CUBO, A Mathematical Journal
Vol. 27, no. 2, pp. 505–522, Agosto 2025
DOI: 10.56754/0719-0646.2702.505

COMPENDIO

# Estabilidad espectral y resonancias para perturbaciones de rango finito y singulares

M. Angélica Astaburuaga[1]
Víctor H. Cortés[1,✉]
Claudio Fernández[1]
Rafael Del Río[2]

[1] *Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile.*
mastabur@uc.cl
vcortes@uc.cl✉
cfernand@mat.uc.cl

[2] *IIMAS, Universidad Nacional Autónoma de México, México.*
delriomagia@gmail.com

**RESUMEN**

En estas notas resumimos una serie de artículos dedicados a perturbaciones de operadores de variadas clases, entre ellos operadores diferenciales. En dichos artículos se estudian propiedades espectrales, con énfasis en la estabilidad de los valores propios y la ausencia de cierto espectro singular. Estas perturbaciones son de diferente naturaleza, incluyendo rango finito y el caso singular.
También se caracteriza y demuestra el fenómeno de resonancia desde el punto de vista dinámico, es decir, la existencia de estados que tienen larga vida y para los cuales la amplitud de sobrevivencia tiene un comportamiento casi exponencial. Además se incluye una discusión de acerca de varios problemas abiertos en el área.

**Palabras clave:** Resonancias, estabilidad espectral, perturbaciones de rango finito.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 81Q10, 47A35, 47B47.

Publicado: 30 de octubre de 2025
Aceptado: 17 de septiembre de 2025
Recibido: 30 de noviembre de 2024

CUBO, A Mathematical Journal
Vol. 27, no. 2, pp. 505–522, August 2025
DOI: 10.56754/0719-0646.2702.505

SURVEY

# Spectral stability and resonances for finite rank and singular perturbations

M. Angélica Astaburuaga[1]
Víctor H. Cortés[1,✉]
Claudio Fernández[1]
Rafael Del Río[2]

[1] *Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile.*
mastabur@uc.cl
vcortes@uc.cl✉
cfernand@mat.uc.cl

[2] *IIMAS, Universidad Nacional Autónoma de México, México.*
delriomagia@gmail.com

**ABSTRACT**

In these notes, we summarize a series of papers devoted to perturbations of operators of several classes, among them differential operators. The articles mentioned before, study spectral properties, with special emphasis on the stability of the eigenvalues and the absence of a certain singular spectrum. These perturbations are of a different nature, including finite rank and the singular case.
We also characterize and prove the resonance phenomenon from a dynamical point of view, that is, the existence of states with long life and for which the survival amplitude has an almost exponential behavior.
In addition, we include a discussion about several open problems in the area.

**Keywords and Phrases:** Resonances, spectral stability, finite rank perturbations.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 81Q10, 47A35, 47B47.

Published: 30 October, 2025
Accepted: 17 September, 2025
Received: 30 November, 2024

# 1. Introducción

Como un reconocimiento a su contribución, y en el marco del 40º aniversario de la revista Cubo, presentamos este artículo compendio de varios trabajos, principalmente de la última década.

La teoría espectral de operadores autoadjuntos es una parte esencial de la Física Matemática, particularmente de la Mecánica Cuántica. Muchas veces estos operadores surgen como perturbaciones pequeñas de un operador dado (el Hamiltoniano libre). En general, aquí consideramos perturbaciones de rango finito e incluimos casos regulares y casos singulares.

La naturaleza y estabilidad del espectro, en especial de sus componentes puntual, absolutamente continuo y singular, bajo pequeñas perturbaciones, ha sido objeto de intensas investigaciones, tanto por su conexión con la estabilidad de sistemas físicos cuánticos como por sus implicaciones en el análisis de fenómenos de resonancia cuántica.

En este artículo, revisamos diversos resultados obtenidos en trabajos previos que analizan las propiedades espectrales de operadores de este tipo. Estos estudios han demostrado que, aunque la perturbación de un operador con espectro exento de parte singular genera cambios en el espectro, los efectos de estas perturbaciones suelen estar relacionados con la aparición de resonancias y variaciones en las frecuencias de los modos espectrales del sistema. En particular, se han identificado condiciones bajo las cuales las perturbaciones de rango finito modifican el espectro del operador base, pero sin introducir nuevas singularidades en el espectro resultante.

Además, discutimos la conexión entre estas propiedades espectrales y una formulación dinámica del fenómeno de resonancia cuántica, en la cual se exploran las interacciones entre los operadores perturbados y los estados del sistema cuántico, y cómo estas interacciones pueden llevar a la aparición de picos resonantes en el espectro, los que se traducen en un comportamiento exponencial aproximado de la llamada amplitud de probabilidad. Las resonancias cuánticas juegan un papel fundamental en la descripción de procesos de transición entre estados cuánticos, lo que tiene aplicaciones en el estudio de sistemas dinámicos y en la predicción del comportamiento del sistema a largo plazo.

En el transcurso de este compendio, abordaremos tanto los resultados teóricos más relevantes como los métodos matemáticos empleados para el análisis espectral de estos operadores, con el objetivo de ofrecer una visión integral de cómo las perturbaciones de rango finito influyen en la estructura espectral y, a su vez, cómo esta influencia se relaciona con el comportamiento dinámico de sistemas cuánticos en resonancia.

## 1.1. Valores propios inmersos

Este artículo se sitúa dentro del marco de la teoría espectral, parte central del análisis funcional. El espectro de un operador describe los valores asociados con el comportamiento de este operador y tiene una influencia importante en muchas áreas de las matemáticas y la física.

La “perturbación” en este contexto se refiere a una pequeña modificación del operador, es decir, un cambio que se puede considerar de “tamaño pequeño”. La idea general consiste en determinar cómo los valores propios (o el espectro en general) de un operador cambian cuando el operador es alterado de esta manera. Esto involucra conceptos como la variación de los valores propios, los efectos en la estructura espectral, y las condiciones bajo las cuales un espectro se desplaza o se distorsiona de manera controlable.

Algunos de los resultados que siguen están motivados por el artículo [10] donde se desarrolla una serie de ideas acerca de cómo un pequeño cambio en un operador afecta su espectro puntual y su espectro continuo, además de demostrar la existencia de subespacios en los cuales el operador no tiene componente singular. Dicho artículo está relacionado con la teoría de Weyl acerca de perturbaciones de espectros.

Además del estudio de la estabilidad de las componentes del espectro, también se consideran situaciones en las que una pequeña perturbación hace desaparecer un autovalor del operador no perturbado. Específicamente cuando dicho autovalor esté inmerso en espectro continuo, aún cuando también es interesante la situación en que sea aislado.

Al desaparecer, el valor propio se transforma en realidad en una resonancia, que es una especie de valor propio generalizado. Este tema ha sido objeto de muchas investigaciones en las últimas décadas, mencionamos por ejemplo [11] y la referencias que allí aparecen.

## 1.2. Introducción al fenómeno de resonancia

El fenómeno de resonancia aparece en varias áreas de la física y las matemáticas como la Mecánica Clásica, Cuántica y Ondulatoria. Se han hecho varios intentos para darle una descripción matemática precisa. Nos remitimos a [17] para una discusión sobre las dificultades que surgen al caracterizar rigurosamente el concepto de resonancia para sistemas autónomos en Mecánica Cuántica.

Uno de los enfoques más fructíferos consiste en definir las resonancias cuánticas como polos de una continuación meromorfa adecuada de la resolvente del hamiltoniano, desde el semiplano complejo superior hasta el semiplano inferior. Cada polo aparece como un “valor propio” con parte imaginaria negativa, correspondiente a funciones propias generalizadas fuera del espacio de Hilbert. Existe una gran cantidad de literatura sobre este tema y remitimos al lector al texto [11] y las referencias que allí aparecen.

Las resonancias también se pueden caracterizar en términos de un decaimiento exponencial de la evolución temporal del sistema gobernado por el hamiltoniano (definido como un operador autoadjunto en algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$). Este comportamiento se puede rastrear mediante la probabilidad de supervivencia $P_\varphi$ para algunos estados adecuados $\varphi$. Esta cantidad, definida por

$$P_\varphi(t) = |\langle \varphi, e^{-iHt}\varphi\rangle|^2\,,$$

mide la probabilidad de encontrar en el instante $t$ el sistema gobernado por el hamiltoniano $H$ en su estado inicial $\varphi$. Por un lado, sabemos que el decrecimiento exponencial exacto es imposible para muchos modelos de interés físico; ver [17]. Por otro lado, si $z = \lambda - i\Gamma$ (con $\Gamma > 0$) es un polo de la resolvente del hamiltoniano $H$ con "función propia resonante" $\varphi$ (es decir, $H\varphi = z\varphi$), formalmente esperaríamos que,

$$P_\varphi(t) = e^{-2\Gamma t}\|\varphi\|^2\,,$$

lo cual es incorrecto puesto que la función propia resonante $\varphi$ no pertenece al espacio de Hilbert. Por lo tanto, en presencia de una resonancia $z$, lo mejor que se puede esperar es la existencia de un estado $\psi \in \mathcal{H}$ tal que la cantidad $\langle \psi, e^{-iHt}\psi\rangle$ se comporta aproximadamente como $e^{-izt}$. Ambas cantidades son iguales a 1 en $t = 0$ y en la mayoría de los casos de interés, ambas se acercan a cero cuando $t$ tiende a $\infty$. El objetivo principal es entonces estimar la diferencia,

$$\langle \psi, e^{-iHt}\psi\rangle \,-\, e^{-izt}\,,$$

para $t$ no cerca de 0 ni de $\infty$.

Para operadores diferenciales, sobre el semieje real, esta diferencia se puede estimar uniformemente en tiempo ([15]) o en norma $L^2$ ([6]), mediante técnicas EDO. En estos casos, la función $\psi$ es una función propia resonante truncada. Se han exhibido estimaciones puntuales cuando la resonancia aparece con la perturbación de un valor propio simple inestable incrustado en algún espectro continuo, ver [8] y [13] para una revisión. Los ingredientes principales son en este caso la reducción de Feshbach-Livsic y la regla de oro de Fermi. En [8], este enfoque en realidad se combina con algunas técnicas de conmutador positivo (teoría de Mourre) y las estimaciones se obtienen una vez que la función propia se localiza en energía.

La aplicación de Feshbach-Livsic para estudiar resonancias se remonta al menos a [12] y ha sido fuente de varios resultados en las últimas décadas en diferentes áreas.

Para la relación entre la evolución del tiempo (la perspectiva que abordamos en este artículo) y los polos de la resolvente en el contexto de la teoría analítica de la perturbación, mencionamos el trabajo [11] y las referencias contenidas en este último.

## 2. Perturbaciones de rango uno

En el artículo [7] se abordan resonancias generadas por perturbaciones de rango uno de operadores autoadjuntos con valores propios inmersos en el espectro continuo. La inestabilidad de estos valores propios se analiza y se exhibe una caída casi exponencial de los estados resonantes asociados.

Además mostramos cómo estos resultados pueden ser aplicados a los operadores de Sturm-Liouville.

Las herramientas principales son la teoría de Aronszajn-Donoghue para perturbaciones de rango uno, un proceso de reducción del operador resolvente basado en la fórmula de Feshbach-Livsic, la regla de oro de Fermi y un análisis cuidadoso de la transformada de Fourier de funciones cuasi-Lorentzianas. Estos resultados se pueden aplicar también para estimar explícitamente el correspondiente tiempo de estadía y los fenómenos de concentración espectral.

La reducción de Feshbach-Livsic se desarrolla en el contexto de operadores diferenciales en la semirecta, lo que permite obtener estimaciones puntuales cuando la resonancia aparece con la perturbación de un valor propio simple e inmerso en el espectro absolutamente continuo. Aunque varias de estas herramientas pueden adaptarse fácilmente a una clase bastante amplia de perturbaciones, en [7] se limita la discusión al caso de rango uno y se relacionan estos resultados con resultados clásicos en este campo [10, 18].

En la Sección 2 de dicho trabajo se establecen condiciones que aseguren que la transformada de Fourier de una función tipo Lorentz exhiba una caída de tiempo exponencial aproximada. La demostración de este hecho se basa en técnicas de análisis clásico, que siguen principalmente las ideas de [8]. Este resultado es de interés en sí mismo y establece que si una función real está cerca de

$$\frac{1}{\pi}\frac{a}{(\lambda-\lambda_0)^2+b^2}$$

entonces su Transformada de Fourier tiene un comportamiento casi exponencial.

Se consideran en particular, perturbaciones de rango uno de la forma

$$H_\kappa = H_0 + \kappa|\psi\rangle\langle\psi|\,,$$

donde $H_0$ tiene un valor propio simple incrustado en algún espectro absolutamente continuo. Mostramos cómo la inestabilidad del valor propio inmerso y las propiedades espectrales de los operadores $H_\kappa$ están relacionadas con los valores límite de la resolvente reducida de $H_0$ y la regla de oro de Fermi.

Lo anterior permite formalizar la existencia de una resonancia en términos de decaimiento casi exponencial, bajo hipótesis adecuadas sobre la resolvente reducida del operador $H_0$. La prueba combina el proceso de reducción de Feshbach-Livsic y la fórmula de Krein con el teorema que estima la Transformada de Fourier de una función cuasi-Lorentziana.

Como corolario, se deduce la concentración espectral de Kato y el comportamiento asintótico para el tiempo de estadía del estado propio correspondiente, en función del parámetro $\kappa$, bajo la evolución gobernada por $H_\kappa$ y para valores pequeños de $\kappa$. Finalmente, las propiedades de los valores límites de la resolvente reducida de $H_0$ en el eje real, se deducen de las propiedades de la medida espectral de $H_0$, cuando ésta tiene multiplicidad finita. Esta reformulación se resume en la estimación del comportamiento casi exponencial. Todos estos resultados se ilustran mediante un modelo de Sturm-Liouville. En contraste con [8], el punto de vista adoptado no requiere ninguna técnica de conmutador positivo.

## 3. Estimaciones para el tiempo de vida

En el artículo [1] se aborda el estudio de perturbaciones de rango uno aplicadas a operadores autoadjuntos. Se estima cómo estas perturbaciones afectan el tiempo de permanencia de un estado cuántico, especialmente cuando el operador perturbado tiene un valor propio simple incrustado en su espectro absolutamente continuo.

En ese trabajo se analiza cómo una perturbación de rango uno puede alterar significativamente el espectro de un operador autoadjunto, lo que incluye el cambio en la naturaleza de los valores propios incrustados en el espectro continuo. Se utiliza principalmente el Modelo de Friedrichs, en el que se perturba un operador absolutamente continuo en $L^2(\mathbb{R})$, por un operador de rango uno $|\psi\rangle\langle\psi|$. Para este modelo se estiman las propiedades del tiempo de permanencia bajo perturbaciones pequeñas.

Primero se revisa un resultado que caracteriza las pertubaciones de rango uno para las cuales el operador,

$$H_0 = M + c|\psi\rangle\langle\psi|$$

tiene exactamente un valor propio (simple) inmerso en el espectro continuo, con vector propio correspondiente $\varphi$. Aquí, $M$ es un operador absolutamente continuo y $c$ una constante adecuada.

Luego se perturba este operador nuevamente por un operador de rango uno y se proporciona una estimación explícita del tiempo de permanencia utilizando la teoría de perturbaciones y técnicas de deformación analítica.

Así, consideramos el operador

$$H_\epsilon = H_0 + \epsilon|\psi\rangle\langle\psi|$$

que para $\epsilon$ pequeño no tiene valores propios.

Se demuestra que en este caso el tiempo de permanencia en un vector $\varphi$ para pequeñas perturbaciones, es finito y que, bajo ciertas condiciones, es proporcional a $\epsilon^{-2}$, donde $\epsilon$ representa la magnitud de la perturbación.

En el caso en que $M$ sea el operador de multiplicación por $x$ en $L^2(\mathbb{R})$ y $\psi$ sea analítica en un sentido adecuado, podemos usar la técnica de traslación analítica para demostrar que el tiempo de vida,

$$\tau(\varphi) = \frac{1}{2\Gamma} + O\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

La cantidad $\frac{1}{2\Gamma}$ coincide con el término correspondiente de la regla de oro de Fermi,

$$2\epsilon^{-2} Im\langle\varphi, R_\epsilon(E_0)\varphi\rangle$$

donde $E_0$ es el valor propio y $R_\epsilon$ la resolvente reducida del operador $H_0$.

Existen numerosos trabajos (ver por ejemplo las referencias mencionadas en [1]) que describen resonancias mediante el análisis del comportamiento de la amplitud de supervivencia, es decir, la función $R(t) = \langle\varphi, e^{-iHt}\varphi\rangle$ que, en muchos casos, incluye leyes explícitas de decaimiento exponencial para esta cantidad.

## 4. Perturbaciones de rango finito

Los resultados contenidos en las dos secciones anteriores pueden ser extendidos al caso de perturbaciones de rango finito. Esta generalización no es inmediata, de hecho ya en el uso de la fórmula de Krein para expresar la resolvente perturbada en términos de la resolvente libre, aparece un término matricial, que obliga al uso de descomposiciones matriciales, lo que para rango uno se reduce a una función real.

Este tipo de resultados ha sido desarrollado ampliamente en el artículo [4]. Allí, se estudia el comportamiento del espectro del operador perturbado

$$H_{\boldsymbol{\beta}} = H_0 + \sum_{i=1}^{N} \beta_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|,$$

donde $\{\psi_1, \ldots, \psi_N\}$ es un conjunto de vectores ortonormales en $\mathcal{H}$ y $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_N)$, $\beta_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \ldots, N$.

Aquí, $H_0$ es un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Como en el caso de rango uno, para demostrar que una parte del operador es absolutamente continua es necesario imponer una especie de regla de oro, que se traduce en la positividad de una cantidad que involucra a la resolvente reducida.

El estudio se centra en dos aspectos principales: la identificación de subespacios en los que el operador perturbado $H_{\boldsymbol{\beta}}$ tiene un espectro absolutamente continuo, y su comportamiento resonante cuando el operador libre $H_0$ tiene un valor propio inmerso en el espectro absolutamente continuo.

Para ambos resultados se requiere además una serie de relaciones entre la resolvente del operador $H_{\boldsymbol{\beta}}$ y los subespacios,

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{\beta}} = \overline{\operatorname{span}\{R_{\boldsymbol{\beta}}(z)\psi_j : j = 1, \dots, N, \quad z \notin \mathbb{R}\}}\,.$$

Aquí, $R_\beta = (H_\beta - z)^{-1}$ es la resolvente del operador $H_\beta$, definida para $z$ un número complejo fuera de su espectro.

En el caso de una perturbación de rango uno, $\mathcal{M}$ es simplemente el subespacio cíclico asociado al operador $H_{\boldsymbol{\beta}}$ y al vector $\psi$.

Los resultados respectivos aparecen en [7] para el caso de rango uno y en [5] para el caso de rango finito y se basan en un estudio espectral detallado que se encuentra en [10].

La estrategia empleada depende también de una versión extendida de la fórmula de Krein. Para formular este principio, notamos que la perturbación de rango finito puede ser factorizada,

$$V_{\boldsymbol{\beta}} = \tau_{\boldsymbol{\beta}}^* \tau_{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^{N} \beta_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

donde $\tau_{\boldsymbol{\beta}} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^N$ está definido por

$$\tau_{\boldsymbol{\beta}}\phi = \begin{bmatrix} \sqrt{\beta_1}\langle\psi_1, \phi\rangle \\ \sqrt{\beta_2}\langle\psi_2, \phi\rangle \\ \vdots \\ \sqrt{\beta_N}\langle\psi_N, \phi\rangle \end{bmatrix}$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto interior en el espacio de Hilbert.

La fórmula de Krein ahora establece: sean $R_0(z)$ y $R_{\boldsymbol{\beta}}$ las resolventes de los operadores $H_0$ and $H_{\boldsymbol{\beta}}$ respectivamente. Entonces, para $\Im z > 0$,

$$R_{\boldsymbol{\beta}}(z) = R_0(z) - R_0(z)\,\tau_{\boldsymbol{\beta}}^*(1 + \tau_{\boldsymbol{\beta}} R_0(z) \tau_{\boldsymbol{\beta}}^*)^{-1} \tau_{\boldsymbol{\beta}} R_0(z)\,.$$

Notamos que $(1 + \tau_{\boldsymbol{\beta}} R_0(z)\tau_{\boldsymbol{\beta}}^*)$ es una matriz compleja invertible, a diferencia del caso de rango uno, en que esta cantidad es un escalar.

En relación con el comportamiento resonante, en este artículo se establece que, en caso que el operador no perturbado $H_0$ tenga un autovalor inmerso en el espectro absolutamente continuo, el operador perturbado $H_{\boldsymbol{\beta}}$ exhibe un comportamiento resonante. Específicamente, la cantidad

$$|\langle \varphi_0, e^{-iH_{\boldsymbol{\beta}}t}\varphi_0\rangle|^2$$

se comporta casi exponencialmente. Las herramientas utilizadas en la demostración de estos resultados son nuevamente una regla de oro y fórmulas adecuadas de Krein y Feshbach-Livsic. Además, se estima el correspondiente tiempo de permanencia.

## 5. Perturbaciones singulares

Las interacciones tipo delta en Mecánica Cuántica presentan una serie de dificultades técnicas y conceptuales debido a la naturaleza singular de la delta de Dirac $\delta$. La principal dificultad es que el Hamiltoniano con una interacción delta no es un operador autoadjunto en el sentido convencional, lo que complica el tratamiento riguroso del sistema.

Para un operador autoadjunto $H_0$ que actúa en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$, estamos hablando de

$$H_\beta = H_0 + \beta|\delta\rangle\langle\delta|,$$

que opera como

$$H_\beta\psi = H_0\psi + \beta\psi\delta$$

Este tipo de interacción puede ser tratado mediante regularización, y es útil para modelar interacciones locales. De hecho, la interacción está localizada en el origen, de modo que no influye para elementos del espacio de Hilbert que se anulen en una vecindad de cero.

Además, se establece que esta interacción puede ser considerada una perturbación de rango uno, lo que permite un tratamiento simplificado en muchos casos de interés. Este hecho se explota en [4], donde, aparte de discutir las estrategias para caracterizar el Hamiltoniano como operador autoadjunto, se demuestra una correspondiente fórmula de Krein.

En dicho trabajo se extienden estas ideas a perturbaciones singulares más generales, incluyendo por ejemplo potenciales localizados en una superficie en el espacio $n$-dimensional.

Se explicitan los dominios donde el operador singular $H_\beta$ es autoadjunto. Además, se establecen fórmulas para las correpondientes funciones de Green, para el caso $H_0 = -\Delta + V(x)$ como operador actuando en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

En particular, se demuestra en este caso el conocido teorema de Weyl, sobre la invariancia del espectro esencial bajo perturbaciones compactas autoadjuntas. Para estas perturbaciones singulares damos un resultado sobre la existencia de un espectro puntual puro (valores propios) de $H_\beta$.

La idea principal es aplicar una tipo de fórmula de Krein en este marco singular, junto con la correspondiente relación entre las funciones de Green asociadas a los operadores $H_0$ y $H_\beta$.

Como ejemplo explícito, se considera una clase especial de perturbaciones singulares del operador autoadjunto $H_0 = -\Delta + V(x)$ en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$, donde $V(x)$ es una función acotada de valor real.

Específicamente, consideraremos el operador perturbado $H_\beta$ de $H_0$ dado por el operador singular $|\delta_S\rangle\langle\delta_S|$ del tipo

$$H_\beta = H_0 + \beta \, |\delta_S\rangle\langle\delta_S| \, ,$$

donde $S$ es la frontera de un dominio de Lipschitz acotado $\Omega$ en $\mathbb{R}^n$, $\beta$ es un parámetro real y

$$\delta_S(\varphi) = \int_S \varphi \, d\sigma$$

donde $d\sigma$ es el elemento de área de la superficie $S$.

Hay varios trabajos de perturbaciones singulares en una dimensión, es decir, perturbaciones del tipo Función *delta* en un punto. En ellos se caracteriza el dominio de estos operadores en términos de una condición de frontera. Seguimos este enfoque y somos capaces de relacionarlo con un operador acotado en un espacio de Sobolev adecuado.

Por último, en dicho artículo se estudia la posible estabilidad de autovalores del operador libre $H_0 = -\Delta + V(x)$, sujeto a una perturbación singular.

Ya que en estos espacios el operador se comporta como un verdadero operador de rango uno, es posible establecer una fórmula de Krein en este contexto, la que se usa para demostrar una versión del teorema de Weyl.

# 6. Herramientas técnicas

Hemos incluido esta sección a sugerencia de uno de los evaluadores de este artículo, sugerencia que por cierto agradecemos. El propósito es explicar con más detalle algunas herramientas útiles en teoría espectral y que son ampliamente conocidas en el área de teoría de perturbaciones.

## 6.1. La fórmula de Feshbach-Livsic

Dado un operador autoadjunto $H$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. La idea es estudiar la resolvente del operador $H$ reducido a un subespacio $\mathcal{M}$.

Sea $P$ la proyección ortonormal asociada al subespacio $\mathcal{M}$ y sea $P^{\perp} = I - P$, donde $I$ es el operador identidad en $\mathcal{H}$. Consideremos el operador (el operador de Feshbach),

$$F(z) = PHP - PHP^{\perp}(H^{\perp} - z)^{-1}P^{\perp}HP,$$

donde $H^{\perp}$ es el operador $H$ reducido al complemento ortogonal de $\mathcal{M}$. Entonces,

$$P(H - z)^{-1}P = (F(z) - z)^{-1}$$

Esta fórmula permite estudiar la resolvente de un operador autoadjunto general, reducido a un subespacio dado $\mathcal{M}$ y muestra como éste depende de la acción de vectores en el complemento ortogonal de $\mathcal{M}$, ver [12].

## 6.2. La fórmula de Krein

Esta es una fórmula explícita para la diferencia de las resolventes de dos operadores autoadjuntos $H$ y $H_0$. Establece,

$$R(z) - R_0(z) = -R_0(z)L_V(z)R_0(z),$$

donde $z$ es un número complejo no real y $L_V(z)$ es un operador que depende de la perturbación $V \equiv H - H_0$. Por ejemplo, cuando $V = A^*B$, la fórmula expresa,

$$L_V(z) = A^*(I - BR_0(z)A^*)^{-1}B$$

Hay muchos ejemplos para los cuales es posible factorizar la perturbación $V$ de modo de obtener una expresión muy simple para el operador $L_V(z)$. Por ejemplo, en el caso de rango uno, $V = \kappa\langle\varphi, \cdot\rangle\varphi$, resulta,

$$L_V(z) = \frac{\kappa}{1 + \kappa\langle\varphi, R_0(z)\varphi\rangle}\langle\varphi, \cdot\rangle.$$

Esta fórmula puede es muy útil en Teoría Espectral puesto que en ella es fácil identificar posibles ceros y polos (como función de $z$) de la resolvente.

Para el caso de perturbaciones de rango finito, es posible obtener una expresión matricial para la fórmula de Krein que se muestra en la Sección 4.

El caso singular, vale decir, perturbaciones que incluyan funciones de tipo delta, también puede ser tratado con esta técnica.

## 6.3. La regla dorada de Fermi

Esta regla es un resultado fundamental en Mecánica Cuántica pero que, en realidad, no usamos en los trabajos aquí mencionados. Solamente, hacemos notar que el parámetro $\Gamma$ que rige el comportamiento casi exponencial de la probabilidad

$$P(t) = |\langle \varphi, e^{-itH}\varphi\rangle|^2$$

aparece también en la regla dorada.

La regla de Fermi entrega la probabilidad de transición entre dos estados adecuados y, en nuestro caso, $P(t)$ es precisamente la probabilidad de transición entre el estado en tiempo $t$, es decir $e^{-itH}\varphi$ y el estado inicial $\varphi$.

Para el caso en que

$$H = H_0 + \epsilon V,$$

la regla indica que para $\epsilon$ pequeño, la probabilidad de transición debe ser proporcional a $\epsilon^2$.

En la Sección 3, presentamos estimaciones para el tiempo de vida

$$\tau(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t)dt.$$

En el caso resonante, se espera que la probabilidad $P(t)$ tenga, para tiempo $t$ grande, un comportamiento aproximado de la forma $e^{-\Gamma t}$, de modo que el tiempo de vida $\tau$ se debe comportar como $\frac{1}{2\Gamma}$.

De hecho, en el caso de rango uno, el término que más influye en el tamaño de $\tau$ tiene la forma $c\epsilon^{-2}$, con $c$ positivo. Esto es consistente con lo que indica la regla dorada.

### 6.4. La estimación de Mourre

La estimación de Mourre (o conmutadores positivos) es una herramienta fundamental en Teoría Espectral, particularmente para descartar la existencia de valores propios y de espectro singular continuo.

Decimos que un operador autoadjunto $H$ satisface una estimación de Mourre en un intervalo real $J$ si existe un operador autoadjunto $A$ tal que.

$$E_J i[H,A]E_J \geq cE_J + KE_J.$$

Aquí, $c$ es una constante positiva y $K$ es un operador compacto. Además,

$$[H,A] = HA - AH$$

es el conmutador entre los operadores $H$ y $A$.

Bajo hipótesis adecuadas que aseguren entre otras cosas, que el conmutador $i[H,A]$ es un operador autoadjunto, la existencia de la estimación de Mourre, ver [16], tiene consecuencias muy relevantes, tales como la ausencia de espectro singular continuo en $J$, la estabilidad del espectro absolutamente continuo, un control de posibles valores propios y la existencia del límite de la resolvente $R(z)$, cuando $z$ se acerca al eje real.

## 7. Algunos problemas abiertos

1. Estudio de perturbaciones fuera del espectro absolutamente continuo: aunque el trabajo se centra en operadores con valores propios inmersos en el espectro absolutamente continuo, es posible considerar perturbaciones de operadores con valores propios aislados. Es el caso por ejemplo, de las "shape resonances", ver por ejemplo [2] y [15]. En estos trabajos un operador $H$, con un potencial de soporte compacto se considera una perturbación del operador $H_0$ que tiene una barrera de potencial infinita. La perturbación es grande pero puede ser pequeña en la región donde los vectores propios de $H_0$ son exponencialmente pequeños. En estos casos, se podría obtener decaimiento casi exponencial además de la concentración espectral.

2. Aplicaciones a sistemas más generales de Sturm-Liouville: la teoría podría extenderse a sistemas más generales que no sean estrictamente de Sturm-Liouville, como operadores no lineales o sistemas que incluyan interacciones de largo alcance.

3. La concentración espectral en presencia de una resonancia, podría ser explorada con más detalle. Por ejemplo, para el caso de una perturbación de rango uno,

$$H_\kappa = H_0 + \kappa|\psi\rangle\langle\psi|\,,$$

donde $H_0$ es un operador autoadjunto con un valor propio $\lambda$, con $H_0\varphi = \lambda\varphi$. Como mostramos en la Sección 2, puede ocurrir que para $\kappa$ pequeño, $H_\kappa$ sea absolutamente continuo (o tenga espectro absolutamente continuo en una vecindad de $\lambda$). Ciertamente, debemos tener que

$$\lim_{\kappa\to 0} E_J^\kappa \varphi = \varphi,$$

donde $E_J^\kappa$ es la proyección espectral asociada al operador $H_\kappa$, en un intervalo $J$ que contenga a $\lambda$. Sería interesante estudiar el orden de la concentración del espectro en torno a $\lambda$, o sea encontrar $\Gamma\kappa$, que tienda a 0 cuando $\kappa$ tienda a 0, optimal, tal que que si $J_\kappa$ es el intervalo centrado en $\lambda$ y de radio $\Gamma\kappa$, entonces todavía se tenga,

$$\lim_{\kappa\to 0} E_{J_\kappa}^\kappa \varphi = \varphi,$$

La concentración espectral es un fenómeno mucho más general introducido en [14]. Mencionamos también [9] para una relación con resonancias. También se podría estudiar esta propiedad para perturbaciones de rango finito y perturbaciones singulares.

4. Regla de oro de Fermi en sistemas: la regla de oro de Fermi es una herramienta central en este trabajo. Sería interesante investigar su aplicabilidad y ajustes por ejemplo cuando se consideran perturbaciones dependientes del tiempo, incluso para rango finito o singular.

5. Análisis del comportamiento de la función de supervivencia en sistemas dinámicos: el comportamiento de la amplitud de supervivencia $R(t) = \langle\varphi, e^{-iHt}\varphi\rangle$ se plantea aquí para la ecuación de Schrödinger. Un área de investigación futura podría ser el estudio detallado de su comportamiento por ejemplo para la ecuación de Dirac o para el movimiento de ondas.

6. Estudio de la estabilidad espectral y el tiempo de vida en presencia de perturbaciones singulares: la estabilidad de los autovalores bajo perturbaciones singulares es un tema clave en el artículo. Un área interesante para futuras investigaciones sería el análisis del tiempo de vida o el tiempo de decaimiento de los estados cuánticos asociados a los autovalores, especialmente en presencia de perturbaciones singulares. Además de la formulación de un teorema de estabilidad espectral más general para sistemas con perturbaciones singulares.

7. Extensión de la teoría a perturbaciones dependientes del tiempo: en el artículo, las perturbaciones son estáticas, pero se podría investigar el comportamiento de perturbaciones dependientes del tiempo, de tipo delta. Estudiar cómo evoluciona el espectro en presencia

de perturbaciones dinámicas podría proporcionar nuevas perspectivas, particularmente en sistemas cuánticos fuera de equilibrio.

8. Extensión de los resultados al caso de perturbaciones no autoadjuntas: aunque el enfoque se limita a operadores autoadjuntos, sería interesante explorar cómo los resultados se generalizan a operadores no autoadjuntos que podrían surgir en ciertos modelos cuánticos. En particular, estudiar la estabilidad y la caracterización dinámica de las resonancias para estos operadores podría ser un área de gran interés.

9. Estudio de la estabilidad espectral, resonancia y concentración espectral para operadores de Schrödinger discretos. Mencionamos [3] para resultados en esta área.

# Referencias

[1] J. Asch, M. A. Astaburuaga, P. Briet, V. H. Cortés, P. Duclos, y C. Fernández, "Sojourn time for rank one perturbations," *J. Math. Phys.*, vol. 47, no. 3, 2006, Art. ID 033501.

[2] J. Asch, O. Bourget, V. H. Cortés, y C. Fernández, "Lower bounds for sojourn time in a simple shape resonance model," in *Spectral theory and mathematical physics*, ser. Oper. Theory Adv. Appl. Birkhäuser/Springer, [Cham], 2016, vol. 254, pp. 1–9.

[3] M. Assal, O. Bourget, P. Miranda, y D. Sambou, "Resonances for quasi-one-dimensional discrete schrödinger operators," 2022, *arXiv:2203.01352*.

[4] M. A. Astaburuaga, V. H. Cortés, C. Fernández, y R. Del Río, "Singular rank one perturbations," *J. Math. Phys.*, vol. 63, no. 2, 2022, Art. ID 023502, doi: 10.1063/5.0061250.

[5] M. A. Astaburuaga, V. H. Cortés, C. Fernández, y R. Del Río, "Resonances and stability of absolutely continuous spectrum for finite rank perturbations," *Pure Appl. Funct. Anal.*, vol. 9, no. 4, pp. 899–914, 2024.

[6] M. A. Astaburuaga, P. Covian, y C. Fernández, "Behavior of the survival probability in some one-dimensional problems," *J. Math. Phys.*, vol. 43, no. 10, pp. 4571–4581, 2002, doi: 10.1063/1.1500426.

[7] O. Bourget, V. H. Cortés, R. Del Río, y C. Fernández, "Resonances under rank-one perturbations," *J. Math. Phys.*, vol. 58, no. 9, 2017, Art. ID 093502, doi: 10.1063/1.4989882.

[8] L. Cattaneo, G. M. Graf, y W. Hunziker, "A general resonance theory based on Mourre's inequality," *Ann. Henri Poincaré*, vol. 7, no. 3, pp. 583–601, 2006, doi: 10.1007/s00023-005-0261-5.

[9] E. B. Davies, "Resonances, spectral concentration and exponential decay," *Lett. Math. Phys.*, vol. 1, no. 1, pp. 31–35, 1975/76, doi: 10.1007/BF00405583.

[10] W. F. Donoghue, Jr., "On the perturbation of spectra," *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 18, pp. 559–579, 1965, doi: 10.1002/cpa.3160180402.

[11] P. D. Hislop e I. M. Sigal, *Introduction to spectral theory*, ser. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1996, vol. 113.

[12] J. S. Howland, "The Livsic matrix in perturbation theory," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 50, pp. 415–437, 1975.

[13] A. Jensen, "Lecture notes on Schrödinger operators: Resonances arising from a perturbed eigenvalue," Aalborg, Denmark, 2010.

[14] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2nd ed., ser. Classics in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.

[15] R. Lavine, "Spectral densities and Sojourn times," in *Atomic Scattering Theory*, J. Nuttall, Ed. London, Ontario: University of Western Ontario Press, 1978, pp. 45–61.

[16] E. Mourre, "Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators," *Comm. Math. Phys.*, vol. 78, no. 3, pp. 391–408, 1980/81.

[17] B. Simon, "Resonances and complex scaling: A rigorous overview," *Int. J. Quantum Chemistry*, vol. 14, pp. 529–542, 1978, doi: 10.1002/qua.560140415.

[18] B. Simon, "Spectral analysis of rank one perturbations and applications," in *Mathematical quantum theory. II. Schrödinger operators (Vancouver, BC, 1993)*, ser. CRM Proc. Lecture Notes. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, vol. 8, pp. 109–149.