14], 2018.

  Este trabajo presenta una familia de esquemas de subdivisión ternarios no lineales con interpolación, basada en $(2n-1)$ puntos. Los esquemas propuestos permiten generar curvas suaves a partir de un conjunto de puntos de control, mejorando la precisión y la suavidad de las curvas en comparación con los métodos lineales tradicionales. Se realiza un análisis detallado de la regularidad y convergencia de estos esquemas, enfocándose en su aplicabilidad en la geometría computacional y el procesamiento de gráficos.

- Sobre un esquema de subdivisión ternario no lineal y no interplatorio eliminando el fenómeno de Gibbs: Sergio Amat, Abdelaziz Choutri, Juan Ruiz y Sofiane Zouaoui, [1], 2018.

  Este artículo introduce un esquema de subdivisión no lineal de 4 puntos, ternario y no interpolatorio, diseñado para eliminar el fenómeno de Gibbs, que se manifiesta en oscilaciones no deseadas cerca de las discontinuidades. Los autores presentan un método que suprime estas oscilaciones, garantizando transiciones suaves entre las partes de la señal o imagen procesada. Además, se analiza la convergencia y la estabilidad del esquema, haciéndolo apto para aplicaciones en procesamiento de imágenes, gráficos computacionales y señales digitales.

- Análisis de un nuevo esquema de subdivisión no lineal. Aplicaciones en el procesamiento de imágenes. Sergio Amat, Rosa Donat, Jacques Liandrat y J. Carlos Trillo [8], 2006.

  Este trabajo presenta un análisis y desarrollo de un nuevo esquema de subdivisión no lineal, diseñado para mejorar la precisión y la calidad en la representación de datos en gráficos y procesamiento de imágenes. En el contexto del procesamiento digital de imágenes, los métodos de subdivisión son útiles para generar imágenes de alta resolución a partir de datos de baja resolución. Sin embargo, los métodos de subdivisión lineales tradicionales suelen tener limitaciones cuando se trata de preservar detalles importantes en zonas con discontinuidades o bordes marcados, lo cual es crucial en la calidad visual de una imagen.

  El esquema no lineal propuesto en el artículo se enfoca en conservar los detalles y bordes dentro de la imagen, evitando los efectos de suavizado excesivo que suelen presentarse en los métodos tradicionales. Los autores presentan un análisis detallado del comportamiento del esquema en términos de convergencia, estabilidad y preservación de características esenciales de la imagen. La metodología incorpora técnicas matemáticas avanzadas que permiten que el esquema responda de forma adaptativa a las variaciones en la estructura de la imagen.

  Además de la teoría detrás del nuevo esquema, los autores realizan una serie de experimentos numéricos que demuestran su eficacia y utilidad práctica en el procesamiento de imágenes. Estos experimentos muestran cómo el esquema no lineal propuesto puede aplicarse a diversas tareas de mejora de imágenes, incluyendo la preservación de bordes y la reducción de artefactos en imágenes ampliadas. Los resultados obtenidos son prometedores y sugieren que el esquema puede ser una alternativa valiosa en aplicaciones que requieren alta fidelidad en la representación de detalles visuales.

  En conclusión, el artículo presenta un avance significativo en el campo del procesamiento de imágenes mediante la introducción de un esquema de subdivisión que mejora la calidad visual al tiempo que reduce los efectos negativos de los métodos lineales convencionales.

- Sobre un esquema de subdivisión no lineal cuaternario de 4 puntos elimnando el fenómeno de Gibbs: Sergio Amat y Jacques Liandrat [4], 2013.

  Este artículo aborda un esquema de subdivisión no lineal de 4 puntos cuaternario, diseñado para aproximación en lugar de interpolación, que elimina el fenómeno de Gibbs. Este fenómeno, caracterizado por oscilaciones no deseadas en los bordes de señales o imágenes, es un problema común en el procesamiento de datos digitales. Los autores presentan un esquema que logra una transición suave y precisa, reduciendo estas oscilaciones sin comprometer la calidad de la aproximación. El trabajo incluye un análisis de la estabilidad y convergencia del esquema propuesto, con aplicaciones en procesamiento de imágenes, señales y gráficos.

- Una clase de esquemas de subdivisión no lineales de 4 puntos: Allal Guessab, María Moncayo y Gerhard Schmeisser, [43], 2012.

  Este artículo propone una clase de esquemas de subdivisión no lineales de cuatro puntos. Estos esquemas son diseñados para generar curvas suaves a partir de un conjunto inicial de puntos de control, y son aplicables en gráficos computacionales y modelado geométrico. A diferencia de los esquemas lineales tradicionales, los métodos no lineales presentados permiten un mayor control sobre la suavidad y precisión de las curvas generadas, reduciendo oscilaciones no deseadas. El artículo incluye un análisis teórico de la convergencia y la regularidad de los esquemas, junto con aplicaciones prácticas en geometría computacional.

- Esquemas de subdivisión no lineales ponderados Weighted-Power-p: Francesc Aràndiga, Rosa Donat, Maria Santágueda [13], 2012.

  Este trabajo introduce y analiza esquemas de subdivisión no lineales ponderados, conocidos como "Weighted-Power-p". Estos esquemas permiten el refinamiento de curvas o superficies mediante un proceso iterativo, en el que los pesos asignados a los puntos de control dependen de una función de potencia p. Se estudia el comportamiento de los esquemas en términos de suavidad, convergencia y estabilidad. El artículo también aborda aplicaciones en gráficos computacionales y modelado geométrico, mostrando cómo los esquemas ponderados ofrecen flexibilidad en la manipulación de formas geométricas.

Las propuestas analizadas para el tratamiento de discontinuidades muestran diferentes estrategias: los trabajos de Amat *et al.* y Moncayo *et al.* [43] se centran en eliminar oscilaciones de Gibbs mediante modificaciones no lineales de esquemas clásicos, mientras que Aslam [14, 15] opta por un enfoque interpolatorio que mantiene suavidad C^2 incluso en curvas complejas. Por su parte, Aràndiga *et al.* [13] introducen pesos adaptativos con base en funciones de potencia, lo que aporta flexibilidad para distintos tipos de datos. En conjunto, los distintos esquemas tienen como objetivo preservar la suavidad global incorporando adaptación local en presencia de irregularidades.

Tabla 3: Esquemas de subdivisión no lineales para manejo de discontinuidades.

Autores	Tipo	Enfoque	Beneficio
Amat *et al.*	Variado	Fenómeno Gibbs	Estabilidad y convergencia
Aslam	Ternario	Interpolatorio C^2	Suavidad en curvas complejas
Aràndiga *et al.*	Weighted-Power-p	Pesos adaptativos	

5. Esquemas de Multirresolución

Los esquemas de multirresolución son fundamentales en el análisis de señales e imágenes, proporcionando representaciones compactas en varias escalas. En particular, los esquemas no lineales propuestos por Harten [45,46], 1989, 1995, mejoran la adaptabilidad de la multirresolución al preservar características locales mediante técnicas de umbralización y aproximación adaptativa, lo cual es especialmente útil en contextos donde las estructuras de las señales no siguen un comportamiento lineal.

La multirresolución implica la descomposición de una señal $f(x)$ en varias escalas. En un esquema clásico de multirresolución, se busca representar $f(x)$ en términos de una serie de funciones de base, generadas a través de funciones escalares y de detalles. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$f(x) = \sum_j c_j \phi_j(x) + \sum_{j,k} d_{j,k} \psi_{j,k}(x), \tag{5.1}$$

donde $\phi_j(x)$ representa una función de baja frecuencia o escala y $\psi_{j,k}(x)$ representan funciones de detalle en diferentes niveles de resolución.

En los esquemas lineales, como las ondas Haar o Daubechies, los coeficientes c_j y $d_{j,k}$ se obtienen mediante convoluciones lineales. Sin embargo, en los esquemas no lineales, el cálculo de estos coeficientes depende de técnicas adaptativas que no requieren necesariamente una estructura lineal.

Harten desarrolló un esquema de multirresolución no lineal que introduce operaciones adaptativas en el cálculo de los coeficientes $d_{j,k}$. En lugar de emplear convoluciones, se aplican operadores no lineales que filtran selectivamente los detalles de la señal de acuerdo con su importancia local.

La técnica de umbralización permite eliminar componentes de la señal que se consideran irrelevantes. Sea $f(x)$ una señal continua, su versión umbralizada, $T(f(x))$, puede representarse como:

$$T(f(x)) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \lambda, \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \lambda, \end{cases} \tag{5.2}$$

donde λ es el umbral. Este valor puede ajustarse dinámicamente según las características de la señal. En el contexto de la multirresolución no lineal, esta umbralización permite preservar sólo los detalles más significativos, reduciendo la complejidad computacional y mejorando la compresión.

En las técnicas de interpolación adaptativa, se ajusta el grado de resolución en función de las características locales de la señal. Para una señal $f(x)$, la interpolación adaptativa $I(f(x))$ podría definirse a través de una función de ponderación $w(x)$ que varía localmente:

$$I(f(x)) = w(x) \cdot f(x) + (1 - w(x)) \cdot f'(x), \tag{5.3}$$

donde $f'(x)$ es una versión suavizada de $f(x)$, y $w(x) \in [0,1]$ se ajusta para resaltar regiones de alta variabilidad en $f(x)$. En zonas de alta frecuencia, $w(x)$ se aproxima a 1, manteniendo el detalle, mientras que en zonas suaves, $w(x)$ se aproxima a 0, reduciendo la resolución.

Los esquemas de multirresolución no lineales encuentran aplicaciones en varias áreas:

- Compresión de Imágenes: Los métodos de umbralización adaptativa permiten comprimir imágenes eliminando detalles irrelevantes, mientras que la interpolación adaptativa mantiene la calidad visual en las áreas de interés.
- Procesamiento de Señales Médicas: En imágenes médicas, estos esquemas mejoran la claridad de características importantes, como estructuras anatómicas pequeñas o anomalías.

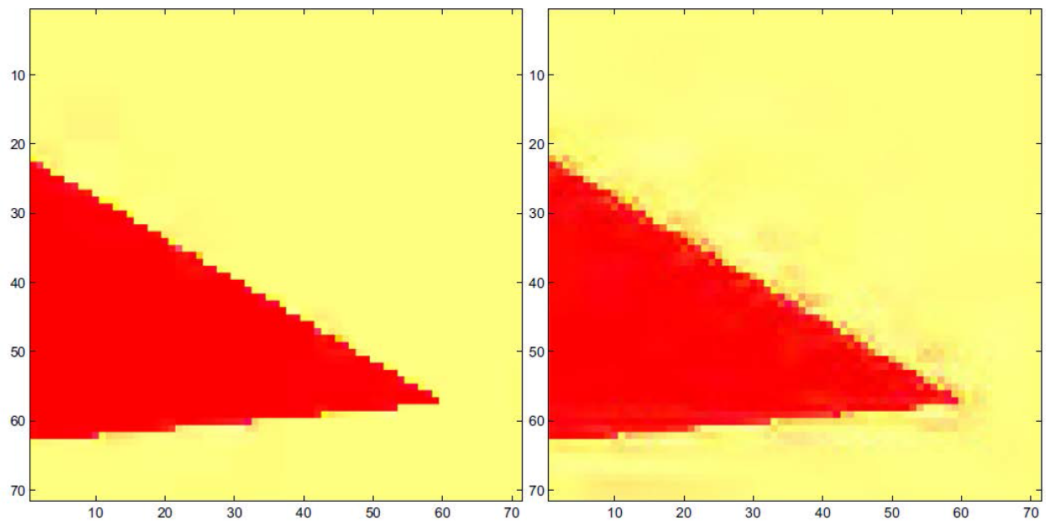

Figura 4: Reconstrucciones de algoritmos de multirresolución en un proceso de compresión de imágenes. En la izquierda se observa la buena adaptación a las discontinuidades del algoritmo no lineal, mientras que en la derecha aparecen las oscilaciones tipo Gibbs clásicas de multirresoluciones lineales.

Podríamos destacar estas dos aportaciones pioneras de Ami Harten:

- Harten, A. (1989). Discrete Multiresolution Analysis and Generalized Wavelets. Applied Numerical Mathematics, 12(1-3), 153-192.

  En este trabajo, Harten presenta una forma discreta de análisis de multirresolución y su aplicación a las wavelets generalizadas, lo que es relevante para el desarrollo de esquemas multirresolución no lineales.

- Harten, A. (1995). Multiresolution Representation of Data: A General Framework. SIAM Journal on Numerical Analysis, 33(3), 1205-1256.

  Este artículo proporciona un marco general para la representación de datos en múltiples resoluciones, abarcando tanto métodos lineales como no lineales.

A continuación, repasaremos algunas otras aportaciones en este campo:

- Sobre el acople de operadores de decimación con esquemas de subdivisión para análisis multiescala: Zhiqing Kui, Jean Baccou, Jacques Liandrat, [51], 2017.

  Este trabajo explora el acoplamiento del operador de decimación con esquemas de subdivisión para el análisis a múltiples escalas. El estudio aborda la interacción entre los operadores de decimación, que reducen la resolución de una señal, y los esquemas de subdivisión, que permiten su refinamiento y reconstrucción. Los autores presentan un enfoque sistemático para integrar ambos métodos, destacando su relevancia en aplicaciones como la compresión de datos y la representación de señales en diferentes escalas de detalle. El análisis incluye tanto consideraciones teóricas como resultados numéricos que demuestran la efectividad de la técnica.

- Sobre un esquema de multirresolución en medias en celda para la compresión de imágenes: Sergio Amat, Jacques Liandrat, Juan Ruiz, J. Carlos Trillo, [9], 2012.

  Este artículo presenta un esquema no lineal de multirresolución basado en promedios celulares para la compresión de imágenes. Los esquemas de multirresolución permiten representar imágenes en diferentes niveles de detalle, facilitando la compresión sin perder información relevante. El enfoque no lineal propuesto por los autores reduce las oscilaciones y mejora la precisión en las representaciones comprimidas, en comparación con los métodos lineales. Se incluyen resultados numéricos que muestran la efectividad del esquema en la compresión de imágenes, destacando su capacidad para reducir el tamaño de los datos sin sacrificar calidad.

- Transformaciones multiescala no lineales: teoría L^p: Peter Oswald, [59], 2012.

  Este artículo presenta un análisis teórico de las transformaciones multiescala no lineales dentro del marco de la teoría L^p. Las transformaciones multiescala son herramientas importantes para el procesamiento de señales y la compresión de datos, y el enfoque no lineal ofrece mejoras significativas en la preservación de características esenciales en diferentes escalas. El autor desarrolla un marco matemático para estudiar la estabilidad y el comportamiento de estas transformaciones en espacios L^p, proporcionando nuevas perspectivas sobre cómo aplicar estas técnicas en diversas aplicaciones, como la compresión de imágenes y la resolución de problemas numéricos.

- Una familia de esquemas de multirresolución no lineales no separables en 2D: Sergio Amat, K. Dadourian, Jacques Liandrat, Juan Ruiz, Juan C. Trillo, [3], 2010.

  Este artículo presenta una familia de esquemas de multirresolución no lineales, no separables y estables en dos dimensiones (2D). Los autores analizan cómo estos esquemas permiten descomponer y representar datos bidimensionales en varios niveles de resolución, manteniendo estabilidad y precisión. El enfoque no separable es clave para tratar imágenes y datos geométricos que no pueden descomponerse en direcciones independientes. El artículo incluye aplicaciones en compresión de imágenes y análisis de datos bidimensionales complejos.

- Aproximación multiescala, no lineal y adaptativa, [24], 2009.

  Este extenso volumen de más de 650 páginas explora diversos enfoques de aproximación multiescala, no lineales y adaptativos, con aplicaciones en áreas como el análisis numérico, el procesamiento de señales y el modelado geométrico. Se aborda cómo las técnicas de aproximación multiescala permiten representar datos en diferentes niveles de detalle, y se analiza cómo los métodos no lineales y adaptativos pueden mejorar la precisión en situaciones donde los enfoques lineales tradicionales no son suficientes. El libro incluye contribuciones de varios expertos y abarca tanto los aspectos teóricos como las aplicaciones prácticas.

- Sobre esquemas de multirresolución utilizando una selección del esténcil y su aplicación en esquemas ENO: Sergio Amat, Sonia Busquier, J. Carlos Trillo, [7], 2007.

  Este artículo introduce un esquema de multiresolución basado en la selección de un esténcil para mejorar la precisión y evitar oscilaciones no deseadas en esquemas ENO (Essentially Non-Oscillatory). Los autores proponen un enfoque para seleccionar automáticamente el esténcil adecuado, lo que reduce los errores en aplicaciones como la simulación de flujos y ecuaciones en derivadas parciales. Este esquema es particularmente relevante en el análisis numérico de fenómenos físicos que requieren alta precisión y estabilidad.

- Compresión de datos con esquemas tipo ENO: Un caso de estudio: Sergio Amat, Francesc Aràndiga, Albert Cohen, Rosa Donat, Gregori García y Markus von Oehsen, [5], 2001.

  Se estudian las propiedades de compresión de transformaciones multiresolución no lineales de tipo ENO en imágenes digitales. Se utilizan algoritmos de control de errores específicos para garantizar una precisión prescrita. Los resultados numéricos revelan que estos métodos superan con creces las descomposiciones de wavelets más clásicas en el caso de imágenes geométricas suaves por partes.

- Esquemas de multirresolución con control del error para la representación de imágenes compactas: Sergio Amat, Francesc Aràndiga, Albert Cohen y Rosa Donat, [6], 2002.

  Se estudia una clase de representaciones multiresolución basadas en predicción no lineal en el contexto multivariado basado en estrategias de productos tensoriales. A diferencia de las transformadas wavelet lineales estándar, estas representaciones no pueden considerarse como un cambio de base, y el error inducido al establecer un umbral o cuantificar los coeficientes requiere un análisis diferente. Proponemos algoritmos de control de errores específicos que garantizan una precisión prescrita en varias normas al realizar dichas operaciones con los coeficientes. Estos algoritmos se comparan con umbrales estándar, para imágenes sintéticas y reales.

En el ámbito de la multirresoluciún, los trabajos revisados parten de la construcción pionera de Harten [45,46], centrada en compresión adaptativa de señales, y se diversifican hacia contextos como el procesamiento de imágenes (Amat *et al.*) o la teoría funcional (Oswald [59]). La aproximación de Kui *et al.* [51] ofrece un marco sistemático que integra decimación y subdivisión, mientras que Amat *et al.* priorizan la estabilidad mediante algoritmos de error-control. Comparando estas contribuciones, se aprecia un progreso desde esquemas fundamentalmente unidimensionales hacia extensiones en dos dimensiones y aplicaciones más generales, siempre con el hilo conductor de combinar eficiencia computacional con estabilidad analítica.

Tabla 4: Esquemas de multirresolución no lineales.

Trabajo	Técnica	Aplicación	Aporte
Harten	Multiescala adaptativa	Señales, compresión	Predicción adaptativa
Amat *et al.*	Separables y no separables	Tratamiento imágenes	Precisión con estabilidad
Kui *et al.*	Decimación + subdivisión	Multi-escala	Integración sistemática
Oswald	Teoría L^p	Procesamiento señales	Análisis de estabilidad

Quisiéramos terminar esta sección enfatizando la existencia de trabajos donde se utilizan esquemas de multirresolución para mejorar la eficiencia computacional de aproximaciones numéricas de EDPs. Si bien es cierto que la no linealidad está en el uso de umbrales no de esquemas no lineales, pudiendo ser esto último una nueva línea de investigación. En este contexto, los esquemas no lineales podrían ser beneficiosos en ejemplos físicos donde aparezcan discontinuidades que se preserven, básicamente fenómenos con ausencia total de difusión.

Bürger *et al.* [16], 2008: este trabajo presenta un esquema multirresolución completamente adaptativo para ecuaciones parabólicas fuertemente degeneradas en una dimensión espacial. Se basa en volúmenes finitos y emplea una representación multirresolución almacenada en un árbol graduado. El método mejora drásticamente el rendimiento computacional (CPU y memoria), manteniendo convergencia hacia soluciones de entropía.

Coquel *et al.* [20], 2006: en el contexto de flujos multicomponentes con ondas de dispar velocidad, proponen una estrategia híbrida (explícito e implícito) combinada con un esquema multirresolución completamente adaptativo. Esto permite una malla adaptativa basada en la suavidad del fenómeno, reduciendo así el coste computacional sin sacrificar la precisión.

6. Teorías desarrolladas para el análisis teórico de esquemas de subdivisión no lineales

El análisis de los esquemas de subdivisión lineales está bien establecido mediante herramientas como la transformada de Fourier, el análisis matricial y los métodos basados en los símbolos. Estas técnicas permiten caracterizar con precisión la convergencia, el orden de aproximación y la regularidad C^k en términos espectrales. Sin embargo, los esquemas no lineales rompen la superposición y, con ella, gran parte del andamiaje clásico:

- **Ausencia de superposición.** La respuesta a una combinación lineal de datos no es la combinación lineal de las respuestas, lo que invalida argumentos espectrales directos.
- **Dependencia del contexto.** Las reglas locales pueden depender de la geometría o del estado de los datos (selecciones ENO, medias no lineales, normalizaciones), generando dinámicas no uniformes.
- **Datos con valores no euclidianos.** Muchas aplicaciones requieren datos en variedades, esferas o grupos de Lie, donde los cálculos dependen de la geometría subyacente.
- **Propiedades de forma.** Positividad, monotonía o convexidad (y sus análogos en variedades) pasan a ser restricciones esenciales que los polinomios lineales no siempre preservan; los esquemas no lineales se diseñan, a menudo, para respetarlas.

Se han desarrollado distintas aproximaciones teóricas para el estudio de esquemas de subdivisión no lineales. Una primera línea la constituyen los esquemas geométricos, en los que las reglas de refinamiento conmutan con similitudes y permiten descomponer la dinámica en componentes invariantes, de modo que el control de la distorsión relativa durante las iteraciones conduce a resultados de rectificación y a garantías de regularidad de tipo Hölder. Otra aproximación se basa en la proximidad diferencial frente a un esquema lineal de referencia, lo que permite transferir suavidad, orden de aproximación y estabilidad del modelo lineal al no lineal siempre que se cumplan ciertas condiciones de compatibilidad en derivadas discretas. En contextos más generales, como variedades, esferas, grupos de Lie o espacios métricos, el análisis recurre a herramientas geométricas intrínsecas como contracciones, comparaciones de curvatura y desarrollos geodésicos, que proporcionan criterios de convergencia y regularidad en entornos no euclidianos. Finalmente, en esquemas cuasi lineales o aquellos basados en medias no lineales, la selección dependiente de los datos requiere técnicas específicas que combinan estabilidad, proximidad y control de variación total, incluyendo además condiciones estructurales para garantizar el buen comportamiento en mallas irregulares. En conjunto, todas estas teorías persiguen como objetivos centrales la convergencia, la regularidad y el orden de aproximación en un marco no lineal y no necesariamente euclidiano, constituyendo un área de investigación activa.

A continuación, repasaremos algunas de estas teorías:

- Regularidad hölderiana para esquemas de subdivisión geométrica, T. Ewald, U. Reif, M. Sabin, [34], 2015.

  Este artículo presenta un marco teórico para analizar esquemas de subdivisión no lineales con valores en $\mathbb{R}^d$, donde los esquemas son geométricos en el sentido de que conmutan con las similitudes en $\mathbb{R}^d$. El objetivo principal es establecer la regularidad $C^{1,\alpha}$ para esquemas arbitrarios de este tipo y $C^{2,\alpha}$ para un subconjunto importante de ellos, incluyendo todos los esquemas con valores reales. La clave está en determinar el rango de ciertas funciones reales para garantizar la convergencia del esquema y la regularidad de Hölder de las curvas límite.

  Los esquemas de subdivisión univariados definen una curva como el límite de un proceso de refinamiento a partir de un polígono de control inicial. En este trabajo, se consideran esquemas geométricos que conmutan con transformaciones de similitud, es decir, la transformación:

$$S(p) = \lambda p Q + s$$

  donde λ es un factor de escala, Q una matriz ortogonal y s un vector de traslación. Este tipo de esquemas se clasifican como GLUE-schemes (Geometric, Local, Uniform, Equilinear).

  Para medir la desviación de un conjunto de puntos respecto a un comportamiento lineal, se introduce el concepto de distorsión relativa, definida como:

$$\kappa(p) = \frac{|p|_2}{|\Pi p|_1},$$

  donde Π es la proyección ortogonal y $|\cdot|_i$ es norma euclidiana ℓ^i en $\mathbb{R}^d$. Un esquema de subdivisión está rectificado si la distorsión relativa de la sucesión de puntos converge a cero.

  La regularidad $C^{1,\alpha}$ se alcanza si las curvas límite generadas por el esquema son diferenciables con derivada localmente Hölder continua. Esto se puede verificar garantizando que la distorsión relativa decae con un factor $2^{-\alpha}$ en cada iteración del esquema:

$$\kappa(p_{n+1}) \leq C 2^{-\alpha n}.$$

  Si esta condición se cumple, el esquema se considera fuertemente rectificado.

  Este trabajo proporciona un marco general para analizar la regularidad de esquemas de subdivisión geométricos y garantiza la regularidad $C^{1,\alpha}$ y $C^{2,\alpha}$ bajo ciertas condiciones. Los resultados son aplicables a una amplia gama de algoritmos geométricos.

- Condición de proximidad para la suavidad en esquemas de subdivisión no lineales: Tom Duchamp, Gang Xie, Thomas Yu, [26], 2013.

  Este artículo presenta una condición necesaria y suficiente para la equivalencia en la suavidad de esquemas de subdivisión no lineales respecto a esquemas de subdivisión lineales. El análisis se basa en la introducción de una nueva condición de proximidad diferencial. El problema abordado es determinar cuándo un esquema de subdivisión no lineal hereda la regularidad de su contraparte lineal.

  Un esquema de subdivisión S es una transformación que actúa sobre secuencias $x = (x_i)$ con valores en una variedad suave M. Si S es un esquema de subdivisión C^k, existe una función C^k que interpola los datos de control definidos por x.

  Para comparar la suavidad entre un esquema de subdivisión no lineal S y su versión lineal S_{lin}, se introduce la condición de proximidad diferencial, que se expresa mediante derivadas parciales de la siguiente forma:

$$D^\nu \Phi_\sigma|_{(\delta_0,0,\ldots,0)} = 0, \quad \text{si} \quad |\nu| \geq 2 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{K} j\nu_j \leq k,$$

  donde ν es un multiíndice que determina el orden de las diferencias finitas, y k es el grado de suavidad del esquema. La condición de proximidad diferencial garantiza que, hasta el orden de suavidad k, el comportamiento local del esquema no lineal es indistinguible del lineal.

  El artículo también presenta la condición de compatibilidad suave, que asegura que el esquema no lineal S y el esquema lineal S_{lin} comparten ciertos factores locales y de fase.

  Finalmente, se demuestra que la condición de proximidad diferencial es tanto necesaria como suficiente para que el esquema de subdivisión S sea C^k-suave si el esquema lineal correspondiente S_{lin} es C^k-suave. Los resultados son probados utilizando expansiones de Taylor y análisis de resonancia en sistemas dinámicos discretos.

- Análisis de convergencia de esquemas de subdivisión sobre la esfera: Svenja Hüning, Johannes Wallner, [48], 2022.

  Este artículo analiza la convergencia de procesos de subdivisión en la esfera, un campo relevante en geometría computacional y procesamiento de gráficos 3D. Los autores investigan esquemas de subdivisión que operan sobre superficies esféricas en lugar de superficies planas, centrándose en su convergencia y propiedades numéricas. El análisis incluye la introducción de herramientas que permiten la estabilidad de los algoritmos, así como un estudio detallado de las características geométricas y la regularidad de las superficies generadas.

- Análisis C^1 de esquemas de subdivisión tipo Hermite sobre variedades: Caroline Moosmüller, [56], 2016.

  Este trabajo presenta un análisis detallado de la suavidad C^1 de los esquemas de subdivisión de Hermite en variedades. Los esquemas de subdivisión de Hermite son utilizados para generar curvas y superficies suaves a partir de datos vectoriales y escalares. En este contexto, se exploran las propiedades de suavidad de las curvas generadas cuando los puntos de control residen en una variedad geométrica. El artículo proporciona un marco teórico para entender cómo los esquemas de subdivisión pueden aplicarse a estructuras geométricas más generales que los espacios euclidianos, y estudia su convergencia y regularidad en este contexto.

- Convergencia de esquemas de refinamiento sobre espacios métricos: Oliver Ebner, [33], 2013.

  Este trabajo investiga la convergencia de esquemas de refinamiento en espacios métricos. Los esquemas de refinamiento son algoritmos iterativos utilizados para mejorar la resolución de una señal o conjunto de datos. El autor estudia cómo estos esquemas convergen en el marco general de espacios métricos, lo que extiende el análisis de esquemas de subdivisión a contextos más abstractos que los tradicionales espacios euclidianos. El artículo proporciona condiciones bajo las cuales los esquemas garantizan convergencia y analiza su comportamiento en diversos tipos de espacios métricos.

- Propiedad de invarianza de las condiciones de proximidad en subdivisión no lineal: Gang Xie, Thomas P. Y. Yu, [69], 2012.

  Este trabajo explora la propiedad de invariancia en condiciones de proximidad dentro de los esquemas de subdivisión no lineales. Los autores analizan cómo los esquemas no lineales preservan la proximidad entre puntos en cada nivel de refinamiento, lo que es crucial para garantizar la estabilidad y precisión en la generación de curvas o superficies suaves. El artículo desarrolla condiciones específicas bajo las cuales esta propiedad se mantiene, proporcionando una base teórica sólida para el uso de esquemas no lineales en aplicaciones prácticas como el modelado geométrico y el procesamiento de imágenes.

- Propiedades de equivalencia en el order de aproximación de esquemas de subdivisión sobre variedades: Gang Xie, Thomas P.-Y. Yu, [68], 2012.

  Este artículo investiga las propiedades de equivalencia del orden de aproximación en esquemas de subdivisión de datos valorados en variedades. Los esquemas de subdivisión tradicionales operan en el espacio euclidiano, pero este trabajo extiende su aplicabilidad a datos en variedades geométricas. Los autores demuestran que, bajo ciertas condiciones, los órdenes de aproximación de los esquemas de subdivisión para datos en variedades pueden ser equivalentes a los de datos en espacios euclidianos, lo que tiene implicaciones importantes para la interpolación y el procesamiento de datos geométricos.

- Regularidad de esquemas de subdivisión no lineales y no separables: Basarab Matei, Sylvain Meignen, Anastasia Zakharova, [55] 2011.

  Este trabajo analiza la suavidad de esquemas de subdivisión no lineales y no separables. Los autores estudian cómo estos esquemas generan curvas y superficies suaves, incluso en configuraciones donde las propiedades de separación no se cumplen, lo que ocurre en muchos problemas geométricos complejos. Se proporciona un análisis teórico de la convergencia y suavidad de estos esquemas, y se destacan aplicaciones en gráficos por computadora y procesamiento de imágenes, donde es esencial el control de la suavidad en múltiples dimensiones.

- Análisis de una clase de esquemas de subdivisión no lineales y transformaciones de multirresolución asociadas: Sergio Amat, K. Dadourian, Jacques Liandrat, [2], 2011.

  Este artículo presenta un análisis detallado de una clase de esquemas de subdivisión no lineales y sus transformaciones multirresolución asociadas. Los autores estudian cómo estos esquemas pueden utilizarse para representar y comprimir señales e imágenes, proporcionando un marco para realizar transformaciones multirresolución que preserven la estructura de los datos originales. Se ofrece un análisis teórico y numérico de la convergencia y estabilidad de los esquemas, mostrando su aplicabilidad en compresión de imágenes y modelado geométrico.

- Orden de aproximación derivado de la estabilidad de esquemas de subdivisión no lineales: Philipp Grohs, [39], 2010.

  Este artículo explora el orden de aproximación que se deriva de la estabilidad en esquemas de subdivisión no lineales. El autor establece condiciones bajo las cuales los esquemas de subdivisión no lineales preservan la estabilidad, lo que resulta en un alto orden de aproximación. Este análisis es crucial para aplicaciones donde se requiere una representación precisa de curvas y superficies, como en gráficos computacionales y simulaciones geométricas. El trabajo también ofrece una comparación con esquemas de subdivisión lineales tradicionales, mostrando las ventajas de los enfoques no lineales.

- Esquemas de subdivisión no lineales en mallas irregulares: Andreas Weinmann, [64], 2010.

  Este trabajo analiza los esquemas de subdivisión no lineales en mallas irregulares. A diferencia de los esquemas tradicionales que requieren mallas regulares, este estudio aborda cómo los métodos no lineales pueden aplicarse a mallas con geometrías irregulares, comunes en simulaciones numéricas y gráficos computacionales. El autor investiga la convergencia y la estabilidad de estos esquemas, presentando condiciones que garantizan la generación de superficies suaves en mallas irregulares. Este enfoque es particularmente útil en aplicaciones de diseño geométrico y modelado en mallas complejas.

- Estabilidad de subdivisión no lineal y transformaciones multiescala: S. Harizanov, Peter Oswald, [44], 2010.

  Este artículo estudia la estabilidad de los esquemas de subdivisión no lineales y las transformaciones multiescala. La estabilidad es un factor clave para garantizar que las soluciones generadas por estos esquemas sean útiles en aplicaciones prácticas, como la compresión de datos o el procesamiento de señales. Los autores analizan diferentes clases de transformaciones y esquemas, proporcionando resultados teóricos sobre cuándo estos métodos mantienen su estabilidad, lo cual es crucial para el refinamiento progresivo de datos o la representación de funciones.

- Un análisis general de la proximidad de esquemas de subdivisión no lineales: Philipp Grohs, [40], 2010.

  Este trabajo realiza un análisis general de proximidad en esquemas de subdivisión no lineales. El enfoque de proximidad se refiere a cómo los puntos generados por el esquema de subdivisión se mantienen cercanos a los puntos originales, lo que afecta directamente la precisión y la calidad de las soluciones generadas. El artículo presenta un marco teórico para estudiar esta propiedad, derivando condiciones bajo las cuales los esquemas no lineales garantizan la proximidad en iteraciones sucesivas, lo cual es importante para la interpolación geométrica y la generación de curvas suaves.

- Orden de aproximación de esquemas de subdivisión no lineales: Nira Dyn, Philipp Grohs, Johannes Wallner, [30], 2010.

  Este artículo investiga el orden de aproximación de los esquemas de subdivisión no lineales interpolatorios. El orden de aproximación es una medida de la precisión con la que los esquemas de subdivisión pueden aproximar funciones o curvas a medida que se refinan. Los autores desarrollan una teoría que extiende el análisis del orden de aproximación a esquemas no lineales, destacando cómo estos métodos pueden ofrecer mejores resultados que los esquemas lineales tradicionales en aplicaciones de interpolación y modelado geométrico.

- Subdivisión y transformaciones multiescala univariadas, el caso no lineal: Nira Dyn, Peter Oswald, [32], 2009.

  Este capítulo explora los esquemas de subdivisión univariados y las transformaciones multiescala en el contexto no lineal. Se estudian los métodos univariados, que trabajan en una sola variable, y cómo las transformaciones multiescala pueden aplicarse de manera no lineal para mejorar la representación de señales y funciones en diferentes niveles de detalle. Los autores analizan la estabilidad y el comportamiento de estos esquemas en el caso no lineal, mostrando aplicaciones en procesamiento de imágenes y compresión de datos.

- Esquemas de subdivisión lineales y no lineales en modelado geométrico: Nira Dyn, [29], 2008.

  Este trabajo proporciona una revisión de los esquemas de subdivisión lineales y no lineales en el contexto del modelado geométrico. Nira Dyn describe cómo los esquemas de subdivisión se utilizan para generar curvas y superficies suaves a partir de datos discretos, y compara los enfoques lineales tradicionales con los no lineales, destacando las ventajas de estos últimos en la representación de formas geométricas complejas. El artículo también discute la convergencia y la regularidad de los esquemas de subdivisión, con aplicaciones en gráficos por computadora y diseño asistido por computadora (CAD).

- Dos preguntas abiertas sobre subdivisión: Malcom Sabin, [61], 2009.

  Este breve artículo plantea dos preguntas abiertas en el campo de los esquemas de subdivisión. Malcolm Sabin analiza problemas no resueltos relacionados con la convergencia y la regularidad de ciertos esquemas de subdivisión, que son fundamentales para el refinamiento iterativo de curvas y superficies. Estas preguntas son importantes tanto desde un punto de vista teórico como práctico, ya que afectan la eficacia de los esquemas de subdivisión en aplicaciones de gráficos por computadora, diseño de superficies y simulaciones numéricas.

- Regularidad de subdivisión multivariada interpolatoria en grupos de Lie: Philipp Grohs, [38], 2009.

  Este artículo aborda la suavidad de los esquemas de subdivisión interpolatorios en grupos de Lie. Los grupos de Lie, que son estructuras algebraicas que describen simetrías continuas, se utilizan en muchas áreas de la matemática y la física. Grohs analiza cómo los esquemas de subdivisión pueden aplicarse a datos en estos grupos, preservando la suavidad y garantizando la convergencia. Este enfoque tiene aplicaciones potenciales en gráficos por computadora, robótica y simulaciones físicas donde se requiere trabajar con datos que residen en grupos de Lie.

- Sobre la regularidad de funciones reales generadas por esquemas de subdivisión usando medias binarias no lineales: Ron Goldman, Etienne Vouga, Scott Schaefer, [36], 2009.

  Este trabajo investiga la suavidad de las funciones reales generadas mediante esquemas de subdivisión que emplean promedios binarios no lineales. Los autores analizan cómo la suavidad de las funciones generadas se ve afectada por el tipo de promedio no lineal utilizado en el esquema de subdivisión, proporcionando condiciones matemáticas que garantizan la suavidad. Este estudio es relevante para la creación de curvas y superficies suaves en gráficos por computadora y diseño geométrico.

- Sobre esquemas de subdivisión de Hermite con restricciones: Paolo Costantini, Carla Manni, [21], 2008.

  Este artículo aborda los esquemas de subdivisión no lineales de Hermite bajo restricciones. Los esquemas de Hermite permiten el refinamiento de funciones mediante la interpolación de valores y derivadas en puntos de control. Los autores presentan un enfoque no lineal para estos esquemas, garantizando que se respeten ciertas restricciones geométricas o de suavidad. Este trabajo tiene aplicaciones en el diseño de curvas y superficies que requieren precisión en la forma y suavidad, como en gráficos por computadora y CAD.

- Propiedades de equivalencia de suavidad de esquemas generales de subdivisión para datos con valores en variedades: Gang Xie, Thomas P.-Y. Yu, [67], 2009.

  Este trabajo examina las propiedades de suavidad de los esquemas de subdivisión aplicados a datos con valores en variedades (manifolds). Los autores investigan cómo los esquemas de subdivisión pueden generar funciones suaves cuando los datos residen en espacios no Euclidianos, como las variedades. Este enfoque es útil en aplicaciones como la robótica, gráficos por computadora y análisis de datos geométricos, donde los datos pueden estar restringidos a variedades específicas.

- Subdivisión no lineal a través de medias no lineales: Scott Schaefer, Etienne Vouga, Ron Goldman, [62], 2008.

  Este artículo introduce un esquema de subdivisión no lineal basado en el uso de promedios no lineales. En lugar de utilizar métodos de interpolación lineal tradicionales, los autores desarrollan un enfoque en el que los puntos de control se actualizan mediante una técnica de promediado no lineal, lo que permite obtener subdivisiones más precisas y adaptativas en el diseño de curvas y superficies. Este método tiene aplicaciones en el modelado geométrico y el diseño de formas complejas.

- Análisis de suavidad de esquemas de subdivisión en retículas regulares mediante proximidad: Philipp Grohs, [37], 2008.

  Este artículo analiza la suavidad de los esquemas de subdivisión aplicados a datos en redes regulares utilizando una técnica basada en la proximidad. Grohs presenta un enfoque teórico que garantiza que los esquemas de subdivisión conserven la suavidad al aplicarse iterativamente sobre mallas regulares, lo que es crucial para el refinamiento de curvas y superficies en gráficos por computadora y simulaciones numéricas.

- Propiedades de equivalencia de suavidad de esquemas de subdivisión para datos con valores en variedades basados en el enfoque de proyección: Gang Xie, Thomas P.-Y. Yu, [66], 2007.

  Este trabajo investiga las propiedades de suavidad de los esquemas de subdivisión aplicados a datos con valores en variedades (manifolds) utilizando el enfoque de proyección. Los autores demuestran que ciertos esquemas de subdivisión mantienen la suavidad cuando se aplican a datos en espacios geométricos no euclidianos, como las variedades. Este estudio tiene aplicaciones en gráficos por computadora y simulaciones que involucran datos geométricos complejos.

- Tres familias de esquemas de subdivisión no lineales: Nira Dyn, [28], 2006.

  Este artículo analiza tres familias de esquemas de subdivisión no lineales. Estos esquemas permiten la generación de curvas y superficies suaves a partir de puntos de control de manera adaptativa. La investigación se centra en cómo las diferentes configuraciones de los esquemas pueden influir en la suavidad y estabilidad de las funciones generadas, proporcionando herramientas útiles para el diseño geométrico y las aplicaciones de simulación que requieren precisión en la forma.

- ¿Cuán dependiente de los datos es un esquema de subdivisión no lineal? Un estudio de caso basado en la preservación de convexidad: Thomas Pok-Yin Yu, [72], 2006.

  Este artículo examina la dependencia de los esquemas de subdivisión no lineales en los datos iniciales, utilizando como caso de estudio un esquema que preserva la convexidad. El autor analiza cómo las propiedades de los datos iniciales pueden afectar la convergencia y suavidad del esquema, ofreciendo una comprensión profunda de la influencia de las condiciones iniciales en la calidad de los resultados obtenidos mediante subdivisión no lineal.

- Análisis de suavidad de esquemas de subdivisión mediante proximidad: Johannes Wallner, [63], 2006.

  Este trabajo proporciona un análisis detallado de la suavidad de los esquemas de subdivisión mediante el concepto de proximidad. Wallner desarrolla una metodología matemática para medir la suavidad de las funciones generadas por esquemas de subdivisión en relación con su proximidad a funciones suaves conocidas, lo que es relevante para garantizar la calidad de las curvas y superficies generadas en gráficos por computadora y simulaciones geométricas.

- Suavidad de la subdivisión no lineal por interpolación de la mediana: Peter Oswald, [58], 2004.

  Se presenta un análisis refinado de la regularidad de Hölder para las funciones límite que surgen de un algoritmo piramidal no lineal para la eliminación robusta del ruido no gaussiano propuesto por Donoho y Yu [6,7,17]. La parte de síntesis de este algoritmo se puede interpretar como un esquema de subdivisión tríada no lineal donde se insertan nuevos puntos basándose en la interpolación e imputación de la mediana polinómica cuadrática local. Introducimos la analogía del esquema Donoho-Yu para el refinamiento diádico.

- Esquemas de subdivisión quasi lineales con aplicación a la interpolación ENO: Albert Cohen, Nira Dyn, Basarab Matei, [19], 2003.

  Se analiza la convergencia y suavidad de cierta clase de esquemas de subdivisión no lineales. Se estudia las propiedades de estabilidad de estos esquemas y aplicamos este análisis a la clase específica basada en técnicas de interpolación ENO y ENO ponderada. Nuestro interés en estas técnicas está motivado por su aplicación al procesamiento de señales e imágenes.

Los trabajos [26, 30, 37, 40, 63, 69] articulan el puente entre no lineal y lineal mediante proximidad diferencial; [34] proporciona una vía independiente basada en invariancia geométrica y rectificación. En dominios no euclidianos ([33, 38, 48, 56, 66, 67]) la convergencia se asienta en contracciones y en el control de la geometría; [64] extiende a mallas irregulares. Las familias con medias no lineales o selecciones del esténcil tipo ENO ([19, 32, 36, 44, 58, 62]) se basan en contracciones de esquemas para las diferencias; [39] conecta estabilidad con orden de aproximación. Las revisiones [29, 61] identifican huecos y preguntas abiertas sobre optimalidad y robustez.

Tabla 5: Comparativa cruzada de referencias: ámbito, objetivo principal y herramienta analítica dominante.

Referencia	**Ámbito de datos**	**Objetivo principal**	**Herramienta analítica dominante**
Ewald–Reif–Sabin [34]	$\mathbb{R}^d$ (geométrico, GLUE)	$C^{1,\alpha}/C^{2,\alpha}$ y rectificación	Distorsión relativa, invariancia a similitudes
Duchamp–Xie–Yu [26]	No lineal vs. lineal	Equivalencia de suavidad C^k	Proximidad diferencial al esquema lineal
Hüning–Wallner [48]	Esfera	Convergencia/estabilidad	Geometría esférica, contracciones
Moosmüller [56]	Variedades (Hermite)	C^1	Análisis Hermite en variedades
Ebner [33]	Espacios métricos	Convergencia	Contracciones en métricas
Xie–Yu [69]	No lineal vs. lineal	Invariancia de proximidad	Proximidad e invariancias
Xie–Yu [68]	Variedades	Orden de aproximación (equivalencia)	Transferencia de orden a variedades
Matei–Meignen–Zakharova [55]	No separable	Regularidad	Estimaciones multivariadas no separables
Amat–Dadourian–Liandrat [2]	Señal/imagen	Convergencia/estabilidad multirresolución	Análisis de transformaciones asociadas
Grohs [39]	General	Orden desde estabilidad	Estabilidad ⇒ orden
Weinmann [64]	Malla irregular	Convergencia/estabilidad	Condiciones estructurales en mallas
Harizanov–Oswald [44]	Multiescala	Estabilidad	Análisis multiescala no lineal
Grohs [40]	General	Proximidad (marco general)	Proximidad/transferencia de suavidad
Dyn–Grohs–Wallner [30]	General	Orden de aproximación	Proximidad y estimaciones de error
Dyn–Oswald [32]	Univar., no lineal	Multiescala y estabilidad	Marco multiescala no lineal
Dyn [29]	Revisión	Estado del arte	Síntesis crítica
Sabin [61]	Revisión breve	Preguntas abiertas	Problemas de convergencia/regularidad
Grohs [38]	Grupos de Lie	Suavidad interpolatoria	Geometría de grupos de Lie
Goldman–Vouga–Schaefer [36]	Medias no lineales	Suavidad de funciones reales	Promedios no lineales y suavidad
Costantini–Manni [21]	Hermite con restricciones	Suavidad bajo restricciones	Análisis con restricciones
Xie–Yu [67]	Variedades	Equivalencia de suavidad	Proximidad en variedades
Schaefer–Vouga–Goldman [62]	Medias no lineales	Subdivisión no lineal	Estructuras de promedio no lineal
Grohs [37]	Retículas regulares	Suavidad vía proximidad	Proximidad en mallas regulares
Xie–Yu [66]	Variedades (proyección)	Suavidad por proyección	Enfoques de proyección
Dyn [28]	Tres familias NL	Clasificación	Taxonomía de familias NL
Yu [72]	Dependencia de datos	Preservación de convexidad	Sensibilidad a datos iniciales
Wallner [63]	General	Suavidad vía proximidad	Marco de proximidad
Oswald [58]	Mediana no lineal	Regularidad Hölder	Análisis del esquema Donoho–Yu
Cohen–Dyn–Matei [19]	Quasi lineal / ENO	Conv./suavidad ENO/WENO	Estabilidad + proximidad en ENO

7. Conclusiones

Los esquemas de subdivisión no lineales representan una extensión poderosa de los métodos lineales tradicionales, ofreciendo flexibilidad y capacidad de adaptación en una amplia gama de aplicaciones, especialmente en el manejo de datos irregulares y la preservación de características geométricas. Su aplicación en variedades, la mitigación de oscilaciones de Gibbs y la preservación de formas geométricas como círculos y esferas demuestra su versatilidad y eficacia en situaciones donde los enfoques lineales no son suficientes.

Del análisis comparado se desprende una clasificación natural de los trabajos:

1. **Geométricos**: centrados en la preservación de formas e invariancias (círculos, esferas).
2. **Adaptativos**: diseñados para manejar irregularidades o discontinuidades.
3. **Multiescala**: conectados a ondículas y compresión en múltiples resoluciones.
4. **Teóricos**: orientados al estudio de convergencia, estabilidad y regularidad.

Esta taxonomía permite visualizar la evolución del campo y resaltar vacíos actuales.

La selección bibliográfica responde a dos criterios principales: (i) representatividad de los métodos más influyentes en cada línea de investigación que cubren las diferentes áreas de interés en el contexto de esquemas de subdivisión, y (ii) diversidad en cuanto a las aplicaciones que se consideran (modelado geométrico, procesamiento de imágenes, aproximación).

Existen trabajos de revisión de esquemas no lineales previos pero no hemos encontrado ninguno que sea tan global como la presente revisión. Introducimos las cuatro aportaciones que hemos encontrado y que pueden considerarse revisiones parciales. En [29], Dyn nos presenta una panorámica sobre los esquemas de subdivisión en modelado geométrico, distinguiendo entre los enfoques lineales y no lineales, revisando la teoría clásica (convergencia, suavidad y orden de aproximación) y destacando cómo los esquemas no lineales permiten preservar propiedades geométricas como positividad, monotonía o convexidad. Por su parte, Dyn y Oswald [32] estudian el caso univariante en relación con las transformaciones multiescala, extendiendo herramientas lineales al marco no lineal y analizando estabilidad, contracción y orden de aproximación en contextos adaptativos. Micchelli [35] investiga los esquemas estacionarios no lineales, estableciendo un marco matemático para su convergencia y regularidad, con aplicaciones a problemas de interpolación y aproximación geométrica. Finalmente, Aràndiga y Donat [12] desarrollan el enfoque de Harten para descomposiciones multiescala no lineales, mostrando cómo éstas permiten representaciones estables y adaptativas en el análisis numérico de ecuaciones hiperbólicas y en el procesamiento de señales.

Aunque se han hecho avances importantes en el desarrollo y aplicación de estos esquemas, el análisis de los esquemas no lineales sigue siendo un desafío debido a su complejidad matemática.

Aún queda mucho por explorar en términos de eficiencia computacional y aplicaciones en datos de mayor dimensión.

Entre las líneas abiertas de investigación podríamos destacar:

- Extender los esquemas a contextos de datos no euclidianos más complejos (grafos, redes neuronales geométricas).
- Integrar preservación geométrica y adaptación a discontinuidades en un marco único.
- Explorar implementaciones paralelas y en GPU para aplicaciones en tiempo real en gráficos por computadora.
- Profundizar en aplicaciones de multirresolución no lineal en la resolución numérica de EDPs de interés físico.
- Desarrollar criterios automáticos de selección de parámetros (ej. tensión, pesos adaptativos) guiados por aprendizaje automático.

Referencias

[1] S. Amat, A. Choutri, J. Ruiz, y S. Zouaoui, "On a nonlinear 4-point ternary and non-interpolatory subdivision scheme eliminating the Gibbs phenomenon," *Appl. Math. Comput.*, vol. 320, pp. 16–26, 2018, doi: 10.1016/j.amc.2017.08.055.

[2] S. Amat, K. Dadourian, y J. Liandrat, "Analysis of a class of nonlinear subdivision schemes and associated multiresolution transforms," *Adv. Comput. Math.*, vol. 34, no. 3, pp. 253–277, 2011, doi: 10.1007/s10444-010-9151-6.

[3] S. Amat, K. Dadourian, J. Liandrat, J. Ruiz, y J. C. Trillo, "A family of stable nonlinear nonseparable multiresolution schemes in 2D," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 234, no. 4, pp. 1277–1290, 2010, doi: 10.1016/j.cam.2009.10.003.

[4] S. Amat y J. Liandrat, "On a nonlinear 4-point quaternary approximating subdivision scheme eliminating the Gibbs phenomenon," *SeMA J.*, vol. 62, pp. 15–25, 2013, doi: 10.1007/s40324-013-0006-1.

[5] S. Amat, F. Aràndiga, A. Cohen, R. Donat, G. Garcia, y M. von Oehsen, "Data compression with ENO schemes: a case study," *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 11, no. 2, pp. 273–288, 2001, doi: 10.1006/acha.2001.0356.

[6] S. Amat, F. Aràndiga, A. Cohen, y R. Donat, "Tensor product multiresolution analysis with error control for compact image representation," *Signal Processing*, vol. 82, no. 4, pp. 587–608, 2002, doi: 10.1016/S0165-1684(01)00206-7.

[7] S. Amat, S. Busquier, y J. C. Trillo, "On multiresolution schemes using a stencil selection procedure: applications to ENO schemes," *Numer. Algorithms*, vol. 44, no. 1, pp. 45–68, 2007, doi: 10.1007/s11075-007-9083-5.

[8] S. Amat, R. Donat, J. Liandrat, y J. C. Trillo, "Analysis of a new nonlinear subdivision scheme. Applications in image processing," *Found. Comput. Math.*, vol. 6, no. 2, pp. 193–225, 2006, doi: 10.1007/s10208-004-0122-5.

[9] S. Amat, J. Liandrat, J. Ruiz, y J. C. Trillo, "On a nonlinear cell-average multiresolution scheme for image compression," *SeMA J.*, no. 60, pp. 75–92, 2012, doi: 10.1007/bf03391711.

[10] S. Amat, J. Ruiz, J. C. Trillo, y D. F. Yáñez, "On a stable family of four-point nonlinear subdivision schemes eliminating the Gibbs phenomenon," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 354, pp. 310–325, 2019, doi: 10.1016/j.cam.2018.04.058.

[11] S. Amat, J. Ruiz, J. C. Trillo, y D. F. Yáñez, "On a family of non-oscillatory subdivision schemes having regularity C^r with $r > 1$," *Numer. Algorithms*, vol. 85, no. 2, pp. 543–569, 2020, doi: 10.1007/s11075-019-00826-3.

[12] F. Aràndiga y R. Donat, "Nonlinear multiscale decompositions: the approach of A. Harten," *Numer. Algorithms*, vol. 23, no. 2-3, pp. 175–216, 2000.

[13] F. Aràndiga, R. Donat, y M. Santágueda, "Weighted-power$_p$ nonlinear subdivision schemes," in *Curves and Surfaces.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012, pp. 109–129, doi: 10.1007/978-3-642-27413-8_7.

[14] M. Aslam, "$(2n-1)$-point nonlinear ternary interpolating subdivision schemes," *Int. J. Appl. Math.*, vol. 31, no. 3, pp. 413–425, 2018, doi: 10.12732/ijam.v31i3.9.

[15] M. Aslam, "A family of 5-point nonlinear ternary interpolating subdivision schemes with C^2 smoothness," *Math. Comput. Appl.*, vol. 23, no. 2, 2018, Art. ID 18, doi: 10.3390/mca23020018.

[16] R. Bürger, R. Ruiz, K. Schneider, y M. Sepúlveda, "Fully adaptive multiresolution schemes for strongly degenerate parabolic equations in one space dimension," *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, vol. 42, no. 4, pp. 535–563, 2008, doi: 10.1051/m2an:2008016.

[17] P. Chalmovianský y B. Jüttler, "A non-linear circle-preserving subdivision scheme," *Adv. Comput. Math.*, vol. 27, no. 4, pp. 375–400, 2007, doi: 10.1007/s10444-005-9011-y.

[18] F. Cirak y Q. Long, "Subdivision shells with exact boundary control and non-manifold geometry," *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 88, no. 9, pp. 897–923, 2011, doi: 10.1002/nme.3206.

[19] A. Cohen, N. Dyn, y B. Matei, "Quasilinear subdivision schemes with applications to ENO interpolation," *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 15, no. 2, pp. 89–116, 2003, doi: 10.1016/S1063-5203(03)00061-7.

[20] F. Coquel, M. Postel, N. Poussineau, y Q. H. Tran, "Multiresolution technique and explicit-implicit scheme for multicomponent flows," *J. Numer. Math.*, vol. 14, no. 3, pp. 187–216, 2006, doi: 10.1163/156939506778658294.

[21] P. Costantini y C. Manni, "On constrained nonlinear Hermite subdivision," *Constr. Approx.*, vol. 28, no. 3, pp. 291–331, 2008, doi: 10.1007/s00365-007-9001-z.

[22] M. Cotronei, C. Moosmüller, T. Sauer, y N. Sissouno, "Hermite multiwavelets for manifold-valued data," *Adv. Comput. Math.*, vol. 49, no. 3, 2023, Art. ID 40.

[23] C. de Boor, "Preserving geometric features in nonlinear subdivision," *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 34, no. 5, pp. 1605–1622, 1997.

[24] R. A. DeVore y A. Kunoth, Eds., *Multiscale, nonlinear and adaptive approximation.* Springer-Verlag, Berlin, 2009, doi: 10.1007/978-3-642-03413-8.

[25] R. Donat, S. López-Ureña, y M. Santágueda, "A family of non-oscillatory 6-point interpolatory subdivision schemes," *Adv. Comput. Math.*, vol. 43, no. 4, pp. 849–883, 2017, doi: 10.1007/s10444-016-9509-5.

[26] T. Duchamp, G. Xie, y T. Yu, "Single basepoint subdivision schemes for manifold-valued data: time-symmetry without space-symmetry," *Found. Comput. Math.*, vol. 13, no. 5, pp. 693–728, 2013, doi: 10.1007/s10208-013-9144-1.

[27] T. Duchamp, G. Xie, y T. Yu, "A necessary and sufficient proximity condition for smoothness equivalence of nonlinear subdivision schemes," *Found. Comput. Math.*, vol. 16, no. 5, pp. 1069–1114, 2016, doi: 10.1007/s10208-015-9268-6.

[28] N. Dyn, "Three families of nonlinear subdivision schemes," in *Topics in multivariate approximation and interpolation*, ser. Stud. Comput. Math. Elsevier B. V., Amsterdam, 2006, vol. 12, pp. 23–38, doi: 10.1016/S1570-579X(06)80003-0.

[29] N. Dyn, "Linear and nonlinear subdivision schemes in geometric modeling," in *Foundations of computational mathematics, Hong Kong 2008*, ser. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009, vol. 363, pp. 68–92.

[30] N. Dyn, P. Grohs, y J. Wallner, "Approximation order of interpolatory nonlinear subdivision schemes," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 233, no. 7, pp. 1697–1703, 2010.

[31] N. Dyn, D. Levin, y M. S. Floater, "Nonlinear subdivision schemes and their applications," in *Geometric Modeling and Computing.* Springer, 2002, pp. 1–24.

[32] N. Dyn y P. Oswald, "Univariate subdivision and multi-scale transforms: the nonlinear case," in *Multiscale, nonlinear and adaptive approximation.* Springer, Berlin, 2009, pp. 203–247, doi: 10.1007/978-3-642-03413-8_7.

[33] O. Ebner, "Convergence of refinement schemes on metric spaces," *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 141, no. 2, pp. 677–686, 2013, doi: 10.1090/S0002-9939-2012-11331-0.

[34] T. Ewald, U. Reif, y M. Sabin, "Hölder regularity of geometric subdivision schemes," *Constr. Approx.*, vol. 42, no. 3, pp. 425–458, 2015, doi: 10.1007/s00365-015-9305-3.

[35] M. S. Floater y C. A. Micchelli, "Nonlinear stationary subdivision," in *Approximation Theory.* CRC Press, Taylor & Francis, 1998, p. 209, doi: 10.1201/9781003064732-14.

[36] R. Goldman, E. Vouga, y S. Schaefer, "On the smoothness of real-valued functions generated by subdivision schemes using nonlinear binary averaging," *Comput. Aided Geom. Design*, vol. 26, no. 2, pp. 231–242, 2009, doi: 10.1016/j.cagd.2008.04.004.

[37] P. Grohs, "Smoothness analysis of subdivision schemes on regular grids by proximity," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 46, no. 4, pp. 2169–2182, 2008, doi: 10.1137/060669759.

[38] P. Grohs, "Smoothness equivalence properties of univariate subdivision schemes and their projection analogues," *Numer. Math.*, vol. 113, no. 2, pp. 163–180, 2009, doi: 10.1007/s00211-009-0231-9.

[39] P. Grohs, "Approximation order from stability for nonlinear subdivision schemes," *J. Approx. Theory*, vol. 162, no. 5, pp. 1085–1094, 2010, doi: 10.1016/j.jat.2009.12.003.

[40] P. Grohs, "A general proximity analysis of nonlinear subdivision schemes," *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 42, no. 2, pp. 729–750, 2010, doi: 10.1137/09075963X.

[41] P. Grohs y J. Wallner, "Log-exponential analogues of univariate subdivision schemes in Lie groups and their smoothness properties," in *Approximation theory XII: San Antonio 2007*, ser. Mod. Methods Math. Nashboro Press, Brentwood, TN, 2008, pp. 181–190.

[42] P. Grohs y J. Wallner, "Interpolatory wavelets for manifold-valued data," *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 27, no. 3, pp. 325–333, 2009, doi: 10.1016/j.acha.2009.05.005.

[43] A. Guessab, M. Moncayo, y G. Schmeisser, "A class of nonlinear four-point subdivision schemes," *Adv. Comput. Math.*, vol. 37, no. 2, pp. 151–190, 2012, doi: 10.1007/s10444-011-9199-y.

[44] S. Harizanov y P. Oswald, "Stability of nonlinear subdivision and multiscale transforms," *Constr. Approx.*, vol. 31, no. 3, pp. 359–393, 2010, doi: 10.1007/s00365-010-9082-y.

[45] A. Harten, "Discrete multi-resolution analysis and generalized wavelets," 1993, vol. 12, no. 1-3, pp. 153–192, doi: 10.1016/0168-9274(93)90117-A.

[46] A. Harten, "Multiresolution representation of data: a general framework," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 33, no. 3, pp. 1205–1256, 1996, doi: 10.1137/0733060.

[47] V. Hernández-Mederos, J. C. Estrada-Sarlabous, S. R. Morales, e I. Ivrissimtzis, "Curve subdivision with arc-length control," *Computing*, vol. 86, no. 2-3, pp. 151–169, 2009, doi: 10.1007/s00607-009-0068-1.

[48] S. Hüning y J. Wallner, "Convergence analysis of subdivision processes on the sphere," *IMA J. Numer. Anal.*, vol. 42, no. 1, pp. 698–711, 2022, doi: 10.1093/imanum/draa086.

[49] M. K. Jena, "A Hermite interpolatory subdivision scheme constructed from quadratic rational Bernstein-Bezier spline," *Math. Comput. Simulation*, vol. 187, pp. 433–448, 2021.

[50] L. Kobbelt, "Interpolatory subdivision on open quadrilateral nets with arbitrary topology," *Comp. Graph. Forum*, vol. 15, no. 3, pp. 409–420, 1996, doi: 10.1111/1467-8659.1530409.

[51] Z. Kui, J. Baccou, y J. Liandrat, "On the coupling of decimation operator with subdivision schemes for multi-scale analysis," in *Mathematical methods for curves and surfaces*, ser. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Cham, 2017, vol. 10521, pp. 162–185, doi: 10.1007/978-3-319-67885-6_9.

[52] J.-a. Lian, "A new four point circular-invariant corner-cutting subdivision for curve design," *Appl. Appl. Math.*, vol. 7, no. 1, pp. 464–486, 2012.

[53] J.-a. Lian, Y. Wang, y Y. Yang, "Circular nonlinear subdivision schemes for curve design," *Appl. Appl. Math.*, vol. 4, no. 1, pp. 1–12, 2009.

[54] S. Marschner, "Manifold-based methods in geometric modeling," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 17, no. 2, pp. 149–160, 1998, doi: 10.1145/274279.274282.

[55] B. Matei, S. Meignen, y A. Zakharova, "Smoothness of non-linear and non-separable subdivision schemes," *Asymptot. Anal.*, vol. 74, no. 3-4, pp. 229–247, 2011.

[56] C. Moosmüller, "C^1 analysis of Hermite subdivision schemes on manifolds," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 54, no. 5, pp. 3003–3031, 2016, doi: 10.1137/15M1033459.

[57] E. Nava-Yazdani y T. P. Y. Yu, "On Donoho's log-exp subdivision scheme: choice of retraction and time-symmetry," *Multiscale Model. Simul.*, vol. 9, no. 4, pp. 1801–1828, 2011, doi: 10.1137/100804838.

[58] P. Oswald, "Smoothness of nonlinear median-interpolation subdivision," *Adv. Comput. Math.*, vol. 20, no. 4, pp. 401–423, 2004, doi: 10.1023/A:1027315032100.

[59] P. Oswald, "Nonlinear multi-scale transforms: L_p theory," *J. Franklin Inst.*, vol. 349, no. 5, pp. 1619–1636, 2012, doi: 10.1016/j.jfranklin.2011.06.006.

[60] U. Reif y A. Weinmann, "Clothoid fitting and geometric Hermite subdivision," *Adv. Comput. Math.*, vol. 47, no. 4, 2021, Art. ID 50, doi: 10.1007/s10444-021-09876-5.

[61] M. Sabin, "Two open questions relating to subdivision," *Computing*, vol. 86, no. 2-3, pp. 213–217, 2009, doi: 10.1007/s00607-009-0059-2.

[62] S. Schaefer, E. Vouga, y R. Goldman, "Nonlinear subdivision through nonlinear averaging," *Comput. Aided Geom. Design*, vol. 25, no. 3, pp. 162–180, 2008, doi: 10.1016/j.cagd.2007.07.003.

[63] J. Wallner, "Smoothness analysis of subdivision schemes by proximity," *Constr. Approx.*, vol. 24, no. 3, pp. 289–318, 2006, doi: 10.1007/s00365-006-0638-3.

[64] A. Weinmann, "Nonlinear subdivision schemes on irregular meshes," *Constr. Approx.*, vol. 31, no. 3, pp. 395–415, 2010, doi: 10.1007/s00365-009-9063-1.

[65] A. Weinmann, "Subdivision schemes with general dilation in the geometric and nonlinear setting," *J. Approx. Theory*, vol. 164, no. 1, pp. 105–137, 2012, doi: 10.1016/j.jat.2011.09.005.

[66] G. Xie y T. P.-Y. Yu, "Smoothness equivalence properties of manifold-valued data subdivision schemes based on the projection approach," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 45, no. 3, pp. 1200–1225, 2007, doi: 10.1137/060652944.

[67] G. Xie y T. P.-Y. Yu, "Smoothness equivalence properties of general manifold-valued data subdivision schemes," *Multiscale Model. Simul.*, vol. 7, no. 3, pp. 1073–1100, 2008, doi: 10.1137/080718723.

[68] G. Xie y T. P.-Y. Yu, "Approximation order equivalence properties of manifold-valued data subdivision schemes," *IMA J. Numer. Anal.*, vol. 32, no. 2, pp. 687–700, 2012, doi: 10.1093/imanum/drq046.

[69] G. Xie y T. P. Y. Yu, "Invariance property of proximity conditions in nonlinear subdivision," *J. Approx. Theory*, vol. 164, no. 8, pp. 1097–1110, 2012, doi: 10.1016/j.jat.2012.05.001.

[70] X. Yang, "Normal based subdivision scheme for curve design," *Comput. Aided Geom. Design*, vol. 23, no. 3, pp. 243–260, 2006, doi: 10.1016/j.cagd.2005.10.001.

[71] X. Yang, "Point-normal subdivision curves and surfaces," *Comput. Aided Geom. Design*, vol. 104, 2023, Art. ID 102207, doi: 10.1016/j.cagd.2023.102207.

[72] T. P.-Y. Yu, "How data dependent is a nonlinear subdivision scheme? A case study based on convexity preserving subdivision," *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 44, no. 3, pp. 936–948, 2006, doi: 10.1137/050628751.

[73] Z. Zhang, H. Zheng, J. Zhou, y L. Pan, "A nonlinear generalized subdivision scheme of arbitrary degree with a tension parameter," *Adv. Difference Equ.*, 2020, Art. ID 655, doi: 10.1186/s13662-020-03118-6.