

ISSN 0719-0646  
ONLINE VERSION



UNIVERSIDAD  
DE LA FRONTERA

SPECIAL ISSUE

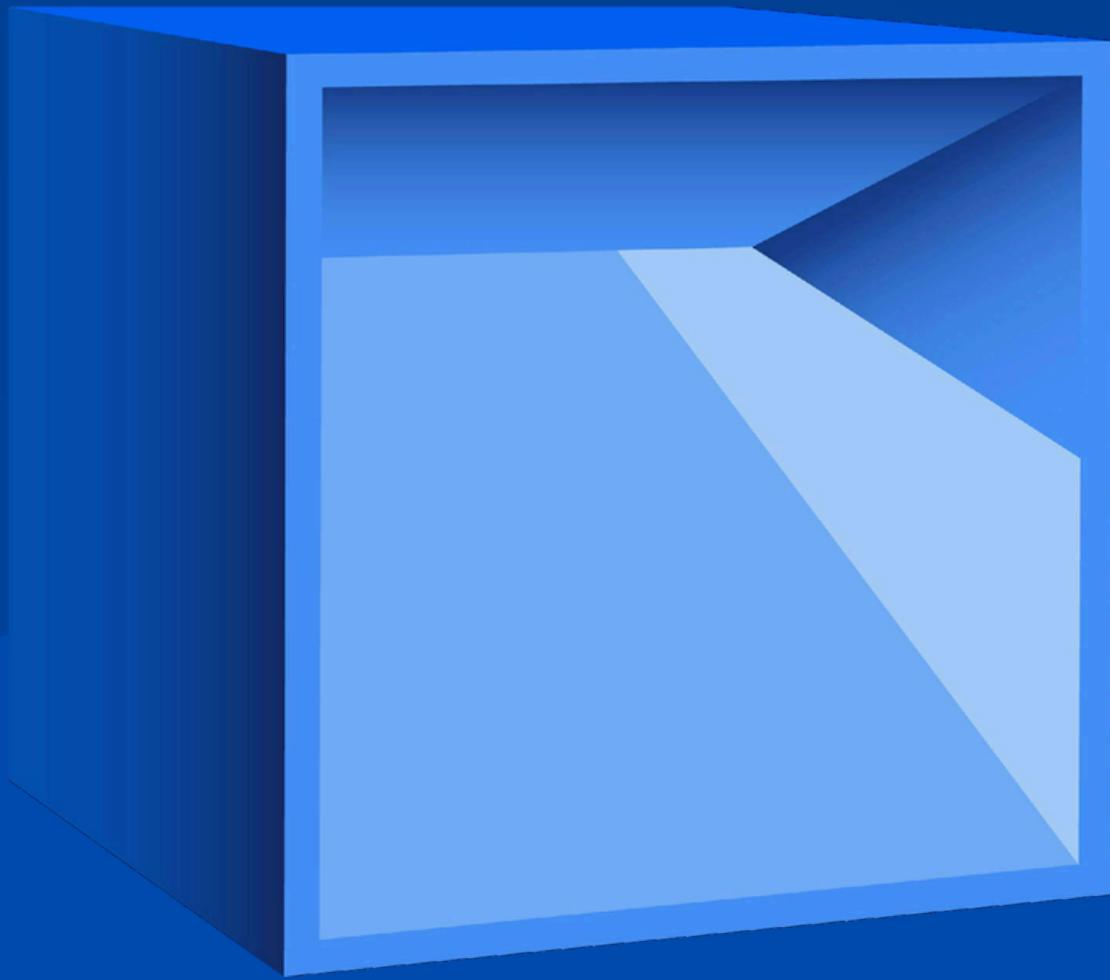
Spanish Edition (40th Anniversary)

VOLUME 27 · ISSUE 2

2025

# Cubo

## A Mathematical Journal



Departamento de Matemática y Estadística  
Facultad de Ingeniería y Ciencias  
Temuco - Chile

[www.cubo.ufro.cl](http://www.cubo.ufro.cl)



**CUBO**  
*A Mathematical Journal*

---

**EDITOR-IN-CHIEF**

Rubí E. Rodríguez  
*cubo@ufrontera.cl*  
Universidad de La Frontera, Chile

**MANAGING EDITOR**

Mauricio Godoy Molina  
*mauricio.godoy@ufrontera.cl*  
Universidad de La Frontera, Chile

**EDITORIAL PRODUCTION**

Ignacio Castillo Bello  
*ignacio.castillo@ufrontera.cl*  
Universidad de La Frontera, Chile

Víctor Valdebenito Sepúlveda  
*victor.valdebenito@ufrontera.cl*  
Universidad de La Frontera, Chile

---

CUBO, A Mathematical Journal, is a scientific journal founded in 1985, and published by the Department of Mathematics and Statistics of the Universidad de La Frontera, Temuco, Chile.

CUBO appears in three issues per year and is indexed in the Web of Science, Scopus, MathSciNet, zbMATH Open, DOAJ, SciELO-Chile, Dialnet, REDIB, Latindex and MIAR. The journal publishes original results of research papers, preferably not more than 20 pages, which contain substantial results in all areas of pure and applied mathematics.

---

EDITORIAL BOARD

**Agarwal R.P.**

*agarwal@tamuk.edu*

Department of Mathematics  
Texas A&M University - Kingsville  
Kingsville, Texas 78363-8202 – USA

**Ambrosetti Antonio**

*ambr@sissa.it*

Sissa, Via Beirut 2-4  
34014 Trieste – Italy

**Anastassiou George A.**

*ganastss@memphis.edu*

Department of Mathematical Sciences  
University of Memphis  
Memphis TN 38152 – USA

**Avramov Luchezar**

*avramov@unl.edu*

Department of Mathematics  
University of Nebraska  
Lincoln NE 68588-0323 – USA

**Benguria Rafael**

*rbenguri@fis.puc.cl*

Instituto de Física  
Pontificia Universidad Católica de Chile  
Casilla 306. Santiago – Chile

**Bollobás Béla**

*bollobas@memphis.edu*

Department of Mathematical Science  
University of Memphis  
Memphis TN 38152 – USA

**Burton Theodore**

*taburton@olypen.com*

Northwest Research Institute  
732 Caroline ST  
Port Angeles, WA 98362 – USA

**Carlsson Gunnar**

*gunnar@math.stanford.edu*

Department of Mathematics  
Stanford University  
Stanford, CA 94305-2125 – USA

**Eckmann Jean Pierre**

*jean-pierre.eckmann@unige.ch*

Département de Physique Théorique  
Université de Genève 1211  
Genève 4 – Switzerland

**Elaydi Saber**

*selaydi@trinity.edu*

Department of Mathematics  
Trinity University, San Antonio  
TX 78212-7200 – USA

**Esnault Hélène**

*esnault@math.fu-berlin.de*

Freie Universität Berlin  
FB Mathematik und Informatik  
FB6 Mathematik 45117 ESSEN – Germany

**Hidalgo Rubén**

*ruben.hidalgo@ufrontera.cl*

Departamento de Matemática y Estadística  
Universidad de La Frontera  
Av. Francisco Salazar 01145, Temuco – Chile

**Fomin Sergey**

*fomin@umich.edu*

Department of Mathematics  
University of Michigan  
525 East University Ave. Ann Arbor  
MI 48109 - 1109 – USA

**Jurdjevic Velimir**

*jurdj@math.utoronto.ca*

Department of Mathematics  
University of Toronto  
Ontario – Canadá

**Kalai Gil**

*kalai@math.huji.ac.il*

Einstein Institute of Mathematics  
Hebrew University of Jerusalem  
Givat Ram Campus, Jerusalem 91904 – Israel

**Kurylev Yaroslav**  
*y.kurylev@math.ucl.ac.uk*

Department of Mathematics  
University College London  
Gower Street, London – United Kingdom

**Markina Irina**  
*irina.markina@uib.no*

Department of Mathematics  
University of Bergen  
Realfagbygget, Allégt. 41, Bergen – Norway

**Moslehian M.S.**  
*moslehian@ferdowsi.um.ac.ir*

Department of Pure Mathematics  
Faculty of Mathematical Sciences  
Ferdowsi University of Mashhad  
P. O. Box 1159, Mashhad 91775, Iran

**Pinto Manuel**  
*pintoj@uchile.cl*

Departamento de Matemática  
Facultad de Ciencias, Universidad de Chile  
Casilla 653. Santiago – Chile

**Ramm Alexander G.**  
*ramm@math.ksu.edu*

Department of Mathematics  
Kansas State University  
Manhattan KS 66506-2602 – USA

**Rebolledo Rolando**  
*rolando.rebolledo@uv.cl*

Instituto de Matemáticas  
Facultad de Ingeniería  
Universidad de Valparaíso  
Valparaíso – Chile

**Robert Didier**  
*didier.robert@univ-nantes.fr*

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray  
Université de Nantes  
UMR 6629 du CNRS, 2  
Rue de la Houssinière BP 92208  
44072 Nantes Cedex 03 – France

**Sá Barreto Antonio**  
*sabarre@purdue.edu*

Department of Mathematics  
Purdue University  
West Lafayette, IN 47907-2067 – USA

**Shub Michael**  
*mshub@ccny.cuny.edu*

Department of Mathematics  
The City College of New York  
New York – USA

**Sjöstrand Johannes**  
*johannes.sjstrand@u-bourgogne.fr*

Université de Bourgogne Franche-Comté  
9 Avenue Alain Savary, BP 47870  
FR-21078 Dijon Cedex – France

**Tian Gang**  
*tian@math.princeton.edu*

Department of Mathematics  
Princeton University  
Fine Hall, Washington Road  
Princeton, NJ 08544-1000 – USA

**Tjøstheim Dag Bjarne**  
*dag.tjostheim@uib.no*

Department of Mathematics  
University of Bergen  
Johannes Allegaten 41  
Bergen – Norway

**Uhlmann Gunther**  
*gunther@math.washington.edu*

Department of Mathematics  
University of Washington  
Box 354350 Seattle WA 98195 – USA

**Vainsencher Israel**  
*israel@mat.ufmg.br*

Departamento de Matemática  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Av. Antonio Carlos 6627 Caixa Postal 702  
CEP 30.123-970, Belo Horizonte, MG – Brazil







**CUBO**  
A MATHEMATICAL JOURNAL  
Universidad de La Frontera  
Volume 27/Nº2 – AUGUST 2025  
Special Issue – Spanish Edition

---

## SUMMARY

### Articles

- **Pseudoinverses of morphisms between Abelian varieties** ..... 179  
ROBERT AUFFARTH
- **Some infinite extensions of  $\mathbb{Q}$  satisfying Bogomolov's property** ..... 191  
BENJAMÍN CASTILLO
- **A simple observation concerning the vector of Riemann constants and non-special divisors of generalized Fermat curves** ..... 209  
RUBÉN A. HIDALGO
- **The maximal function, an Orlicz-Lorentz subspace, and the multiplication operator** ..... 233  
RENÉ ERLIN CASTILLO AND HÉCTOR CAMILO CHAPARRO
- **Fermentation bioreactor with stochastic consumption rate** ..... 267  
RICARDO CASTRO SANTIS, FERNANDO CÓRDOVA-LEPE AND ANA BELÉN VENEGAS
- **Linear irreducible representations of finite groups over number fields** ..... 285  
RUBÍ E. RODRÍGUEZ, ANITA M. ROJAS AND MATÍAS SAAVEDRA-LAGOS
- **Special parameters and linear deformations of the family  $(\wp(z))^2 + c$**  ..... 307  
ADRIÁN ESPARZA-AMADOR
- **A note on finite-dimensional quotients and the problem of automatic continuity for twisted convolution algebras** ..... 329  
FELIPE I. FLORES
- **Deformations of abelian varieties with an automorphism group** ..... 343  
U. GUERRERO-VALADEZ, H. TORRES-LÓPEZ AND A. G. ZAMORA

- 
- **Mathematical analysis of an inverse problem for a reaction-diffusion system originated in epidemiology** ..... 363  
ANÍBAL CORONEL, FERNANDO HUANCAS, ESPERANZA LOZADA AND JORGE TORRES

## Surveys

- **Limit cycles in the plane: Contributions from Chile** ..... 391  
J. D. GARCÍA-SALDAÑA AND S. REBOLLO-PERDOMO
- **Topological aspects of symmetries on surfaces** ..... 411  
JUAN ARMANDO PARRA AND ISRAEL MORALES
- **Non-linear subdivision schemes: 25 years of history through 75 contributions** ..... 461  
SERGIO AMAT, SONIA BUSQUIER, DAVID LEVIN AND JUAN C. TRILLO
- **Spectral stability and resonances for finite rank and singular perturbations** ..... 505  
M. ANGÉLICA ASTABURUAGA, VÍCTOR H. CORTÉS, CLAUDIO FERNÁNDEZ AND RAFAEL DEL RÍO





**CUBO**  
A MATHEMATICAL JOURNAL  
Universidad de La Frontera  
Volume 27/Nº2 – AGOSTO 2025  
Edición Especial en Español

---

## CONTENIDO

### Artículos

- **Pseudoinversos de morfismos entre variedades abelianas** ..... 179  
ROBERT AUFFARTH
- **Algunas extensiones infinitas de  $\mathbb{Q}$  con la propiedad de Bogomolov** ..... 191  
BENJAMÍN CASTILLO
- **Una observación sencilla sobre vectores de constantes de Riemann y divisores no-especiales de curvas generalizadas de Fermat** ..... 209  
RUBÉN A. HIDALGO
- **Función maximal, un subespacio de Orlicz-Lorentz, y el operador multiplicación** ..... 233  
RENÉ ERLIN CASTILLO AND HÉCTOR CAMILO CHAPARRO
- **Biorreactor de fermentación con tasa estocástica de consumo** ..... 267  
RICARDO CASTRO SANTIS, FERNANDO CÓRDOVA-LEPE AND ANA BELÉN VENEGAS
- **Representaciones lineales irreducibles de grupos finitos en cuerpos de números** ..... 285  
RUBÍ E. RODRÍGUEZ, ANITA M. ROJAS AND MATÍAS SAAVEDRA-LAGOS
- **Parámetros especiales y deformaciones lineales de la familia  $(\wp(z))^2 + c$**  ..... 307  
ADRIÁN ESPARZA-AMADOR
- **Una nota sobre cocientes finito-dimensionales y el problema de continuidad automática para álgebras de convolución torcida** ..... 329  
FELIPE I. FLORES

---

– Deformaciones de variedades abelianas con un grupo de automorfismos .....	343
U. GUERRERO-VALADEZ, H. TORRES-LÓPEZ AND A. G. ZAMORA	
– Análisis matemático de un problema inverso para un sistema de reacción-difusión originado en epidemiología .....	363
ANÍBAL CORONEL, FERNANDO HUANCAS, ESPERANZA LOZADA AND JORGE TORRES	

## Compendio

– Ciclos límite en el plano: Contribuciones desde Chile .....	391
J. D. GARCÍA-SALDAÑA AND S. REBOLLO-PERDOMO	
– Aspectos topológicos de las simetrías en superficies .....	411
JUAN ARMANDO PARRA AND ISRAEL MORALES	
– Esquemas de subdivisión no lineales: 25 años de historia a través de 75 contribuciones .....	461
SERGIO AMAT, SONIA BUSQUIER, DAVID LEVIN AND JUAN C. TRILLO	
– Estabilidad espectral y resonancias para perturbaciones de rango finito y singulares .....	505
M. ANGÉLICA ASTABURUAGA, VÍCTOR H. CORTÉS, CLAUDIO FERNÁNDEZ AND RAFAEL DEL RÍO	

## Pseudoinversos de morfismos entre variedades abelianas

ROBERT AUFFARTH<sup>1</sup> 

<sup>1</sup> Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile.  
*rfauffar@uchile.cl*

### RESUMEN

Mostramos que a cada homomorfismo entre variedades abelianas polarizadas le podemos asociar lo que llamamos su homomorfismo pseudoinverso, el cual es la noción homóloga de la matriz de Moore-Penrose de una matriz compleja dada. Estudiamos algunas propiedades de este homomorfismo.

**Palabras claves:** Variedad abeliana, pseudoinversa, categoría de daga.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 14K20, 15A09, 15A10

Publicado: 08 de agosto de 2025

Aceptado: 24 de marzo de 2025

Recibido: 11 de septiembre de 2024

©2025 R. Auffarth. Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.



## Pseudoinverses of morphisms between Abelian varieties

ROBERT AUFFARTH<sup>1</sup> 

<sup>1</sup> Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Chile, Santiago, Chile.  
*rfauffar@uchile.cl*

### ABSTRACT

We show that to each homomorphism between polarized abelian varieties, we can associate its so-called pseudoinverse homomorphism, which can be seen as analogous to the Moore-Penrose matrix of a given complex matrix. We study some properties of this homomorphism.

**Keywords and Phrases:** Abelian variety, pseudoinverse, dagger category.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 14K20, 15A09, 15A10

Published: 08 August, 2025

Accepted: 24 March, 2025

Received: 11 September, 2024



©2025 R. Auffarth. This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

## 1. Introducción

Al estudiar los toros complejos, es inevitable darse cuenta que prácticamente todo lo que se trabaja en ellos es *linealizable* en algún sentido. En palabras técnicas, al asignar a un toro complejo su espacio tangente en el origen, y al asignar a un homomorfismo entre toros su representación analítica, obtenemos un funtor fiel de la categoría de toros complejos a la categoría de espacios vectoriales. Ahora bien, lamentablemente la intuición de álgebra lineal muchas veces no sirve cuando estamos trabajando con toros complejos en toda su generalidad; sin embargo, cuando nos restringimos a aquellos toros que son a la vez variedades proyectivas (es decir, variedades abelianas), volvemos a recuperar esta intuición. Por ejemplo, si fijamos una polarización en un toro complejo, entonces obtenemos que todo subtoro tiene un subtoro complementario, ortogonal respecto a la polarización en algún sentido, de la misma forma que dada una forma sesquilineal no degenerada en un espacio vectorial, todo subespacio vectorial tiene su complemento ortogonal. Ejemplos de este tipo de buen comportamiento abundan en las variedades abelianas, y por otro lado comportamientos patológicos también abundan cuando nos extendemos al universo completo de toros complejos.

El propósito de este artículo es presentar un tal fenómeno que es conocido en álgebra lineal, pero hasta donde sabe el autor, no se ha estudiado para variedades abelianas. Este concepto es el de la *matriz pseudoinversa* de una matriz dada. Si  $M \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  es una matriz compleja de  $m \times n$ , es conocido que posee una matriz *pseudoinversa* (a veces conocida como la *inversa de Moore-Penrose*)  $M^+ \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$  que se caracteriza por las siguientes propiedades:

1.  $MM^+M = M$
2.  $M^+MM^+ = M^+$
3.  $(MM^+)^* = MM^+$
4.  $(M^+M)^* = M^+M.$

Aquí  $M^*$  denota la matriz conjugada traspuesta de  $M$ . Si  $M$  es invertible,  $M^+$  es claramente la matriz inversa de  $M$ .

En este artículo mostraremos que dadas dos variedades abelianas polarizadas  $(X, H_X)$  e  $(Y, H_Y)$ , a cada elemento  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(X, Y) := \text{Hom}(X, Y) \otimes \mathbb{Q}$  le podemos asociar un *homomorfismo pseudoinverso*  $f^+ \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(Y, X)$  que también se caracteriza por propiedades similares a las descritas arriba (véase el Teorema 3.2). Mostraremos algunas propiedades de este pseudoinverso, y mostraremos, por ejemplo, que **no existe** en general cuando extendemos a toros complejos que no son variedades abelianas (véase la Observación 3.3). En otras palabras, siguiendo [3], la categoría de variedades abelianas es una categoría de daga de Moore-Penrose, pero la categoría de toros complejos no lo es. Finalmente, usaremos este pseudoinverso para calcular el idempotente simétrico de la suma e (componente conexa que contiene el 0 de la) intersección de dos subvariedades abelianas.

## 2. Preliminares

Recordemos y establezcamos algunas notaciones y resultados preliminares. En todo lo que sigue, un subíndice  $\mathbb{Q}$  en un grupo abeliano denotará que estamos tensorizando el grupo con  $\mathbb{Q}$  sobre  $\mathbb{Z}$ .

### 2.1. Variedades abelianas

Para nuestros propósitos, una *polarización* en un toro complejo  $X = \mathbb{C}^g/\Lambda$  va a ser una forma hermitiana positiva definida  $H : \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\text{Im}(H)(\Lambda \times \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}$ . En un toro complejo, toda forma diferencial real es cohomóloga a una forma constante, lo cual implica (véase [2, Lemma 1.3.1]) que para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$H^k(X, \mathbb{Z}) \simeq \bigwedge^k H^1(X, \mathbb{Z}) \simeq \bigwedge^k \Lambda^\vee.$$

En particular, si  $H$  es una forma hermitiana en  $\mathbb{C}^g$  tal que  $\text{Im}(H)(\Lambda \times \Lambda) \subseteq \mathbb{Z}$ , entonces la forma real alternante  $\text{Im}(H)$  induce naturalmente un elemento de  $\bigwedge^2 \Lambda^\vee$  y luego de  $H^2(X, \mathbb{Z})$ . Es posible probar que  $H$  es una polarización si y sólo si es la primera clase de Chern de un fibrado en líneas amplio sobre  $X$ .

Para todo fibrado en líneas  $\mathcal{L} \in \text{Pic}(X)$ , tenemos el morfismo

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{L}} : X &\rightarrow X^\vee := \text{Pic}^0(X) \\ x &\mapsto t_x^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \end{aligned}$$

que resulta ser un homomorfismo de grupos por el Teorema del Cuadrado, y que depende solamente de la primera clase de Chern de  $\mathcal{L}$ . Si  $\mathcal{L}$  es amplio, entonces  $\varphi_{\mathcal{L}}$  es una isogenia. Por esta razón, si  $H$  es una polarización en  $X$ , induce un morfismo  $\varphi_H : X \rightarrow X^\vee$ . Si  $H_X$  es una polarización en  $X$  y  $H_Y$  es una polarización en un toro  $Y$ , entonces inducen una *involución de Rosati*

$$\begin{aligned} \dagger : \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(X, Y) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(Y, X) \\ f &\mapsto \varphi_{H_X}^{-1} f^\vee \varphi_{H_Y}. \end{aligned}$$

Si  $X = Y$ , usaremos siempre la misma polarización para definir la involución de Rosati. Un endomorfismo de  $X$  es *simétrico* si es un punto fijo de  $\dagger$ , y el grupo de endomorfismos simétricos de  $X$  se denotará por  $\text{End}^s(X)$ . Es conocido (véase [2, Prop. 5.2.1]) que tenemos un isomorfismo de espacios vectoriales

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}^s(X)$$

$$\alpha \mapsto \varphi_H^{-1} \varphi_\alpha,$$

y en todo el artículo identificaremos estos espacios vectoriales sin mayor explicación.

A cada homomorfismo  $f : X \rightarrow Y$  le podemos asociar su *representación analítica*  $\rho_a(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_0(X), T_0(Y))$ , que en la mayoría de las circunstancias la interpretaremos simplemente como una matriz. Observamos que si fijamos polarizaciones en  $X$  e  $Y$ , entonces  $\rho_a(f^\dagger) = \rho_a(f)^*$ , donde  $\rho_a(f)^*$  es la matriz adjunta de  $\rho_a(f)^*$  respecto a las formas hermitianas dadas.

## 2.2. Pseudoinversas de matrices.

Como se describió en la introducción, si  $M$  es una matriz compleja de  $m \times n$ , existe una matriz  $M^+$ , llamada la *pseudoinversa* de  $M$ , que satisface las propiedades descritas. Una descripción geométrica de  $M^+$  se puede obtener como sigue: Podemos escribir  $\mathbb{C}^n = (\ker M) \oplus (\ker M)^\perp$  y  $\mathbb{C}^m = \mathrm{im}(M) \oplus (\mathrm{im}(M))^\perp$ , donde el espacio ortogonal se toma respecto a la forma hermitiana estándar de ambos espacios (*i.e.* con matriz identidad). Entonces  $M^+$  se puede interpretar como la transformación lineal que restringida a  $\mathrm{im}(M)$  es igual a  $(M|_{(\ker M)^\perp})^{-1}$ , y restringida a  $\mathrm{im}(M)^\perp$  es 0. Es trivial verificar que efectivamente esta es precisamente la transformación lineal que cumple las propiedades descritas en la introducción. Usaremos esta descripción geométrica para definir un homomorfismo pseudoinverso en el contexto de variedades abelianas.

## 3. Pseudoinversos de homomorfismos entre variedades abelianas

Sean ahora  $(X, H_X)$  y  $(Y, H_Y)$  variedades abelianas polarizadas, y sea  $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$  un homomorfismo. Podemos escribir  $X = \mathbb{C}^g/\Lambda_X$  y  $Y = \mathbb{C}^h/\Lambda_Y$ , y como se dijo en la introducción, interpretar  $H_X$  y  $H_Y$  como formas hermitianas positivas definidas en sus espacios vectoriales correspondientes. Sea  $\rho_a(f) \in M_{h \times g}(\mathbb{C})$  la representación analítica de  $f$ ; observemos que posee una matriz pseudoinversa  $\rho_a(f)^+ \in M_{g \times h}(\mathbb{C})$  (donde ahora  $*$ , en vez de ser conjugación y trasposición, es la matriz adjunta respecto a las dos formas hermitianas).

**Lema 3.1.** *Existe  $e \in \mathbb{N}$  tal que  $ep_a(f)^+(\Lambda_Y) \subseteq \Lambda_X$ ; en otras palabras,  $\rho_a(f)^+$  induce un  $\mathbb{Q}$ -homomorfismo  $f^+ \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(Y, X)$ .*

*Demuestra.* Usaremos la descripción geométrica de la pseudoinversa descrita en la Subsección 2.2. Podemos descomponer  $\mathbb{C}^g = \ker(\rho_a(f)) \oplus \ker(\rho_a(f))^{\perp}$  y  $\mathbb{C}^h = \text{im}(\rho_a(f)) \oplus \text{im}(\rho_a(f))^{\perp}$ , donde los complementos ortogonales se toman respecto a las formas hermitianas respectivas. Ahora tenemos que  $\rho_a(f)^+$  restringido a  $\text{im}(\rho_a(f))$  es exactamente la inversa de la transformación lineal invertible  $\rho_a(f)|_{\ker(\rho_a(f))^{\perp}}$ , y  $\rho_a(f)^+$  restringido a  $\text{im}(\rho_a(f))^{\perp}$  es 0.

Sea  $A$  la subvariedad abeliana complementaria de  $(\ker f)^0$  con respecto a  $H_X$ , y sea  $B$  la subvariedad abeliana complementaria de  $\text{im}(f)$  con respecto a  $H_Y$ . Entonces  $f$  restringido a  $A$  es una isogenia con su imagen, y por lo tanto existe  $j \in \text{Hom}(\text{im}(f), A)$  tal que  $j \circ f|_A$  y  $f \circ j$  son multiplicación por un entero  $t$ . Sea  $m \in \mathbb{N}$  el exponente del grupo finito  $\text{im}(f) \cap B$ , y sea  $p \in \text{Hom}(Y, X)$  donde para  $x \in \text{im}(f)$ ,  $p(x) = mj(x)$ , y si  $x \in B$ , entonces  $p(x) = 0$ . Observemos que  $p$  está bien definida pues si  $x \in \text{im}(f) \cap B$ , entonces  $0 = p(x) = mj(x) = j(mx)$ . Más aún, por construcción,  $\rho_a(p) = n\rho_a(f)^+$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ , y queda demostrado el lema.  $\square$

Esencialmente la misma demostración muestra que si  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(X, Y)$ , entonces podemos también definir  $f^+$  en una manera similar. Obtenemos lo siguiente:

**Teorema 3.2.** *Dado  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(X, Y)$ , existe un único  $f^+ \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(Y, X)$  tal que*

1.  $ff^+f = f$
2.  $f^+ff^+ = f^+$
3.  $(ff^+)^{\dagger} = ff^+$
4.  $(f^+f)^{\dagger} = f^+f$ .

*En otras palabras, siguiendo lo definido en [3], la categoría de variedades abelianas polarizadas (y donde los morfismos no necesariamente preservan las polarizaciones) es una **categoría de daga de Moore-Penrose**.*

*Demuestra.* Esto sigue del análisis anterior, ya que dado  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(X, Y)$ , podemos definir  $f^+ \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(Y, X)$  tal que las representaciones complejas de  $f$  y  $f^+$  satisfacen las condiciones (1), (2), (3) y (4) de la Introducción. Esto implica entonces que  $f$  y  $f^+$  satisfacen las ecuaciones descritas en el enunciado del teorema. La unicidad sigue de la unicidad de la inversa de Moore-Penrose de la representación analítica de  $f$ , y como la representación analítica es una representación fiel de  $\text{Hom}_{\mathbb{Q}}(X, Y)$  en  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^g, \mathbb{C}^h)$ , obtenemos lo buscado.  $\square$

**Observación 3.3.** *Esta construcción no se puede realizar en general para toros que no sean variedades abelianas. De hecho, ni siquiera debe existir un homomorfismo que cumpla las dos primeras propiedades del Teorema 3.2. Por ejemplo, sean  $T_1$  y  $T_2$  dos toros complejos de dimensión positiva con  $T_2$  simple. Entonces por [1, Prop. 5.7, Cor. 6.3], existe un toro  $X$  (de hecho, una cantidad no numerable de toros) que cabe en una sucesión exacta*

$$0 \rightarrow T_1 \rightarrow X \xrightarrow{f} T_2 \rightarrow 0$$

*y tal que  $T_1$ , visto como subtoro de  $X$ , no tiene un subtoro complementario. Si  $f^+$  fuese un homomorfismo que cumple las primeras propiedades del Teorema 3.2, tendría que ser una  $\mathbb{Q}$ -isogenia entre  $T_2$  y su imagen, y además por la simplicidad de  $T_2$ , o bien  $f^+(T_2) \subseteq T_1$  o  $f^+(T_2) \cap T_1 = 0$ . En el primer caso, obtendríamos que  $ff^+ = 0$ , una contradicción por la propiedad (1) del Teorema 3.2. En el segundo caso,  $f^+(T_2)$  sería un subtoro complementario para  $T_1$ , una contradicción.*

Volvamos ahora al caso de variedades abelianas, usando la notación anterior. Notamos que cuando  $f$  es una isogenia, entonces  $f^+$  es simplemente  $f^{-1}$ , el  $\mathbb{Q}$ -inverso de  $f$ .

**Teorema 3.4.** *Tenemos funciones bien definidas*

$$\Phi : \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(X, Y) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}}^s(X) \simeq \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$$

$$f \mapsto f^+f$$

$$\Psi : \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(X, Y) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}}^s(Y) \simeq \text{NS}_{\mathbb{Q}}(Y)$$

$$f \mapsto ff^+,$$

donde resulta que  $\Phi(f)$  es el idempotente simétrico asociado a la subvariedad abeliana complementaria de  $(\ker f)^0$  respecto a  $H_X$ , y  $\Psi(f)$  es el idempotente simétrico asociado a la subvariedad abeliana  $\text{im}(f)$ . Más aún, si  $X = Y$  y  $f \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$  es punto fijo de  $\Phi$  o de  $\Psi$ , entonces es también punto fijo del otro, y esto ocurre si y solamente si  $f$  es el idempotente simétrico asociado a la subvariedad abeliana  $\text{im}(f)$ .

*Demostración.* Por la Propiedad (3) del Teorema 3.2, tenemos que efectivamente  $f^+f$  y  $ff^+$  son endomorfismos simétricos respecto a la involución de Rosati. Más aún,

$$(f^+f)^2 = f^+ff^+f = f^+f$$

$$(ff^+)^2 = ff^+ff^+ = ff^+,$$

lo cual implica que son idempotentes. Por [2, Theorem 5.3.2], cada una de estas involuciones corresponde al idempotente simétrico de su imagen. Por la construcción de  $f^+$  en la demostración del Lema 3.1, es claro que  $\text{im}(f^+f)$  es la subvariedad abeliana complementaria de  $(\ker f)^0$  e

$$\text{im}(ff^+) = \text{im}(f).$$

Ahora si  $X = Y$  y  $f \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$  es tal que  $\Phi(f) = f$ , entonces  $f^+f = f$ , lo cual implica que  $f = ff^+f = f^2$ . Además,  $f$  entonces es simétrico respecto a la involución de Rosati. Por lo tanto,  $f$  es el idempotente simétrico de  $\text{im}(f)$ , y por lo tanto  $\Psi(f) = f$ . Lo mismo ocurre si  $f$  es punto fijo de  $\Psi$ .  $\square$

Notamos que  $f^+$  “casi nunca” es un homomorfismo honesto, en el sentido de que casi nunca pertenece a  $\text{Hom}(Y, X)$  (aunque siempre es un  $\mathbb{Q}$ -homomorfismo):

**Proposición 3.5.** *Si  $f \in \text{Hom}(X, Y)$ ,  $A$  es la subvariedad abeliana complementaria de  $(\ker f)^0$  y  $B$  es la subvariedad abeliana complementaria de  $\text{im}(f)$ , entonces  $f^+$  es un homomorfismo honesto si y sólo si  $A \cap \ker f = \{0\}$  e  $\text{im}(f) \cap B = \{0\}$ . En particular, si o bien  $H_X$  o  $H_Y$  es indescomponible y  $f$  no es ni el homomorfismo 0 ni un isomorfismo, entonces  $f^+$  **nunca** es un homomorfismo honesto.*

*Demostración.* Por la construcción de  $f^+$  en la demostración del Lema 3.1, tenemos que  $f^+$  es un homomorfismo honesto solamente cuando  $f$  restringido a la subvariedad abeliana complementaria de  $(\ker f)^0$  es un isomorfismo con su imagen (lo cual es equivalente a que esta restricción sea inyectiva), y la intersección entre la imagen de  $f$  y la subvariedad abeliana complementaria de la imagen de  $f$  es 0. Esta última condición inmediatamente implica que si  $f$  no es sobreyectivo, entonces  $H_Y$  es descomponible.

Tenemos entonces que  $f$  restringido a la subvariedad abeliana complementaria de  $(\ker f)^0$  es inyectivo si y solamente si la intersección entre  $\ker f$  y la subvariedad abeliana complementaria de  $(\ker f)^0$  es trivial.  $\square$

Terminamos esta sección observando, por el Teorema 3.2, que si  $f \in \text{End}_{\mathbb{Q}}^s(X)$ , entonces  $f^+ \in \text{End}_{\mathbb{Q}}^s(X)$  también, ya que  $(f^+)^\dagger = (f^\dagger)^+$ . Esto implica que tenemos una involución (no lineal)  $+$ :  $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$ .

**Ejemplo 3.6.** *Trabajemos un ejemplo sencillo. Si consideramos  $X = E^2$  con  $E$  una curva elíptica sin multiplicación compleja, entonces vía la representación analítica podemos identificar  $\text{End}(X) = M_2(\mathbb{Z})$ . Ahora bien, en este caso la involución de Rosati es simplemente trasposición, y entonces podemos identificar  $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(E^2)$  con las matrices simétricas de  $2 \times 2$  con coeficientes en  $\mathbb{Q}$ , o equivalentemente, con  $\mathbb{Q}^3$ . Siguiendo los pasos anteriores para calcular  $+$ :  $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$ , obtenemos que si  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ , entonces*

$$+(a, b, c) = \begin{cases} \left( \frac{c}{ac - b^2}, \frac{-b}{ac - b^2}, \frac{a}{ac - b^2} \right) & \text{si } ac - b^2 \neq 0 \\ \left( \frac{a}{(a+c)^2}, \frac{b}{(a+c)^2}, \frac{c}{(a+c)^2} \right) & \text{si } ac - b^2 = 0 \end{cases}$$

Notamos entonces que, en caso que  $ac - b^2 = 0$ , tenemos

$$\Phi(a, b, c) = \Psi(a, b, c) = \left( \frac{a}{a+c}, \frac{b}{a+c}, \frac{c}{a+c} \right).$$

Más aún, tenemos que  $(a, b, c)$  es un punto fijo de estas funciones si y sólo si  $a+c = 1$ . Por lo tanto, el conjunto de todos los idempotentes simétricos en  $E^2$  que no sean la identidad está parametrizado por  $(a, b, 1-a)$ , donde  $b^2 = a(1-a)$ . Ahora, si queremos encontrar idempotentes simétricos que no sean 0, entonces podemos parametrizar el círculo  $b^2 = a(1-a)$  usando la proyección estereográfica desde el origen, y obtener que todas las soluciones son de la forma  $(a, b) = \left( \frac{1}{t^2+1}, \frac{t}{t^2+1} \right)$ . En conclusión, hay una biyección entre curvas elípticas en  $E^2$  y los elementos del conjunto

$$\left\{ \left( \frac{1}{t^2+1}, \frac{t}{t^2+1}, \frac{t^2}{t^2+1} \right) : t \in \mathbb{Q} \right\},$$

donde a cada racional  $t \in \mathbb{Q}$ , le podemos asociar la curva elíptica

$$E_t := \{(x, y) \in E^2 : tx = y\}.$$

Notamos que no está bien definida la división en una variedad abeliana, pero como los toros son grupos divisibles, sí está bien definida la ecuación anterior.

#### 4. Intersecciones y sumas de subvariedades abelianas

Si  $(X, H)$  es una variedad abeliana polarizada y  $A, B \subseteq X$  son subvariedades abelianas con idempotentes simétricos  $\varepsilon_A, \varepsilon_B \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(X)$ , es natural preguntarse cómo obtener los idempotentes simétricos de  $A + B$  y  $(A \cap B)^0$ . Usando el pseudoinverso y los resultados principales de [4], podemos encontrarlos:

**Proposición 4.1.** *Si  $A, B \subseteq X$  son subvariedades abelianas (no necesariamente complementarias) y  $\varepsilon_A^\perp = 1 - \varepsilon_A$  (y lo mismo para  $B$ ), tenemos las siguientes identidades:*

1. Suma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{A+B} &= (\varepsilon_A + \varepsilon_B)(\varepsilon_A + \varepsilon_B)^+ \\ &= (\varepsilon_A + \varepsilon_B)^+(\varepsilon_A + \varepsilon_B) \\ &= \varepsilon_B + [(\varepsilon_A \varepsilon_B^\perp)^+(\varepsilon_A \varepsilon_B^\perp)] \\ &= \varepsilon_A + \varepsilon_A^\perp (\varepsilon_A^\perp \varepsilon_B)^+ \end{aligned}$$

2. *Intersección:*

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{(A \cap B)^0} &= 2\varepsilon_B(\varepsilon_A + \varepsilon_B)^+ \varepsilon_A \\
 &= 2(\varepsilon_A - \varepsilon_A(\varepsilon_A + \varepsilon_B)^+ \varepsilon_A) \\
 &= \varepsilon_A - (\varepsilon_A - \varepsilon_B \varepsilon_A)^+ (\varepsilon_A - \varepsilon_B \varepsilon_A) \\
 &= \varepsilon_A - (\varepsilon_B^\perp \varepsilon_A)^+ (\varepsilon_B^\perp \varepsilon_A) \\
 &= \varepsilon_A - \varepsilon_A (\varepsilon_A \varepsilon_B^\perp)^+.
 \end{aligned}$$

En las identidades anteriores también se puede intercambiar  $A$  y  $B$ , claramente, para obtener nuevas identidades.

*Demostración.* Para demostrar estas identidades, primero es necesario observar que  $T_0(A + B) = T_0(A) + T_0(B)$  y  $T_0((A \cap B)^0) = T_0(A) \cap T_0(B)$  en  $T_0(X)$ . Esto implica que sólo es necesario encontrar las proyecciones ortogonales de  $T_0(A + B)$  y  $T_0(A) \cap T_0(B)$  respecto a  $H$  en términos de las proyecciones ortogonales de  $T_0(A)$  y  $T_0(B)$ , ya que entonces estas proyecciones inducirían  $\mathbb{Q}$ -endomorfismos de  $X$  que serían idempotentes simétricos, y cuyas imágenes serían  $A + B$  y  $(A \cap B)^0$ , respectivamente. Esto es precisamente lo que se hace en las demostraciones de los Teoremas 3 y 4 de [4], donde encuentran las identidades expuestas arriba para proyecciones ortogonales. Esto concluye la demostración.  $\square$

Sería interesante en el futuro seguir estudiando propiedades de  $+$  como función del grupo de Néron-Severi en sí mismo, y ver si es posible usarla para descomponer variedades abelianas.

## Agradecimientos

Quisiera agradecer a los referees anónimos por sus valiosas sugerencias. Este trabajo fue parcialmente financiado por el proyecto ANID - Fondecyt 1220997 y por el proyecto Math-AmSud GV-BCEF 220010.

## Referencias

- [1] C. Birkenhake and H. Lange, *Complex tori*, ser. Prog. Math. Boston: Birkhäuser, 1999, vol. 177.
- [2] C. Birkenhake and H. Lange, *Complex abelian varieties*, 2nd ed., ser. Grundlehren Math. Wiss. Berlin: Springer, 2004, vol. 302.
- [3] R. Cockett and J.-S. Pacaud Lemay, “Moore-Penrose dagger categories,” in *Proceedings of the 20th international conference on quantum physics and logic, QPL, Paris, France, July 17–21, 2023*. Waterloo: Open Publishing Association (OPA), 2023, pp. 171–186.
- [4] R. Piziak, P. L. Odell, and R. Hahn, “Constructing projections on sums and intersections,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 37, no. 1, pp. 67–74, 1999.



# Algunas extensiones infinitas de $\mathbb{Q}$ con la propiedad de Bogomolov

BENJAMÍN CASTILLO<sup>1,✉</sup> 

<sup>1</sup> *Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Macul, Santiago, Chile.*

*brcastillo@uc.cl*

## RESUMEN

Sea  $\ell$  un número primo y  $K_\ell = \mathbb{Q}(\zeta_\ell)$  el cuerpo ciclotómico donde  $\zeta_\ell$  es una raíz primitiva  $\ell$ -ésima de la unidad. Eligiendo un ideal primo  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_{K_\ell}$  en el anillo de enteros algebraicos de  $K_\ell$ , denotamos por  $S_{\mathfrak{p},\ell}$  todas las extensiones de Galois de  $K_\ell$  de grado  $\ell$  donde  $\mathfrak{p}$  no se escinde. Sea  $L_{\mathfrak{p},\ell}$  el *compositum* de los cuerpos de clases de Hilbert de los cuerpos de  $S_{\mathfrak{p},\ell}$ . En este trabajo mostramos que  $L_{\mathfrak{p},\ell}$  satisface la propiedad de Bogomolov analizando ciertos grados locales sobre  $K_\ell$ . También estudiamos la relación de  $L_{\mathfrak{p},\ell}$  con otras familias existentes en la literatura que satisfacen la propiedad de Bogomolov en el caso  $\ell = 2$ .

**Palabras clave:** Alturas, propiedad de Bogomolov, grados locales.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 11G50, 11S15.

Publicado: 15 de agosto de 2025

Aceptado: 28 de marzo de 2025

Recibido: 29 de julio de 2024



©2025 B. Castillo. Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

# Some infinite extensions of $\mathbb{Q}$ satisfying Bogomolov's property

BENJAMÍN CASTILLO<sup>1,✉</sup> 

<sup>1</sup> Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Macul, Santiago, Chile.

[brcastillo@uc.cl](mailto:brcastillo@uc.cl)

## ABSTRACT

Let  $\ell$  be a prime number and  $K_\ell = \mathbb{Q}(\zeta_\ell)$  the cyclotomic field, where  $\zeta_\ell$  is a primitive  $\ell$ -root of unity. Choosing a prime ideal  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_{K_\ell}$  in the ring of algebraic integers of  $K_\ell$ , we denote by  $S_{\mathfrak{p},\ell}$  all the Galois extensions of  $K_\ell$  of degree  $\ell$  where  $\mathfrak{p}$  does not split. Let  $L_{\mathfrak{p},\ell}$  be the *compositum* of Hilbert class fields of the fields of  $S_{\mathfrak{p},\ell}$ . In this work, we show that  $L_{\mathfrak{p},\ell}$  satisfies Bogomolov's property by analyzing certain local degrees over  $K_\ell$ . We also study the relation between  $L_{\mathfrak{p},\ell}$  and other families present in the literature satisfying Bogomolov's property in the case  $\ell = 2$ .

**Keywords and Phrases:** Heights, Bogomolov property, local degrees.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 11G50, 11S15.

Published: 15 August, 2025

Accepted: 28 March, 2025

Received: 29 July, 2024



©2025 B. Castillo. This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

## 1. Introducción

Sea  $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$  un número algebraico y  $h(\alpha)$  la altura logarítmica absoluta de Weil. Por un teorema de Kronecker,  $h(\alpha) = 0$  si y solo si  $\alpha$  es cero o una raíz de la unidad. Fuera de estos casos, D. H. Lehmer preguntó si  $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]h(\alpha)$  se puede acotar inferiormente de manera uniforme en  $\alpha$  (ver [12, §13, página 476]). De manera más precisa:

**Problema de Lehmer.** *Existe un número real positivo  $c$  tal que para todo  $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$  que no sea raíz de la unidad*

$$h(\alpha) \geq \frac{c}{[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]}.$$

Algunos de los resultados más cercanos al respecto se deben a Dobrowolski en [7] y a Smyth en [20]. Sin embargo, una posible solución parece estar fuera de alcance en estos momentos, por lo que se estudian variantes más débiles del problema. Siguiendo [4], decimos que un conjunto  $\mathcal{A}$  de números algebraicos tiene la *propiedad de Bogomolov* (B) si existe un número real positivo  $T$  tal que el conjunto

$$\mathcal{A}(T) = \{\alpha \in \mathcal{A} \setminus \{0\} : h(\alpha) < T\}$$

consiste de todas las raíces de la unidad en  $\mathcal{A}$ . En otras palabras, los conjuntos con la propiedad (B) cumplen que el cero está aislado de los valores de  $h(\alpha)$  y existe una cota inferior para la altura.

Todo cuerpo de números cumple la propiedad (B), así que para encontrar ejemplos no triviales debemos ver extensiones algebraicas infinitas de  $\mathbb{Q}$ . También es fácil encontrar cuerpos que no tengan la propiedad (B), por ejemplo el cuerpo  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \dots)$  no tiene (B) pues  $h(2^{1/n}) = h(2)/n$ . Al día de hoy se conocen ejemplos y criterios de cuerpos con la propiedad (B). Daremos un breve resumen de los resultados más generales.

1973: En [17], A. Schinzel demostró que el cuerpo de números algebraicos totalmente reales  $\mathbb{Q}^{\text{tr}}$  tiene la propiedad (B).

2000: En [2], F. Amoroso y U. Zannier mostraron que la máxima extensión abeliana  $K^{\text{ab}}$  de un cuerpo de números  $K$  satisface (B). En particular, cada extensión abeliana de  $K$  satisface (B).

2001: En [4, Theorem 2], E. Bombieri y U. Zannier probaron que cada extensión de Galois infinita  $L/\mathbb{Q}$  con grado local acotado en algún primo racional (ver definición 2.1) tiene la propiedad (B).

2011: En [9], P. Habegger introdujo una familia de extensiones de Galois infinitas no abelianas sobre  $\mathbb{Q}$  que no tienen grado local acotado sobre algún primo racional y que satisfacen (B). Más concretamente, sea  $E$  una curva elíptica definida sobre  $\mathbb{Q}$  y  $E_{\text{tors}}$  el grupo de puntos de torsión en  $E$  definido en alguna clausura algebraica de  $\mathbb{Q}$ . Habegger consideró el cuerpo

$\mathbb{Q}(E_{\text{tors}})$  generado por el conjunto de coordenadas de los puntos en  $E_{\text{tors}}$  respecto a un modelo de Weierstrass de  $E$  con coeficientes racionales.

En [1], F. Amoroso, S. David y U. Zannier generalizaron el resultado sobre cuerpos con grado local acotado ([4, Theorem 2]) y extensiones abelianas ([2]).

**Teorema 1.1** (Amoroso, David, Zannier). *Sea  $K$  un cuerpo de números y  $L/K$  una extensión de Galois infinita con grupo de Galois  $G$ . Si  $E \subseteq L$  es el cuerpo fijo por el centro  $Z(G)$  y  $E/K$  tiene grado local acotado en algún lugar no arquimediano  $v$  en  $K$  acotado por  $d_0$ , entonces  $L$  tiene la propiedad (B), con cota inferior uniforme en  $v$ ,  $d_0$  y  $[K : \mathbb{Q}]$ .*

Sumado a un resultado de S. Checcoli ([5, Theorem 1]), obtuvieron el siguiente corolario:

**Corolario 1.2.** *Si  $K$  es un cuerpo de números y  $L/K$  una extensión de Galois infinita con grupo de Galois  $G$  tal que  $G/Z(G)$  tiene exponente finito  $b$ , entonces  $L$  tiene la propiedad (B), de manera uniforme en  $b$  y  $[K : \mathbb{Q}]$ .*

En este trabajo exhibiremos una familia de extensiones algebraicas infinitas de  $\mathbb{Q}$  que satisfacen (B) como consecuencia del Teorema 1.1. Además, en algunos casos particulares mostraremos que las extensiones no satisfacen la hipótesis del Corolario 1.2 (lo que se interpreta como estar «lejos del caso abeliano») y que no pertenecen a la familia expuesta por P. Habegger en [9].

Nuestra construcción es la siguiente. Sea  $\ell$  un número primo,  $K_\ell = \mathbb{Q}(\zeta_\ell)$  el cuerpo ciclotómico donde  $\zeta_\ell$  es una raíz  $\ell$ -ésima de la unidad primitiva, y sea  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_{K_\ell}$  un ideal primo en el anillo de enteros algebraicos de  $K_\ell$ . Definimos

$$S_{\mathfrak{p},\ell} = \{L/K_\ell \mid \text{una extensión de Galois con } [L : K_\ell] = \ell \text{ y tal que } \mathfrak{p} \text{ no se escinde en } L\}.$$

Para cada  $L \in S_{\mathfrak{p},\ell}$ , sea  $H_L$  el cuerpo de clases de Hilbert de  $L$  (es decir, la máxima extensión abeliana no ramificada de  $L$ ). Finalmente, sea  $L_{\mathfrak{p},\ell}$  el *compositum* de todos los  $H_L$  para  $L \in S_{\mathfrak{p},\ell}$ .

**Teorema 1.3.**  *$L_{\mathfrak{p},\ell}$  satisface (B).*

Si  $\ell = 2$  entonces  $K_\ell$  es simplemente  $\mathbb{Q}$ , así que escribimos  $p$  en vez de  $\mathfrak{p}$  y  $S_{p,2}$  es el conjunto de cuerpos cuadráticos donde  $p$  no se escinde. En este caso obtenemos los siguientes resultados.

**Teorema 1.4.** *Sea  $p$  un número primo impar y  $E$  un cuerpo de números contenido en  $L_{p,2}$  tal que  $L_{p,2}/E$  es una extensión de Galois infinita. Entonces,*

$$\text{Gal}(L_{p,2}/E)/Z(\text{Gal}(L_{p,2}/E))$$

*tiene exponente infinito.*

**Teorema 1.5.** *Sea  $p$  un primo impar. Si  $E$  es una curva elíptica definida sobre un cuerpo de números  $K$ , entonces  $L_{p,2} \not\subset K(E_{\text{tors}})$ .*

El Teorema 1.3 se sigue de que  $L_{p,\ell}/K_\ell$  es una extensión de Galois que tiene grado local acotado en el valor absoluto inducido por  $\mathfrak{p}$ . Los Teoremas 1.4 y 1.5 esencialmente extienden lo que ya se sabía del trabajo de A. Galateau en [8], donde se demuestran resultados similares para un cuerpo contenido estrictamente en  $L_{p,2}$  cuya construcción es muy parecida (la diferencia es que Galateau impone más restricciones al conjunto  $S_{p,2}$ ).

La demostración del Teorema 1.4 usa la misma idea de [8, Proposition 3.2], la cual es que el exponente del grupo de clases de cuerpos cuadráticos imaginarios crece a medida que su discriminante (en valor absoluto) lo hace (ver por ejemplo [16]). Para demostrar el Teorema 1.5 replicaremos exactamente la prueba de [8, Proposition 3.3]; si bien podríamos limitarnos a citarla, probablemente para el lector será más cómodo leerla aquí.

Para concluir la introducción deberíamos justificar que  $L_{p,\ell}$  en la mayoría de los casos es una extensión interesante, o sea que es una extensión infinita de  $\mathbb{Q}$ . Basta mostrar que el conjunto  $S_{p,\ell}$  no es finito, lo cual demostramos al final de la sección 4.

## 2. Grado local acotado

Manteniendo la notación usada en la introducción, en esta sección demostraremos que  $L_{p,\ell}/K_\ell$  es una extensión de Galois que tiene grado local acotado en el valor absoluto inducido por  $\mathfrak{p}$ , lo que nos permite mostrar la propiedad (B) para  $L_{p,\ell}$  (ver Teorema 1.3). Empecemos con una definición.

**Definición 2.1.** *Sea  $K$  un cuerpo de números,  $v$  un lugar no arquimediano en  $K$  y  $L/K$  una extensión algebraica. Decimos que  $L/K$  tiene grado local acotado en  $v$  si existe un entero  $n$  tal que para cada extensión  $w$  de  $v$  en  $L$  se tiene que  $[L_w : K_v] \leq n$ , donde  $L_w$  y  $K_v$  son las completaciones correspondientes a  $w$  y  $v$ .*

**Lema 2.2.** *Sea  $K$  un cuerpo de números y fijemos un valor absoluto no arquimediano  $v$  en  $K$ . Sea  $\mathcal{F}$  una familia infinita de extensiones finitas de  $K$ . Supongamos que existe un entero  $d$  tal que para todo  $H$  en  $\mathcal{F}$  y para toda extensión  $l$  a  $H$  de  $v$  se tiene que  $[H_l : K_v] \leq d$ . Si  $L$  es el compositum de las extensiones en  $\mathcal{F}$ , entonces  $L$  tiene grado local acotado en  $v$ .*

*Demostración.* Básicamente replicamos la demostración de [4, Proposition 1].

$K_v$  tiene una cantidad finita de extensiones de grado  $m$  (ver por ejemplo [14, Corollary 2, página 226]), lo cual aplica para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Luego, la colección  $\mathcal{C}$  de extensiones de  $K_v$  de grado a lo más  $d$  es finita. En particular, si  $M$  es el *compositum* de los cuerpos en  $\mathcal{C}$ , entonces la extensión  $M/K_v$  es finita. Por hipótesis, para cada  $H \in \mathcal{F}$  su completación en cualquier valor absoluto  $l|v$

está contenido en  $\mathcal{C}$ , entonces, si  $w$  es cualquier valor absoluto en  $L$  sobre  $v$ , podemos incrustar  $L_w \hookrightarrow M$  ya que  $L$  es el *compositum* de las extensiones en  $\mathcal{F}$ . Así,  $[L_w : K_v] \leq [M : K_v]$  donde el último sólo depende de  $v$  y  $d$ . Por lo tanto,  $L$  tiene grado local acotado en  $v$ .  $\square$

Ahora mostremos que podemos aplicar este lema a nuestra construcción.

**Proposición 2.3.** *Sea  $L \in S_{\mathfrak{p}, \ell}$  y  $H$  su cuerpo de clases de Hilbert. Si  $l$  es un valor absoluto en  $H$  sobre  $\mathfrak{p}$ , entonces*

$$[H_l : (K_\ell)_\mathfrak{p}] \leq \ell^2 \cdot (\text{orden de } \mathfrak{p} \text{ en el grupo de clases de } K_\ell)$$

donde  $(K_\ell)_\mathfrak{p}$  es la completación de  $K_\ell$  respecto a  $\mathfrak{p}$ .

*Demostración.* Por definición de  $S_{\mathfrak{p}, \ell}$  se tiene que  $\mathfrak{p}$  no se escinde en  $L$  y  $L/K_\ell$  es una extensión de Galois de grado  $\ell$ , así,  $w$  denotará a un representante del único lugar en  $L$  bajo  $l$ ; además,  $\mathfrak{P} \subseteq \mathcal{O}_H$  y  $\mathfrak{g} \subseteq \mathcal{O}_L$  denotarán a los primos correspondientes a cada valor absoluto.

Primero es claro que  $[L_w : (K_\ell)_\mathfrak{p}] = \ell$ . Por otro lado, sabemos que  $[H_l : L_w] = e_{H/L}(\mathfrak{P})f_{H/L}(\mathfrak{P})$ , donde  $e_{H/L}$  y  $f_{H/L}$  son el índice de ramificación y grado de inercia de  $\mathfrak{P}$ , así que basta calcular estos invariantes.  $H/L$  es una extensión abeliana no ramificada, por lo que  $e_{H/L}(\mathfrak{P}) = 1$  y  $f_{H/L}(\mathfrak{P}) = \text{ord}(\sigma_{\mathfrak{g}}) = \text{ord}([\mathfrak{g}])$ , donde  $\sigma_{\mathfrak{g}}$  es el elemento de Frobenius. La última igualdad viene del isomorfismo de *Recíprocidad de Artin*  $C(\mathcal{O}_L) \simeq \text{Gal}(H/L)$  dado por  $[\mathfrak{g}] \mapsto \sigma_{\mathfrak{g}}$ , donde  $C(\mathcal{O}_L)$  es el grupo de clases de  $\mathcal{O}_L$  (ver [11, Chapter V, Theorem 5.7] para una demostración).

Si  $\mathfrak{p}$  es inerte en  $L$  entonces  $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ . En el otro caso, si  $\mathfrak{p}$  se ramifica en  $L$  entonces  $\mathfrak{g}^\ell = \mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ . Luego, si  $n$  es el orden de  $\mathfrak{p}$  en el grupo de clases de  $K_\ell$  tenemos que

$$[H_l : L_w] = \text{ord}([\mathfrak{g}]) \leq \begin{cases} \ell \cdot n & \text{si } \mathfrak{p} \text{ se ramifica en } L \\ n & \text{si } \mathfrak{p} \text{ es inerte en } L \end{cases}$$

con lo cual el resultado sigue de la ley de las torres.  $\square$

El último ingrediente que falta para probar que  $L_{\mathfrak{p}, \ell}/K_\ell$  satisface (B) es mostrar que  $L_{\mathfrak{p}, \ell}/K_\ell$  es una extensión de Galois. Para esto es suficiente la siguiente buena propiedad que tienen los cuerpos de clases de Hilbert.

**Lema 2.4.** *Sea  $k$  un cuerpo de números,  $F/k$  una extensión de Galois finita y  $H_F$  el cuerpo de clases de Hilbert de  $F$ . La extensión  $H_F/k$  es de Galois.*

*Demostración.* Sea  $L/H_F$  una extensión de cuerpos y  $\sigma : H_F \rightarrow L$  un morfismo de  $k$ -álgebras. Notemos que  $\sigma(H_F)$  es una extensión abeliana no ramificada de  $\sigma(F) = F$ , con lo cual  $\sigma(H_F) \subseteq H_F$  y por tanto  $\sigma(H_F) = H_F$ . Luego, la extensión  $H_F/k$  es de Galois.  $\square$

Ahora demostrar que  $L_{\mathfrak{p},\ell}$  tiene la propiedad (B) es sencillo.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.3. Primero la extensión  $L_{\mathfrak{p},\ell}/K_\ell$  es de Galois por el Lema 2.4. Por la Proposición 2.3 tenemos que  $L_{\mathfrak{p},\ell}$  es el *compositum* de cuerpos de números tal que, para cada valor absoluto en ellos sobre  $\mathfrak{p}$ , el grado de su completación sobre  $(K_\ell)_\mathfrak{p}$  está acotado por  $\ell^2 \cdot \text{ord}([\mathfrak{p}])$ , donde  $[\mathfrak{p}]$  es la clase de  $\mathfrak{p}$  en el grupo de clases de  $K_\ell$ . Luego,  $L_{\mathfrak{p},\ell}$  tiene grado local acotado en  $\mathfrak{p}$  por el Lema 2.2. Por lo tanto,  $L_{\mathfrak{p},\ell}$  satisface (B) por el Teorema 1.1.  $\square$

### 3. El caso $\ell = 2$

En esta sección realizaremos un análisis más explícito de qué cuerpo aparece al completar  $L_{\mathfrak{p},2}$ , obteniendo la extensión bi-cuadrática de  $\mathbb{Q}_p$ , en el sentido de que es la extensión de  $\mathbb{Q}_p$  de grado 4 cuyo índice de ramificación y grado residual es 2. Esto nos va permitir dar una cota inferior para el límite inferior de la altura en  $L_{\mathfrak{p},2}$  gracias a [4, Theorem 2].

Recordemos que en el caso  $\ell = 2$  se tiene que  $K_\ell = \mathbb{Q}$ , por lo que simplificaremos la notación cambiando  $\mathfrak{p}$  por  $p$  un número primo impar (en lo que sigue es relevante que el primo  $p$  sea impar),  $S_{\mathfrak{p},2}$  por  $S_p$  y  $L_{\mathfrak{p},2}$  por  $L_p$ . En resumen, nuestro cuerpo base es  $\mathbb{Q}$ ,  $S_p$  son los cuerpos cuadráticos donde  $p$  no se escinde y  $L_p$  es el *compositum* de los cuerpos de clases de Hilbert  $H_K$  para  $K \in S_p$ .

Fijando notación, dado  $K$  en  $S_p$  sea  $H_K$  su cuerpo de clases de Hilbert,  $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}_K$  el ideal primo sobre  $p$ ,  $\mathfrak{P} \subseteq \mathcal{O}_{H_K}$  cualquier ideal primo sobre  $\mathfrak{p}$  y  $K_\mathfrak{p}$ ,  $H_\mathfrak{P}$  los cuerpos completados de  $K$  y  $H_K$  respecto a estos primos. El siguiente resultado es claro.

**Lema 3.1.** *Para  $K_\mathfrak{p}$  tenemos las siguientes posibilidades:*

- *Si  $p$  es inerte en  $K$ :  $K_\mathfrak{p}$  es la extensión cuadrática no ramificada de  $\mathbb{Q}_p$ .*
- *Si  $p$  se ramifica en  $K$ :  $K_\mathfrak{p}$  es una extensión cuadrática ramificada de  $\mathbb{Q}_p$ .*

Por otro lado, siguiendo la demostración de la Proposición 2.3 obtenemos lo siguiente.

**Proposición 3.2.** *Para  $H_\mathfrak{P}$  tenemos las siguientes posibilidades:*

- *Si  $p$  es inerte en  $K$ :  $H_\mathfrak{P}$  es la extensión cuadrática no ramificada de  $\mathbb{Q}_p$ .*
- *Si  $p$  se ramifica en  $K$  y  $\mathfrak{p}$  es principal:  $H_\mathfrak{P}$  es una extensión cuadrática ramificada de  $\mathbb{Q}_p$ .*
- *Si  $p$  se ramifica en  $K$  y  $\mathfrak{p}$  no es principal:  $H_\mathfrak{P}$  es una extensión de  $\mathbb{Q}_p$  de grado 4 moderadamente ramificada, es decir,  $e(H_\mathfrak{P}/\mathbb{Q}_p) = f(H_\mathfrak{P}/\mathbb{Q}_p) = 2$ .*

*Demostración.* Ver la demostración de la Proposición 2.3 y tener en mente que “ $\mathfrak{g}$ ” y “ $\mathfrak{p}$ ” en esa proposición son, en este caso,  $\mathfrak{p}$  y  $p$  respectivamente.  $\square$

Ahora somos capaces de especificar quienes son los cuerpos  $H_{\mathfrak{P}}$ .

**Proposición 3.3.** *Sea  $p$  un primo impar y  $K \in S_p$ . Los cuerpos  $p$ -ádicos que pueden aparecer al completar  $H_K$  respecto a un valor absoluto sobre  $p$  son  $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\zeta})$ ,  $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\zeta\pi})$ ,  $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\pi})$  y  $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\pi}, \sqrt{\zeta})$ , donde  $\pi$  es un primo fijo en  $\mathbb{Z}_p$  y  $\zeta$  es una raíz primitiva de la unidad de orden  $p-1$ .*

En particular, el compositum de todos ellos es  $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\pi}, \sqrt{\zeta})$ .

*Demostración.* La herramienta clave de la demostración es [14, Proposition 5.31].

El primer y segundo punto de la Proposición 3.2 recaen en las opciones  $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\zeta})$ ,  $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\zeta\pi})$ ,  $\mathbb{Q}_p(\sqrt{\pi})$ , donde  $\pi$  es un primo fijo en  $\mathbb{Z}_p$  y  $\zeta$  es una raíz primitiva de la unidad de orden  $p-1$ .

Para el tercer punto de la Proposición 3.2, notemos que  $H_{\mathfrak{P}}$  es la extensión cuadrática no ramificada de  $K_{\mathfrak{p}}$  (ver Proposición 2.3), así que por [14, Proposition 5.31]

$$H_{\mathfrak{P}} = K_{\mathfrak{p}}(\sqrt{\zeta}),$$

donde  $\zeta$  se puede escoger igual que antes pues estamos en el caso en que  $p$  se ramifica en  $K$ . Por el Lema 3.1 tenemos que  $K_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Q}_p(\sqrt{\pi})$  ó  $K_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Q}_p(\sqrt{\zeta\pi})$ . En cualquier caso,

$$H_{\mathfrak{P}} = \mathbb{Q}_p(\sqrt{\pi}, \sqrt{\zeta})$$

que es la extensión bi-cuadrática de  $\mathbb{Q}_p$  por [14, Proposition 5.32].  $\square$

**Proposición 3.4.**  *$L_p$  satisface que*

$$\liminf_{\alpha \in L_p} h(\alpha) \geq \frac{\log p}{4(p^2 + 1)}.$$

*Demostración.* Sea  $M = \mathbb{Q}_p(\sqrt{\pi}, \sqrt{\zeta})$  la extensión bi-cuadrática de  $\mathbb{Q}_p$  donde  $\pi$  es un primo fijo en  $\mathbb{Z}_p$  y  $\zeta$  una raíz de la unidad de orden  $p-1$ . En particular,  $e(M/\mathbb{Q}_p) = f(M/\mathbb{Q}_p) = 2$ .

Si  $v|p$  es un valor absoluto en  $L_p$ , por la Proposición 3.2 podemos tomar un  $H_K$  tal que  $(H_K)_v \simeq \mathbb{Q}_p(\sqrt{\pi}, \sqrt{\zeta})$ . Luego, por la Proposición 3.3 tenemos la incrustación

$$H_K \hookrightarrow L_p \hookrightarrow \mathbb{Q}_p(\sqrt{\pi}, \sqrt{\zeta})$$

con lo cual  $(L_p)_v \simeq \mathbb{Q}_p(\sqrt{\pi}, \sqrt{\zeta})$ .

Con esto,  $p \in S(L_p)$  donde  $S(L_p)$  es el conjunto de números primos  $q$  tal que  $L_p$  se puede incrustar en una extensión finita  $L$  de  $\mathbb{Q}_q$ . Como  $L_p/\mathbb{Q}$  es una extensión normal (ver Lema 2.4) podemos usar la cota inferior de [4, Theorem 2], la cual es

$$\liminf_{\alpha \in L_p} h(\alpha) \geq \frac{1}{2} \sum_{q \in S(L_p)} \frac{\log q}{e_q(q^{f_q} + 1)} \geq \frac{\log p}{4(p^2 + 1)}. \quad \square$$

## 4. Resultados auxiliares

En esta sección demostraremos los resultados necesarios para la demostración del Teorema 1.4. Esta sección se inspira en precisar la idea utilizada en [8, Proposition 3.2]. Como la demostración del Teorema 1.4 es sencilla, para el lector probablemente sea más eficiente pasar directamente a la siguiente sección y volver en caso de querer verificar los detalles. Al final también mostraremos que  $S_{p,\ell}$  no es finito. Empecemos con la noción de grupo dihedral generalizado.

**Definición 4.1.** *Sea  $N$  un grupo abeliano no trivial. El grupo dihedral generalizado de  $N$  es el producto semidirecto*

$$N \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

donde  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  actúa en  $N$  invirtiendo elementos, así que la operación de grupo viene dada por

$$\begin{aligned} (n_1, 0) \cdot (n_2, a) &= (n_1 n_2, a) \\ (n_1, 1) \cdot (n_2, a) &= (n_1 n_2^{-1}, 1 + a) \end{aligned}$$

Lo denotamos por  $\text{Dih}(N)$ .

El siguiente resultado elemental nos será bastante útil.

**Lema 4.2.** *Si  $N$  es un grupo abeliano no trivial entonces  $\text{Z}(\text{Dih}(N))$  es un grupo de exponente 2.*

*Demostración.* Sea  $n \in N$ . Si  $(n, 0) \in \text{Z}(\text{Dih}(N))$ , operando  $(n, 0)$  con  $(n, 1)$  vemos que

$$(n, 0) \cdot (n, 1) = (n^2, 1) = (e_N, 1) = (n, 1) \cdot (n, 0)$$

con lo cual  $n^2 = e_N$  y  $(n, 0)$  tiene orden 2.

Por otro lado, es claro que todo elemento en  $\text{Dih}(N)$  de la forma  $(n, 1)$  tiene orden 2.  $\square$

**Lema 4.3.** *Si  $K$  es un cuerpo cuadrático imaginario y  $H_K$  su cuerpo de clases de Hilbert, el grupo de Galois de  $H_K/\mathbb{Q}$  es un grupo dihedral generalizado*

$$\text{Gal}(H_K/\mathbb{Q}) \simeq C(\mathcal{O}_K) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

*Demostración.* La extensión  $H_K/\mathbb{Q}$  es de Galois por el Lema 2.4. Fijemos una incrustación  $H_K \subset \mathbb{C}$

y sea  $\tau : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  la conjugación compleja. Notemos que tenemos la secuencia exacta

$$0 \rightarrow \text{Gal}(H_K/K) \rightarrow \text{Gal}(H_K/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

la cual se escinde pues  $\tau \in \text{Gal}(H_K/\mathbb{Q})$  (ver Lema 2.4) y tenemos la sección  $\tau|_K \mapsto \tau|_{H_K}$ . Entonces,

$$\text{Gal}(H_K/\mathbb{Q}) \simeq \text{Gal}(H_K/K) \rtimes \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$$

donde  $\tau$  actúa en  $\text{Gal}(H_K/K)$  conjugando elementos.

Si  $\mathfrak{p}$  es un ideal primo de  $\mathcal{O}_K$  y  $\sigma_{\mathfrak{p}}$  el elemento de Frobenius, es sabido que  $\sigma_{\tau(\mathfrak{p})} = \tau \circ \sigma_{\mathfrak{p}} \circ \tau^{-1}$ , así que en vista del isomorfismo de *Recíprocidad de Artin*  $C(\mathcal{O}_K) \simeq \text{Gal}(H/K)$  dado por  $[\mathfrak{p}] \mapsto \sigma_{\mathfrak{p}}$  (ver [11, Chapter V, Theorem 5.7] para una demostración),  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  actúa en el grupo de clases  $C(\mathcal{O}_K)$  mandando a un primo a su conjugado, que es su inverso pues estamos en una extensión cuadrática. Por lo tanto,

$$\text{Gal}(H_K/\mathbb{Q}) \simeq C(\mathcal{O}_K) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

donde  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  actúa en  $C(\mathcal{O}_K)$  invirtiendo elementos.  $\square$

El lema anterior es lo que nos va a permitir hablar sobre el exponente del grupo de clases  $C(\mathcal{O}_K)$  de un cuerpo cuadrático imaginario  $K$  (recordamos que el exponente de un grupo es el mínimo común múltiplo de los ordenes de los elementos del grupo). Ahora precisaremos la idea de que este exponente va creciendo a medida que el discriminante de  $K$  lo hace. Primero necesitamos un resultado de densidad.

**Lema 4.4.** *Sea  $p$  un número primo impar. Si  $\mathcal{A}$  es el conjunto de primos que son residuos cuadráticos módulo  $p$  y que además son congruentes a 3 módulo 4, entonces  $d(\mathcal{A}) = 1/4$  donde  $d(\mathcal{A})$  es la densidad de Dirichlet.*

*Demostración.* Sean  $a, m \in \mathbb{Z}$  con  $(a, m) = 1$ , sea  $\mathcal{P}(a; m)$  el conjunto de primos  $q$  tal que  $q \equiv a$  mód  $m$ .

Si  $r$  es un residuo cuadrático módulo  $p$  y  $r \equiv 3$  mód 4, por el teorema chino del resto existe una única clase  $s$  en  $\mathbb{Z}/4p\mathbb{Z}$  tal que  $r \equiv s$  mód  $4p$ . Por el teorema de Dirichlet sobre primos en progresión aritmética  $d(\mathcal{P}(s; 4p)) = 1/(2(p-1))$  (ver [10, Theorem 1, página 251]). Además, es sabido que la cantidad de residuos cuadráticos módulo  $p$  es  $(p-1)/2$ , así que por la aditividad de la densidad  $d(\mathcal{A}) = 1/4$ .  $\square$

El siguiente teorema se debe a F. Pappalardi.

**Teorema 4.5.** *Si  $d$  es un entero positivo y  $m(d)$  es el exponente del grupo de clases de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ , para todos los  $d < x$  tales que  $-d$  es un discriminante se tiene que*

$$m(d) > \frac{\log d/4}{\log \log d},$$

*salvo a lo más  $O\left(x^{1-A(\log \log x)^{-1}}\right)$  excepciones. Más precisamente, para cada  $A \leq \frac{1}{2} \log 2$  se tiene que*

$$\#\left\{d \leq x : m(d) \leq \frac{\log d/4}{\log \log d}\right\} \ll_A x^{1-A(\log \log x)^{-1}}.$$

*Demostración.* Ver [16, Theorem 1.2]. □

**Observación 4.6.** *En particular, el conjunto de excepciones tiene densidad natural cero y por ende también tiene densidad de Dirichlet cero.*

Nos interesa que el exponente vaya creciendo en un grupo específico de cuerpos cuadráticos imaginarios.

**Proposición 4.7.** *Sea  $p$  un número primo impar. Si  $\mathcal{C}$  es la colección de cuerpos cuadráticos  $\mathbb{Q}(\sqrt{-q})$  donde  $q$  es un primo congruente a 3 módulo 4 que es residuo cuadrático módulo  $p$ , entonces, para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe  $\mathbb{Q}(\sqrt{-q_n}) \in \mathcal{C}$  tal que*

$$m(q_n) > n$$

*donde  $m(q_n)$  es el exponente del grupo de clases de  $\mathbb{Q}(\sqrt{-q_n})$ .*

*Demostración.* La condición  $q \equiv 3 \pmod{4}$  ciertamente hace que  $-q$  sea un discriminante. Notemos que si  $A$  es un número real positivo, se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{A(\log \log x)^{-1}}}{\log x} = +\infty.$$

Por el teorema de los números primos,  $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ , luego, el cálculo anterior nos muestra que la cantidad de primos menores o iguales a  $x$  sobrepasa al conjunto de excepciones del Teorema 4.5 a medida que  $x$  crece, y por ende podemos encontrar un primo  $q$  suficientemente grande tal que  $m(q) > n$ . Como esta condición depende del tamaño de  $q$ , podemos tomar un  $q_n$  tal que  $\mathbb{Q}(\sqrt{-q_n}) \in \mathcal{C}$  y  $m(q_n) > n$ . Notemos que si esto último no fuera posible, quiere decir que los números mayores que  $q$  del conjunto  $\mathcal{A}$  del Lema 4.4 están todos contenidos en el conjunto de excepciones del Teorema 4.5. Sin embargo, esto implicaría que  $\mathcal{A}$  tiene densidad de Dirichlet cero, lo cual no es cierto. □

**Observación 4.8.** *Lo mismo aplica si consideramos  $q$  que no es residuo cuadrático módulo  $p$ , lo cual será necesario en la demostración del Teorema 1.4.*

Los siguientes resultados son para justificar que  $L_{\mathfrak{p},\ell}$  en general es una extensión infinita de  $\mathbb{Q}$ . Recordemos que la notación utilizada se encuentra en la introducción.

**Lema 4.9.** *Para cada clase  $\bar{\alpha} \in \mathcal{O}_{K_\ell}/\mathfrak{p}$ , existen infinitos  $\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}}$  tal que  $x^\ell - \beta$  es irreducible en  $K_\ell$ .*

*Demostración.* Sea  $\alpha$  representante de alguna clase en  $\mathcal{O}_{K_\ell}/\mathfrak{p}$  y supongamos que  $\alpha$  es una potencia  $\ell$ -ésima en  $K_\ell$ , es decir, existe  $a \in K_\ell$  tal que  $\alpha = a^\ell$ . En particular,  $a \in \mathcal{O}_{K_\ell}$ .

Si  $p \in \mathfrak{p}$  tenemos que  $\alpha \equiv \alpha + (p^\ell)^n \pmod{\mathfrak{p}}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $\alpha + (p^\ell)^n$  es una potencia  $\ell$ -ésima, digamos,  $\alpha + (p^\ell)^n = c_n^\ell$  con  $c_n \in \mathcal{O}_{K_\ell}$ , entonces  $a^\ell + (p^n)^\ell = c_n^\ell$  y  $(a, p^n, c_n) \in (\mathcal{O}_{K_\ell})^3$  serían soluciones de la ecuación

$$x^\ell + y^\ell = z^\ell$$

en  $\mathcal{O}_{K_\ell} = \mathbb{Z}[\zeta_\ell]$ .

Si  $\ell > 3$ , el Teorema de Faltings (*cf.* [3, página 352]) asegura que la curva  $X^\ell + Y^\ell = 1$  tiene una cantidad finita de puntos racionales en  $K_\ell$ . Si  $\ell = 3$ , la ecuación no tiene soluciones por el teorema de Kummer sobre la ecuación de Fermat para primos regulares (*cf.* [15, pp. 37-38]). Luego, en ambos casos existen infinitos  $\beta_n = \alpha + (p^\ell)^n$  tal que  $x^\ell - \beta_n$  es irreducible.

Si  $\ell = 2$ , el argumento anterior no funciona. Sin embargo, en ese caso  $\mathcal{O}_{K_\ell} = \mathbb{Z}$  por lo que el resultado es claro.  $\square$

**Proposición 4.10.**  *$S_{\mathfrak{p},\ell}$  no es finito cuando  $\mathfrak{p} \nmid \ell$ .*

*Demostración.* Si  $L$  es una extensión de Galois de  $K_\ell$  de grado  $\ell$  podemos asumir que  $L = K_\ell(\sqrt[\ell]{\alpha})$  para algún  $\alpha \in \mathcal{O}_{K_\ell}$ , *i.e.*, cuyo generador tiene polinomio minimal  $x^\ell - \alpha \in \mathcal{O}_{K_\ell}[x]$ . Nos limitaremos a analizar bajo qué condiciones  $\mathfrak{p}$  es inerte en  $L$ .

Si  $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$  entonces  $x^\ell - \alpha$  es separable módulo  $\mathfrak{p}$  y por ende  $\mathfrak{p}$  no se ramifica en  $L$ . Además,  $\mathfrak{p}$  se escinde en  $L$  si y solo si  $x^\ell \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}}$  tiene solución en  $\mathcal{O}_{K_\ell}$  (ver por ejemplo [6, Proposition 5.11]). Tomando un generador de  $(\mathcal{O}_{K_\ell}/\mathfrak{p})^\times$  es un simple ejercicio ver que esto último es equivalente a que

$$\alpha^{\frac{N(\mathfrak{p})-1}{(\ell, N(\mathfrak{p})-1)}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Sea  $s$  la característica de  $\mathcal{O}_{K_\ell}/\mathfrak{p}$ . Notemos que  $N(\mathfrak{p}) - 1 = s^{f_\mathfrak{p}} - 1$  donde  $f_\mathfrak{p}$  es el grado de inercia de  $\mathfrak{p}$ . Por otro lado, recordemos que  $K_\ell = \mathbb{Q}(\zeta_\ell)$  es un cuerpo ciclotómico, con lo cual  $f_\mathfrak{p} = \text{ord}_{\mathbb{F}_\ell^\times}(s)$  y por ende  $(\ell, N(\mathfrak{p}) - 1) = \ell$ . En resumen,

$$\mathfrak{p} \text{ se escinde en } L \iff \alpha^{\frac{N(\mathfrak{p})-1}{\ell}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Luego, en el caso de que  $\alpha$  no sea raíz del polinomio  $x \cdot (x^{\frac{N(\mathfrak{p})-1}{\ell}} - 1)$  módulo  $\mathfrak{p}$  se tendrá que  $\mathfrak{p}$  es inerte en  $L$ . El lema anterior muestra que podemos encontrar una cantidad infinita de extensiones  $L/K_\ell$  de este tipo, lo cual concluye la demostración.  $\square$

## 5. Relación de $L_{\mathfrak{p},2}$ con otras familias

En esta última sección vamos a probar el Teorema 1.4 y Teorema 1.5. También recordamos que la demostración del Teorema 1.5 se puede encontrar en [8, Proposition 3.3] y aquí simplemente la vamos a reescribir.

Al igual que en la sección 3, simplificamos la notación cambiando  $\mathfrak{p}$  por  $p$  un número primo impar,  $S_{\mathfrak{p},2}$  por  $S_p$  y  $L_{\mathfrak{p},2}$  por  $L_p$ . En resumen, nuestro cuerpo base es  $\mathbb{Q}$ ,  $S_p$  son los cuerpos cuadráticos donde  $p$  no se escinde y  $L_p$  es el *compositum* de los cuerpos de clases de Hilbert  $H_K$  para  $K \in S_p$ .

Consideremos la colección

$$R_p = \left\{ \mathbb{Q}(\sqrt{-q}) : q \text{ es primo, } q \equiv 3 \pmod{4} \text{ y } \left( \frac{-q}{p} \right) = -1 \right\}$$

donde  $(\cdot)$  es el símbolo de Legendre (de hecho, esta es la colección utilizada por A. Galateau en [8]). Con estas condiciones  $-q$  es un discriminante y  $p$  es inerte en  $\mathbb{Q}(\sqrt{-q})$ , por lo que  $R_p \subset S_p$ . La ventaja de trabajar con los cuerpos de clases de Hilbert de estos cuerpos cuadráticos es que su intersección a pares es trivial.

**Lema 5.1.** *Sean  $K$  y  $K'$  cuerpos cuadráticos distintos contenidos en  $R_p$  y  $H_K$ ,  $H_{K'}$  los cuerpos de clases de Hilbert respectivos. Se tiene que  $H_K \cap H_{K'} = \mathbb{Q}$ .*

*Demostración.* Sea  $q$  un número primo. Notemos que  $H_{\mathbb{Q}(\sqrt{-q})}/\mathbb{Q}$  se ramifica solo en  $q$ , ya que  $\mathbb{Q}(\sqrt{-q})/\mathbb{Q}$  se ramifica solo en  $q$  y  $H_{\mathbb{Q}(\sqrt{-q})}/\mathbb{Q}(\sqrt{-q})$  no se ramifica.

Si  $q$  y  $s$  son primos distintos, la intersección de  $H_{\mathbb{Q}(\sqrt{-q})}$  y  $H_{\mathbb{Q}(\sqrt{-s})}$  es trivial, pues en caso contrario tendría ramificación por el teorema de Minkowski (*cf.* [15, Chapter III, (2.17)]) la cual se extendería sobre estos dos cuerpos.  $\square$

Ahora estamos listos para probar el Teorema 1.4.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.4. La demostración será por contradicción, asumamos que este exponente es finito y llamémoslo  $I$ .

Al existir una cantidad finita de cuerpos intermedios  $E/M/\mathbb{Q}$  solo puede haber una cantidad finita de  $K \in R_p$  tal que  $H_K \cap E \neq \mathbb{Q}$ , ya que por el Lema 5.1 estos cuerpos no pueden repetirse cuando variamos  $K$ . Entonces, por la Proposición 4.7 podemos fijar un  $K \in R_p$  tal que  $C(\mathcal{O}_K)$  tiene exponente mayor que  $2I$  y  $H_K \cap E = \mathbb{Q}$ . Con esto, siendo  $H_K E$  el *compositum* de  $H_K$  y  $E$ , tenemos que

$$\text{Gal}(H_K E/E) \simeq \text{Gal}(H_K/\mathbb{Q})$$

y por el Lema 4.3

$$\text{Gal}(H_K E/E) \simeq C(\mathcal{O}_K) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \quad (5.1)$$

Tenemos las extensiones  $L_p/H_K E/E$  y además la extensión  $H_K E/E$  es de Galois, por lo que  $\text{Gal}(H_K E/E)$  es isomorfo a un cociente de  $\text{Gal}(L_p/E)$  que llamaremos  $C$ . Notemos que la proyección  $\pi : \text{Gal}(L_p/E) \rightarrow C$  induce un homomorfismo sobrejetivo

$$\text{Gal}(L_p/E)/\text{Z}(\text{Gal}(L_p/E)) \twoheadrightarrow C/\text{Z}(C),$$

con lo cual  $\text{Gal}(H_K E/E)/\text{Z}(\text{Gal}(H_K E/E))$  tiene exponente menor o igual que  $I$ . Luego, el isomorfismo (5.1) y Lema 4.2 nos dice que  $C(\mathcal{O}_K)$  tiene exponente menor o igual que  $2I$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto,  $I$  no puede ser finito.  $\square$

Por último, veamos que  $L_p$  no pertenece a la familia establecida por Habegger ([9]).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.5. Por contradicción supongamos que  $L_p \subset K(E_{\text{tors}})$ .

Si  $E$  tiene multiplicación compleja,  $K(E_{\text{tors}}) \subset K^{\text{ab}}$  (ver por ejemplo [19, página 428]) con lo cual  $\text{Gal}(L_p/L_p \cap K) \simeq \text{Gal}(L_p K/K)$  sería abeliano, lo que contradice el Teorema 1.4.

Si  $E$  no tiene multiplicación compleja, sea  $q$  un número primo que satisface las condiciones de  $R_p$  y es suficientemente grande de tal forma que  $q$  no ramifica en  $K$ , la curva elíptica  $E$  tiene buena reducción en todos los primos de  $K$  sobre  $q$  y es posible ocupar el teorema de imagen abierta de Serre ([18]):

$$\text{Gal}(K(E[q])/K) \simeq \text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$$

donde  $E[q]$  son los puntos de  $q$ -torsión de  $E$ .

Si  $M_q = \mathbb{Q}(\sqrt{-q})$  y  $H_{M_q}$  su cuerpo de clases de Hilbert, la extensión  $H_{M_q}/\mathbb{Q}$  ramifica moderadamente en  $q$  y no ramifica en otros primos por lo que  $H_{M_q} \subseteq K(E[q])$ . Además, podemos escoger  $q$  tal que

$$\text{Gal}(H_{M_q}/\mathbb{Q}) \simeq C(\mathcal{O}_{M_q}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

(donde  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  actúa invirtiendo elementos) no sea abeliano, para esto basta que  $C(\mathcal{O}_{M_q})$  no tenga exponente 2 (ver Lema 4.2 y Lema 4.3).

Es posible incrustar este grupo de Galois como un subgrupo normal de  $\text{GL}_2(\mathbb{F}_q)$  que no está contenido en su centro. Al ser  $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_q)$  un grupo simple, se tiene que  $|\text{Gal}(H_{M_q}/\mathbb{Q})| \geq q(q^2 - 1)$  y por ende

$$|C(\mathcal{O}_{M_q})| \geq \frac{q(q^2 - 1)}{2}.$$

Siguiendo [13], por la fórmula analítica del número de clases tenemos que

$$|C(\mathcal{O}_{M_q})| = \frac{\omega(M_q)\sqrt{q}}{2\pi} L(1, \chi),$$

donde  $\omega(M_q)$  es el número de raíces de la unidad en  $M_q$  y  $\chi$  el carácter asociado a  $M_q$ . Sabemos que  $\omega(M_q) \leq 6$  y  $L(1, \chi) \leq \log(\sqrt{q}) + 1$ , como se observa en [13, página 214]. Luego,

$$|C(\mathcal{O}_{M_q})| \leq \frac{3}{\pi} \sqrt{q} (\log(\sqrt{q}) + 1)$$

llegando a una contradicción.  $\square$

## Agradecimientos

Este trabajo fue principalmente el resultado de mi tesis de Magíster; agradezco al profesor Ricardo Menares quien me enseñó sus ideas y guió durante ese proceso. También agradezco a los evaluadores anónimos por sus valiosos comentarios y correcciones que mejoraron la calidad de este manuscrito.

## Referencias

- [1] F. Amoroso, S. David, y U. Zannier, “On fields with property (B),” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 142, no. 6, pp. 1893–1910, 2014, doi:10.1090/S0002-9939-2014-11925-3.
- [2] F. Amoroso y U. Zannier, “A relative Dobrowolski lower bound over abelian extensions,” *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, vol. 29, no. 3, pp. 711–727, 2000.
- [3] E. Bombieri y W. Gubler, *Heights in Diophantine geometry*. Cambridge university press, 2006.
- [4] E. Bombieri y U. Zannier, “A note on heights in certain infinite extensions of  $\mathbb{Q}$ ,” *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni*, vol. 12, no. 1, pp. 5–14, 2001.
- [5] S. Checcoli, “Fields of algebraic numbers with bounded local degrees and their properties,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 365, no. 4, pp. 2223–2240, 2013, doi:10.1090/S0002-9947-2012-05712-6.
- [6] D. Cox, *Primes of the Form  $x^2+ny^2$ : Fermat, Class Field Theory, and Complex Multiplication*, 2nd ed., ser. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2014.
- [7] E. Dobrowolski, “On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial,” *Acta Arithmetica*, vol. 34, no. 4, pp. 391–401, 1979.
- [8] A. Galateau, “Small height in fields generated by singular moduli,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 144, no. 7, pp. 2771–2786, 2016, doi:10.1090/proc/13058.
- [9] P. Habegger, “Small height and infinite nonabelian extensions,” *Duke Mathematical Journal*, vol. 162, no. 11, pp. 2027 – 2076, 2013, doi:10.1215/00127094-2331342.
- [10] K. Ireland y M. Rosen, *A classical introduction to modern number theory*. Springer New York, NY, 1982, vol. 84 (First edition), doi:10.1007/978-1-4757-1779-2.
- [11] G. J. Janusz, *Algebraic number fields*. American Mathematical Society, 1996, vol. 7 (Second edition).
- [12] D. H. Lehmer, “Factorization of certain cyclotomic functions,” *Annals of Mathematics*, vol. 34, no. 3, pp. 461–479, 1933, doi:10.2307/1968172.

- [13] S. Louboutin, “ $L$ -functions and class numbers of imaginary quadratic fields and of quadratic extensions of an imaginary quadratic field,” *Mathematics of Computation*, vol. 59, no. 199, pp. 213–230, 1992, doi:10.2307/2152992.
- [14] W. Narkiewicz, *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, 3rd ed., ser. Springer Monographs in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 2004, doi:10.1007/978-3-662-07001-7.
- [15] J. Neukirch, *Algebraic number theory*. Springer Berlin, Heidelberg, 1999, vol. 322.
- [16] F. Pappalardi, “On the exponent of the ideal class group of  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ ,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 123, no. 3, pp. 663–671, 1995, doi:10.2307/2160784.
- [17] A. Schinzel, “On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic number,” *Acta Arithmetica*, vol. 24, no. 4, pp. 385–399, 1973.
- [18] J.-P. Serre, “Propriétés galoisiennes des points d’ordre fini des courbes elliptiques,” *Inventiones mathematicae*, vol. 15, pp. 259–331, 1971, doi:10.1007/BF01405086.
- [19] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, 2nd ed. Springer New York, NY, 2009, doi: 10.1007/978-0-387-09494-6.
- [20] C. Smyth, “The Mahler measure of algebraic numbers: a survey,” in *Number theory and polynomials. Proceedings of the workshop, Bristol, UK, April 3–7, 2006*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008, pp. 322–349, doi: 10.1017/CBO9780511721274.021.



# Una observación sencilla sobre vectores de constantes de Riemann y divisores no-especiales de curvas generalizadas de Fermat

RUBÉN A. HIDALGO<sup>1,✉</sup> 

<sup>1</sup> Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile.

[ruben.hidalgo@ufrontera.cl](mailto:ruben.hidalgo@ufrontera.cl)<sup>✉</sup>

## RESUMEN

Una superficie de Riemann cerrada  $S$  es llamada una curva generalizada de Fermat de tipo  $(k, n)$ , donde  $k, n \geq 2$  son enteros tales que  $(k-1)(n-1) > 2$ , si admite un grupo  $H \cong \mathbb{Z}_k^n$  de automorfismos conformes de manera que el orbifold cociente  $S/H$  sea de género cero y tenga exactamente  $n+1$  puntos cónicos, cada uno de ellos de orden  $k$ .

Si un elemento de  $H$ , de orden  $k$ , tiene puntos fijos, entonces tiene exactamente  $k^{n-1}$  puntos fijos, digamos  $q_1, \dots, q_{k^{n-1}} \in S$ . Por cada  $q_j$  tenemos asociado su vector de constantes de Riemann  $-2\mathcal{K}_{q_j} \in JS$ , donde  $JS$  es la variedad jacobiana de  $S$ . Nuestra primera observación es que  $\mathcal{K}_{q_1} + \dots + \mathcal{K}_{q_{k^{n-1}}}$  es un punto de torsión de orden dos en  $JS$ .

Sea  $D$  un divisor efectivo de grado  $g_{k,n}$ , el género de  $S$ . Observamos que  $D$  no puede ser  $H$ -invariante. En el caso que  $D$  tenga soporte en los puntos fijos de los elementos no-triviales de  $H$ , entonces obtenemos condiciones algebraicas, necesarias y suficientes, para que  $D$  sea no-especial.

**Palabras clave:** Curvas algebraicas, superficies de Riemann, automorfismos.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 30F10, 14H37, 14H10, 14H45.

Publicado: 18 de agosto de 2025

Aceptado: 06 de mayo de 2025

Recibido: 03 de octubre de 2024



©2025 R. A. Hidalgo. Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

# A simple observation concerning the vector of Riemann constants and non-special divisors of generalized Fermat curves

RUBÉN A. HIDALGO<sup>1,✉</sup> 

<sup>1</sup> Departamento de Matemática y  
Estadística, Universidad de La Frontera,  
Temuco, Chile.

[ruben.hidalgo@ufrontera.cl](mailto:ruben.hidalgo@ufrontera.cl)<sup>✉</sup>

## ABSTRACT

A closed Riemann surface  $S$  is called a generalized Fermat curve of type  $(k, n)$ , where  $k, n \geq 2$  are integers such that  $(k-1)(n-1) > 2$ , if it admits a group  $H \cong \mathbb{Z}_k^n$  of conformal automorphisms such that the quotient orbifold  $S/H$  has genus zero and has exactly  $n+1$  conical points, each of them of order  $k$ .

If an element of  $H$ , of order  $k$ , has fixed points, then it has exactly  $k^{n-1}$  fixed points, say  $q_1, \dots, q_{k^{n-1}} \in S$ . To each  $q_j$  we associate its vector of Riemann constants  $-2\mathcal{K}_{q_j} \in JS$ , where  $JS$  is the jacobian variety of  $S$ . Our first observation is that  $\mathcal{K}_{q_1} + \dots + \mathcal{K}_{q_{k^{n-1}}}$  is an order two torsion point in  $JS$ .

Let  $D$  be an effective divisor of degree  $g_{k,n}$ , the genus of  $S$ . We observe that  $D$  cannot be  $H$ -invariant. In the case that  $D$  is supported on the fixed points of the non-trivial elements of  $H$ , then we obtain algebraic conditions, necessary and sufficient, for  $D$  to be not-special.

**Keywords and Phrases:** Algebraic curves, Riemann surfaces, automorphisms.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 30F10, 14H37, 14H10, 14H45.

Published: 18 August, 2025

Accepted: 06 May, 2025

Received: 03 October, 2024



©2025 R. A. Hidalgo. This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

## 1. Introducción

Sea  $S$  una superficie de Riemann compacta de género  $g \geq 2$  y  $\text{Aut}(S)$  su grupo (finito) de automorfismos conformes (holomorfos). En la teoría general de superficies de Riemann, hay un interés en encontrar fórmulas tipo Thomae [16, 17] para cubrimientos (ramificados) Galois  $\pi : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , cuyo grupo de transformaciones de cubrimiento  $A \leq \text{Aut}(S)$  es abeliano (decimos que  $\pi$  es un cubrimiento abeliano). Con tal propósito, es importante encontrar divisores efectivos de grado  $g$  no-especiales que sean  $A$ -invariantes y cuyo soporte está contenido en el conjunto de los puntos fijos de los elementos no-triviales de  $A$ .

En el caso que  $S$  es hiperelíptica y  $A \cong \mathbb{Z}_2$  es generado por la involución hiperelíptica, esto ha sido resuelto por Thomae [16, 17] y Frobenius [7]. Una generalización se ha obtenido para algunos casos de superficies cíclicas  $n$ -gonales ( $n \geq 2$ ) es decir, cuando  $A \cong \mathbb{Z}_n$  y  $S/A$  tiene género cero (ver [8] en el caso  $n$  primo, y [1–4, 6, 15, 18] para el caso totalmente ramificado). En el caso general, en [14], se ha observado que, en caso de existir, un divisor efectivo en  $S$  que es  $A$ -invariante y de grado  $g$  es no-especial si y sólo si cierta relación algebraica se cumple. Además, tales divisores deben estar necesariamente soportados en los puntos fijos de los elementos no-triviales de  $A$  ([14, Theorem 4.4]). Desafortunadamente, no siempre pueden existir tales tipos de divisores. En este artículo, veremos pares  $(S, A)$  donde esta situación de no existencia ocurre.

Un par  $(S, H)$  es llamado un par generalizado de Fermat de tipo  $(k, n)$ , donde  $k, n \geq 2$  son enteros tales  $(n-1)(k-1) > 2$ , si  $H \cong \mathbb{Z}_k^n$ , y el orbifold cociente  $S/H$  es de género cero y con exactamente  $n+1$  puntos cónicos, cada uno de ellos de orden  $k$ . La superficie  $S$  (respectivamente, el grupo  $H$ ) es llamada una curva generalizada de Fermat (respectivamente, un grupo generalizado de Fermat) de tipo  $(k, n)$ . La fórmula de Riemann-Hurwitz asegura que  $S$  tiene género  $g_{k,n} = 1 + \frac{k^{n-1}}{2}((n-1)(k-1) - 2) \geq 5$ . En [9], se observó que  $S$  es no-hiperelíptica y se construyó una ecuación algebraica para  $S$ , dada por un cierto producto fibrado de  $(n-1)$  curvas clásicas de Fermat de grado  $k$ , y cuyos coeficientes son dados por los valores cónicos de  $S/H$  (Sección 3.2). En [12], se verificó que  $H$  es el único grupo generalizado de Fermat de tipo  $(k, n)$  en  $S$  (esta propiedad de unicidad permite, de cierto modo, mirar a  $S$  como un símil al caso de superficies hiperelípticas, donde  $H$  suple el rol del grupo generado por la involución hiperelíptica). De hecho, en [11], se verificó que  $S$  no puede tener otro grupo generalizado de Fermat de tipo  $(k', n')$  si  $k' \neq k$  o  $n' \neq n$ . El grupo generalizado de Fermat  $H$  tiene un conjunto de generadores  $\{a_1, \dots, a_{n+1}\} \subset H$  que satisface lo siguiente:

- (i)  $a_1 \cdots a_{n+1} = 1$ ,
- (ii) todo elemento no-trivial de  $H$  que tiene puntos fijos es potencia de alguno de los  $a_j$ , y
- (iii) el ángulo de rotación de cada  $a_j$  en cada uno de sus puntos fijos es  $2\pi i/k$ .

Cada elemento  $a_j$ , donde  $j = 1, \dots, n+1$ , es llamado un generador estándar de  $H$ , y tiene exactamente  $k^{n-1}$  puntos fijos. El conjunto  $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$  se llama un conjunto estándar de generadores de  $H$ .

Notemos que la superficie generalizada de Fermat  $S$  es el cubriente homológico del orbifold de Riemann  $\mathcal{O}_{k,n} = S/H$  (la esfera de Riemann con exactamente  $n+1$  puntos cónicos, cada uno de orden  $k$ ). La unicidad del grupo generalizado de Fermat es equivalente a decir que dos orbifolds  $\mathcal{O}_{k,n}$  y  $\mathcal{O}_{k',n'}$  son biholomórficamente equivalentes si y sólo si sus correspondientes cubrientes homológicos son biholomórficamente equivalentes (una especie de teorema de Torelli para orbifolds). Equivalentemente, si  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son dos grupos Fuchsianos, digamos que  $\Gamma_j$  tiene firma  $(0; k_j, \dots, k_j)$  para  $j = 1, 2$ , entonces  $\Gamma_1 = \Gamma_2$  si y sólo si  $\Gamma'_1 = \Gamma'_2$ , donde  $\Gamma'_j$  denota el subgrupo derivado de  $\Gamma_j$ .

Uno de los resultados de este trabajo permite notar que las ideas usadas en los casos de cubrimientos abelianos antes considerados (por ejemplo, los cíclicos y los abelianos que satisfacen las propiedades en [14]) no pueden ser usadas en el caso de los grupos de Fermat generalizados. En efecto, sea  $D$  un divisor efectivo de grado  $g_{k,n}$  en  $S$ . En la Proposición 3.9, observamos que  $D$  no puede ser invariante bajo ningún subgrupo de  $H$  que contenga un elemento de orden  $d \geq 2$ , que no sea la potencia de algún generador estándar, en ninguna de las siguientes situaciones:

1.  $d \geq 3$ .
2.  $d = 2$  y  $k$  es un múltiplo de 4.
3.  $d = 2$  y  $n \geq 3$ .

En particular, lo anterior nos indica que  $D$  no puede ser  $H$ -invariante. Por lo que el resultado en [14, Theorem 4.4] en este caso no puede aplicarse y la búsqueda de Fórmulas tipo Thomae para los pares generalizados de Fermat no es fácil. Es importante notar en este punto, que la intención de este trabajo no es el obtener tales fórmulas para pares generalizados de Fermat. Nuestro propósito es notar que este tipo de cubrientes abelianos no es considerado, respecto a la búsqueda de fórmulas tipo Thomae, en los trabajos que hay en la literatura. Esperamos poder hacer tal estudio en un trabajo posterior.

En el Teorema 3.10, damos condiciones algebraicas necesarias y suficientes para que un divisor efectivo de grado  $g_{k,n}$ , cuyo soporte esté contenido en el conjunto de los puntos fijos de los generadores estándar, sea no-especial. Es posible encontrar tales divisores  $D$  que son invariantes por alguno de los generadores estándar (ver Ejemplos 2.1 y 3.11). En este caso, en el Teorema 3.13, indicamos condiciones necesarias y suficientes analíticas para que  $D$  sea no-especial.

Nuestra siguiente observación corresponde a los vectores de constantes de Riemann de los puntos fijos de un generador estándar. Asociado a la curva generalizada de Fermat  $S$ , de tipo  $(k, n)$ , tenemos su espacio de diferenciales holomorfas  $H^{1,0}(S)$ , que es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial complejo de

dimensión  $g_{k,n}$ . Si  $H^{1,0}(S)^*$  denota el espacio dual de  $H^{1,0}(S)$ , entonces  $S$  tiene asociada su variedad jacobiana  $JS = H^{1,0}(S)^*/H_1(S; \mathbb{Z})$ , el cual es un toro complejo  $g_{k,n}$ -dimensional (que admite una polarización principal proveniente de la forma de intersección en homología). Cada punto  $q \in S$  define una incrustación holomorfa  $\varphi_q : S \rightarrow JS : p \mapsto \left[ \int_q^p \right]$ . Esta incrustación tiene la propiedad de que, si  $\theta_1$  and  $\theta_2$  son diferenciales meromorfas de  $S$ , entonces  $\varphi_q((\theta_1)) = \varphi_q((\theta_2))$ , donde  $(\theta_j)$  denota el divisor asociado a  $\theta_j$ . Este valor es denotado por  $-2\mathcal{K}_q$  y es llamado el vector de constantes de Riemann asociado al punto  $q$ . En el Teorema 3.8, observamos que  $\mathcal{K}_{q_1} + \cdots + \mathcal{K}_{q_{k^n-1}} \in JS$  es un punto de torsión de orden dos, donde  $q_1, \dots, q_{k^n-1}$  son los puntos fijos de un generador estándar. Esto generaliza la situación conocida para el caso de puntos fijos de automorfismos  $\tau$  de una superficie de Riemann  $S$  tal que  $S/\langle \tau \rangle$  es de género cero y donde cada punto fijo de una potencia no-trivial de  $\tau$  también es punto fijo de  $\tau$  (ver [18, Lema 2.2.]). Este tipo de resultados es de mucho interés en la teoría respecto a fórmulas de Thomae (ver, por ejemplo, [6, 18] para mayores detalles).

## Notaciones

1.  $S$  denotará una superficie de Riemann compacta de género  $g \geq 2$  y  $\text{Aut}(S)$  su grupo de automorfismos conformes (holomorfos).
2. Si  $S$  es una curva generalizada de Fermat de tipo  $(k, n)$ , entonces  $H \cong \mathbb{Z}_k^n$  denotará su grupo generalizado de Fermat de tipo  $(k, n)$ .
3.  $\text{Div}(S)$  denota el grupo abeliano de los divisores sobre  $S$ .
4. El grado del divisor  $D \in \text{Div}(S)$  es denotado por  $\deg(D)$ .
5.  $\text{Div}^d(S)$  denota al conjunto de divisores efectivos de grado  $d$ .
6. Si  $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es una función meromorfa no cero, entonces denotamos su divisor de ceros y polos por  $(f)$ .
7. Si  $\theta$  es una diferencial meromorfa diferente de cero, entonces denotamos su divisor de ceros y polos por  $(\theta)$ .
8.  $L(-D)$  denota el espacio vectorial complejo que consiste, aparte de cero, de todas las funciones meromorfas  $f$  tal que  $(f) + D$  es efectivo. Su dimensión es denotado por  $r(-D)$ .
9.  $\Omega(D)$  denota el espacio vectorial complejo que consiste, aparte de la difencial cero, de todas las diferenciales meromorfas  $\omega$  tal que  $(\omega) - D$  es efectivo. Su dimensión es denotado por  $i(D)$ .
10.  $JS$  denota la variedad jacobiana de  $S$ .

11. Si  $q \in S$ , entonces  $-2\mathcal{K}_q \in JS$  denota su vector de constantes de Riemann.
12.  $C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k$  denota una curva generalizada de Fermat de tipo  $(k, n)$  determinada por los puntos  $\infty, 0, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$ , y  $H_0 \cong \mathbb{Z}_k^n$  su grupo generalizado de Fermat. Sus generadores estándar serán denotados por  $a_1, \dots, a_{n+1}$ .
13. Para cada generador estándar  $a_j$ , denotaremos por  $\text{Fix}(a_j)$  tanto a su conjunto de puntos fijos como al correspondiente divisor.
14.  $\theta_{r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}}$  denota la diferencial meromorfa de  $C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k$  cuyo divisor es dado por  $(\theta_{r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}}) = (\alpha_3 + \dots + \alpha_{n+1} - 2 - r)\text{Fix}(a_1) + r\text{Fix}(a_2) + \sum_{j=3}^{n+1} (k-1-\alpha_j)\text{Fix}(a_j)$ .
15.  $I_{k,n} = \{(r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}); \alpha_j \in \{0, 1, \dots, k-1\}, 0 \leq r \leq \alpha_3 + \dots + \alpha_{n+1} - 2\}$ .

## 2. Preliminares

En el resto de esta sección,  $S$  denotará una superficie de Riemann cerrada de género  $g \geq 1$ .

### 2.1. Divisores

Denotaremos por  $\text{Div}(S)$  el grupo abeliano de los divisores de  $S$ , es decir, el grupo abeliano libre generado por los puntos de  $S$ . Si  $D \in \text{Div}(S)$ , entonces  $\nu_q(D) \in \mathbb{Z}$  es el valor tal que  $D = D_0 + \nu_q(D)q$ , donde  $D_0$  está soportado en  $S - \{q\}$ . El grado de  $D$  es definido como  $\deg(D) = \sum_{q \in S} \nu_q(D)$ . En el caso de que, para cada  $q \in S$ , se cumpla que  $\nu_q(D) \geq 0$ , diremos que el divisor es efectivo, denotado por  $D \geq 0$ . Denotaremos por  $\text{Div}^d(S)$  al conjunto de los divisores efectivos de grado  $d \geq 1$ ; el cual resulta ser una variedad compleja compacta de dimensión  $d$ . Si  $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es una función meromorfa y diferente de cero (respectivamente, si  $\theta$  es una forma diferencial meromorfa y diferente de cero en  $S$ ), entonces denotaremos por  $(f)$  (respectivamente,  $(\theta)$ ) a su divisor que codifica sus ceros y polos contando sus respectivas multiplicidades.

### 2.2. Divisores no-especiales

#### 2.2.1.

Cada divisor  $D \in \text{Div}(S)$  tiene asociado un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $L(-D)$  (respectivamente  $\Omega(D)$ ) de dimensión  $r(-D)$  (respectivamente,  $i(D)$ ) que consiste, aparte del cero, de todas las funciones meromorfas  $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  tales que  $(f) + D \geq 0$  (respectivamente, formas meromorfas  $\theta$  tales que  $(\omega) \geq D$ ). El Teorema de Riemann-Roch nos dice que  $r(-D) = \deg(D) - g + 1 + i(D)$ .

**2.2.2.**

Supongamos, en lo que sigue, que  $D \geq 0$ . Lo anterior nos dice que  $r(-D) \geq 1$  (ya que en  $L(-D)$  están las funciones constantes), en otras palabras,  $i(D) \geq g - \deg(D)$ .

Cuando  $i(D) = 0$  se dice que  $D$  es un divisor no-especial (en caso contrario, un divisor especial). Luego, (i) si  $\deg(D) < g$ , entonces  $D$  es especial, y (ii) si  $\deg(D) = g$ , entonces  $D$  es no-especial si y sólo si  $r(-D) = 1$ .

**2.3. Divisores invariantes por acción de grupos**

Supongamos que tenemos un grupo finito  $G$  de automorfismos conformes de  $S$ . En este caso,  $R = S/G$  resulta ser un orbifold de Riemann (una superficie de Riemann junto a una colección finita de puntos con pesos enteros positivos). Sea  $\pi : S \rightarrow R$  un cubrimiento ramificado holomorfo cuyo grupo de transformaciones cobertoras es  $G$ , es decir,  $\pi(x) = \pi(y)$  si y sólo si existe  $\tau \in G$  tal que  $\tau(x) = y$ .

Sea  $\gamma \geq 0$  el género de  $R$  y sean  $q_1, \dots, q_n \in R$  los valores de ramificación de  $\pi$ , es decir, la proyección de los puntos de  $S$  con  $G$ -estabilizador no-trivial. Si  $p \in \pi^{-1}(q_j)$ , entonces el  $G$ -estabilizador de  $p$  es un grupo cíclico de un orden  $k_j \geq 2$  que divide al orden  $|G|$  de  $G$ . Dos puntos cualesquiera en la  $\pi$ -preimagen de  $q_j$  tienen  $G$ -estabilizadores que son  $G$ -conjugados. La fórmula de Riemann-Hurwitz dice que

$$g = 1 + |G|(\gamma - 1) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{|G|}{k_j} (k_j - 1).$$

Sea  $D \geq 0$  un divisor que sea  $G$ -invariante (es decir,  $G$  permuta los puntos del soporte de  $D$  y deja invariantes los pesos correspondientes). En tal caso,  $D$  debe tener la siguiente forma:

$$D = l_1 \pi^{-1}(p_1) + \dots + l_s \pi^{-1}(p_s) + m_1 \pi^{-1}(q_1) + \dots + m_n \pi^{-1}(q_n),$$

donde  $p_1, \dots, p_s \in R \setminus \{q_1, \dots, q_n\}$ ,  $l_1, \dots, l_s, m_1, \dots, m_n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , y  $\pi^{-1}(y)$  denota el divisor cuyo soporte son los puntos en la  $\pi$ -preimagen de  $y \in R$  (cada uno con peso igual a 1). De esta manera,

$$\deg(D) = (l_1 + \dots + l_s)|G| + \sum_{j=1}^n m_j \frac{|G|}{k_j}.$$

La condición

$$\deg(D) = g$$

es entonces equivalente a la siguiente igualdad

$$2k = \left( 2k(l_1 + \cdots + l_s + 1 - \gamma) + \sum_{j=1}^n (2m_j - k_j + 1)\hat{k}_j \right) |G|, \quad (2.1)$$

donde

$$k = \text{mcm}(k_1, \dots, k_n), \quad \hat{k}_j = k/k_j.$$

Notemos que, si  $|G|$  es impar, entonces la igualdad (2.1) asegura que  $|G|$  divide a  $k$ .

**Ejemplo 2.1.** *Supongamos que  $k_1 = \cdots = k_n = k \geq 2$ . En este caso,  $\hat{k}_j = 1$  y la igualdad (2.1) es en este caso*

$$2k = \left( 2k(l_1 + \cdots + l_s + 1 - \gamma) - n(k-1) + 2 \sum_{j=1}^n m_j \right) |G|.$$

Como  $k$  divide a  $|G|$ , tenemos dos posibilidades:

1.  $|G| = k$ , en cuyo caso  $G \cong \mathbb{Z}_k$  y  $2k(l_1 + \cdots + l_s + 1 - \gamma) - n(k-1) + 2 \sum_{j=1}^n m_j = 2$ .
2.  $|G| = 2k$  y  $2k(l_1 + \cdots + l_s + 1 - \gamma) - n(k-1) + 2 \sum_{j=1}^n m_j = 1$ .

Este ejemplo nos dice, por ejemplo, que si  $|G| \notin \{k, 2k\}$ , entonces no existen divisores efectivos de grado  $g$  que sean  $G$ -invariantes.

## 2.4. Vectores de constantes de Riemann

### 2.4.1.

El primer grupo de homología  $H_1(S; \mathbb{Z})$  se puede incrustar como un reticulado en  $H^{1,0}(S)^*$  por medio del proceso de integración de formas diferenciales  $\alpha \mapsto \int_\alpha$ . El toro complejo  $g$ -dimensional  $JS = H^{1,0}(S)^*/H_1(S; \mathbb{Z})$  se llama la variedad jacobiana de  $S$ . La forma de intersección en homología determina una polarización principal en  $JS$ .

### 2.4.2.

Para cada punto  $q \in S$ , tenemos su función de Abel-Jacobi

$$\varphi_q : S \rightarrow JS : p \mapsto \left[ \int_q^p \right],$$

la cual produce una incrustación holomorfa de  $S$  en  $JS$ . Esta función se extiende de manera natural a una función holomorfa sobreyectiva  $\varphi_q : \text{Div}(S) \rightarrow JS$ , la cual es un homomorfismo de grupos abelianos. Su restricción a la variedad compleja compacta  $\text{Div}^d(S)$  es holomorfa.

Por el teorema de inversión de Abel-Jacobi,  $\varphi_q : \text{Div}^{(g)}(S) \rightarrow JS$  es sobreyectiva, y cualquier par de divisores diferentes  $D_1, D_2 \in \text{Div}^{(g)}(S)$  son enviados al mismo punto si y sólo si  $D_1 - D_2$  es un divisor principal (es decir,  $D_1 - D_2 = (f)$ , para alguna función meromorfa no-constante  $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ ).

#### 2.4.3.

Consideremos dos formas meromorfas  $\theta_1, \theta_2 \neq 0$  en  $S$ . Como  $\theta_1/\theta_2$  es una función meromorfa de  $S$ , entonces  $\varphi_q((\theta_1)) = \varphi_q((\theta_2))$ . De esta manera, el valor  $\varphi_q((\theta)) \in JS$  no depende de la diferencial meromorfa  $\theta \neq 0$  usada. Tal valor es denotado por  $-2\mathcal{K}_q \in JS$  y es llamado el vector de constantes de Riemann asociado al punto  $q$ .

#### 2.4.4.

Si  $h \in \text{Aut}(S)$ , entonces el pull-back de formas holomorfas  $h^* : H^{1,0}(S) \rightarrow H^{1,0}(S)$  induce un automorfismo holomorfo  $T_h : JS \rightarrow JS : [L] \mapsto [L \circ h^*]$ . En particular, por el proceso de cambio de base, para  $q \in S$ , se cumple que

$$\varphi_{h(q)}(h(p))(\theta) = \left[ \int_{h(q)}^{h(p)} \theta \right] = \left[ \int_q^p h^* \theta \right] = \varphi_q(p)(h^* \theta) = T_h(\varphi_q(p))(\theta),$$

es decir,

$$T_h \circ \varphi_q = \varphi_{h(q)} \circ h.$$

### 2.5. Divisores no-especiales y funciones theta

Cada base simpléctica de  $H_1(S; \mathbb{Z})$  tiene asociada su matriz de períodos  $Z \in \mathcal{H}_g$  (espacio de Siegel de las matrices complejas simétricas de tamaño  $g \times g$  con parte imaginaria positiva definida). Esto permite obtener un modelo explícito  $JS = \mathbb{C}^g / \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g$ .

Cada par  $\epsilon, \epsilon' \in \mathbb{Z}^g$  tiene asociada la función theta de primer orden con característica  $\begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix}$  definida por

$$\theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (z; \Pi) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^g} \exp \left\{ 2\pi i \left[ \frac{1}{2} \left( N + \frac{\epsilon}{2} \right)^t z \left( N + \frac{\epsilon}{2} \right) + \left( N + \frac{\epsilon}{2} \right)^t \left( N + \frac{\epsilon'}{2} \right) \right] \right\},$$

la cual es una función holomorfa definida sobre  $\mathbb{C}^g$  (la función theta clásica  $\theta$  corresponde a

$\epsilon = \epsilon' = 0$ ). Más detalles y propiedades sobre funciones theta se pueden encontrar, por ejemplo, en los libros [5, 6].

Como consecuencia del teorema de anulación de Riemann (Riemann Vanishing theorem [5, pág. 308], [6, pág. 17]), para cada  $e \in JS$ , la función holomorfa multivaluada

$$f_{q,e} := \theta \begin{bmatrix} \epsilon \\ \epsilon' \end{bmatrix} (\varphi_q - e; \Pi) : S \rightarrow JS$$

es:

- (i) idénticamente cero, o bien
- (ii) tiene precisamente  $g$  ceros (contados con multiplicidades).

Ya que  $\varphi_q : \text{Div}^{(g)}(S) \rightarrow JS$  es sobreyectiva, existe algún divisor efectivo  $D \in \text{Div}^{(g)}(S)$  tal que  $\varphi_q(D) = e - \mathcal{K}_q$ .

En [6], se probó que  $f_{q,e}$  es idénticamente cero si y sólo si  $D$  es especial.

Supongamos que  $f_{q,e}$  no es cero, esto es,  $D$  es no-especial. Si  $p_1, \dots, p_g$  son los  $g$  ceros de  $f_{q,e}$ , entonces el divisor  $p_1 + \dots + p_g \in \text{Div}^{(g)}(S)$  satisface que  $\varphi_q(p_1 + \dots + p_g) = e - \mathcal{K}_q = \varphi_q(D)$  (ver [5, 6]); luego,  $D = p_1 + \dots + p_g$  (módulo divisores principales).

### 3. Curvas generalizadas de Fermat

En esta sección,  $S$  será una curva generalizada de Fermat de tipo  $(k, n)$ , donde  $k, n \geq 2$  son enteros tales que  $(n-1)(k-1) > 2$ , y  $H \cong \mathbb{Z}_k^n$  su grupo (único [12]) generalizado de Fermat de tipo  $(k, n)$ . Al par  $(S, H)$  le llamamos un par generalizado de Fermat de tipo  $(k, n)$ .

Sea  $\pi : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  un cubrimiento ramificado Galois con grupo cobertor  $H$ . Componiendo  $\pi$  a la izquierda por alguna transformación de Möbius, podemos asumir que los valores de ramificación de  $\pi$  son dados por los puntos  $\infty, 0, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$ , donde (i)  $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ , y (ii)  $\lambda_j \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ .

#### 3.1. Uniformización Fuchsiana

Por el teorema de uniformización, hay un grupo Fuchsiano (único módulo conjugación en  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ )

$$\Gamma = \langle x_1, \dots, x_{n+1} : x_1^k = \dots = x_{n+1}^k = x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = 1 \rangle < \text{PSL}_2(\mathbb{R}),$$

de manera que  $S/H = \mathbb{H}^2/\Gamma$ . En [9], se observó la existencia de un biholomorfismo  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{H}^2/\Gamma'$ , donde  $\Gamma'$  es el grupo derivado (es decir, el subgrupo generado por los comutadores) de  $\Gamma$ . Por la

unicidad del grupo generalizado de Fermat,  $\varphi$  conjuga  $H$  en  $\Gamma/\Gamma'$ .

### 3.2. Descripción algebraica

Las condiciones sobre los valores  $\lambda_j$  aseguran que

$$C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k = \left\{ \begin{array}{rcl} x_1^k + x_2^k + x_3^k & = & 0 \\ \lambda_1 x_1^k + x_2^k + x_4^k & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-2} x_1^k + x_2^k + x_{n+1}^k & = & 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n, \quad (3.1)$$

es una curva algebraica irreducible y suave (es decir, una superficie de Riemann cerrada). Esta admite al grupo  $H_0 = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \cong \mathbb{Z}_k^n$ ,

$$a_j([x_1 : \dots : x_{n+1}]) = [x_1 : \dots : x_{j-1} : \omega_k x_j : x_{j+1} : \dots : x_{n+1}],$$

donde  $\omega_k = e^{2\pi i/k}$ , como un grupo de automorfismos holomorfos. Más aún, la función  $\pi([x_1 : \dots : x_n]) = -(x_2/x_1)^k$  es un cubrimiento ramificado Galois con  $H_0$  como grupo cobertor y cuyos valores de ramificación son  $\infty, 0, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}$ . En particular,  $(C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k, H_0)$  es un par generalizado de Fermat de tipo  $(k, n)$ . En [9], se observó que existe un biholomorfismo  $\phi : S \rightarrow C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k$  (que necesariamente conjuga  $H$  en  $H_0$  por la unicidad de los grupos generalizados de Fermat). En este modelo algebraico, los elementos  $a_1, \dots, a_{n+1}$  corresponden a los generadores estándar.

**Observación 3.1.** Si  $T \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  y

$$\{T(\infty), T(0), T(1), T(\lambda_1), \dots, T(\lambda_{n-2})\} = \{\infty, 0, 1, \mu_1, \dots, \mu_{n-2}\},$$

entonces  $C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k$  y  $C_{\mu_1, \dots, \mu_{n-2}}^k$  son biholomorfas.

### 3.3. El cuerpo de las funciones meromorfas

Para cada  $j = 2, \dots, n+1$ , la función meromorfa

$$y_j = \frac{x_j}{x_1} : C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k \rightarrow \widehat{\mathbb{C}},$$

tiene como sus ceros a los puntos fijos de  $a_j$  y como sus polos a los puntos fijos de  $a_1$ . Esta función  $y_j$  define un cubrimiento ramificado Galois de grado  $k^{n-1}$ , cuyo grupo cobertor es

$$\mathrm{deck}(y_j) = \langle a_2, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_{n+1} \rangle \cong \mathbb{Z}_k^{n-1}.$$

En lo que sigue, denotaremos  $z := y_2$  y  $\lambda_0 = 1$ .

El sistema algebraico (3.1) asegura la igualdad

$$\lambda_{j-3} + z^k + y_j^k = 0. \quad (3.2)$$

Se tiene que  $z, y_3, \dots, y_{n+1}$  generan al cuerpo de las funciones meromorfas de  $C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k$ ;

$$\mathbb{C}(C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k) = \bigoplus_{0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \leq k-1} \mathbb{C}(z) y_3^{\alpha_3} y_4^{\alpha_4} \cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}.$$

**Observación 3.2.** *La acción de  $H$  sobre los generadores anteriores es dada por  $(a_j^* f := f \circ a_j)$ :*

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1^* z = \omega_k^{-1} z, \quad a_2^* z = \omega_k z, \quad a_j^* z = z, \quad j \in \{3, \dots, n+1\}; \\ a_1^* y_l = \omega_k^{-1} y_l, \quad a_l^* y_l = \omega_k y_l, \quad a_j^* y_l = y_l, \quad j \in \{2, 3, \dots, n+1\} - \{l\}. \end{array} \right\}$$

En particular, cada factor  $\mathbb{C}(z) y_3^{\alpha_3} y_4^{\alpha_4} \cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$  es  $H$ -invariante.

### 3.4. Divisores de los puntos fijos

Si el conjunto de puntos fijos de  $a_j$  es  $\{p_{j,1}, \dots, p_{j,k^{n-1}}\}$ , entonces consideramos su correspondiente divisor de puntos fijos:

$$\text{Fix}(a_j) = \sum_{i=1}^{k^{n-1}} p_{j,i} \in \text{Div}(C_n^k), \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (3.3)$$

**Observación 3.3.** *Algunas veces usaremos la notación  $\text{Fix}(a_j)$  (por abuso de lenguaje) para denotar al divisor anterior o simplemente al conjunto de puntos fijos de  $a_j$ .*

Notemos que, para  $j = 2, \dots, n+1$ ,

$$(y_j) = \text{Fix}(a_j) - \text{Fix}(a_1).$$

En particular, para  $i \neq j \in \{1, \dots, n+1\}$ , el divisor de la función meromorfa  $y_{ji} := y_j/y_i$  es

$$(y_{ji}) = \text{Fix}(a_j) - \text{Fix}(a_i).$$

### 3.5. El espacio de las diferenciales meromorfas

Como  $dz$  es una diferencial meromorfa de  $C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k$ , por lo visto en la sección anterior, su espacio de diferenciales meromorfas es

$$\mathcal{M}(C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k) = \bigoplus_{0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \leq k-1} \mathbb{C}(z) \frac{dz}{y_3^{\alpha_3} y_4^{\alpha_4} \cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}}.$$

La función meromorfa  $z$  es cubrimiento ramificado Galois de grado  $k^{n-1}$ , cuyos puntos críticos son los puntos fijos de los elementos  $a_3, \dots, a_{n+1}$ , cada uno de orden  $k$ . Los valores de ramificación de  $z$  están dados por las  $k$ -raíces de los puntos  $-1, -\lambda_1, \dots, -\lambda_{n-2}$ . En particular,

$$(dz) = \sum_{j=3}^{n+1} (k-1) \text{Fix}(a_j) - 2 \text{Fix}(a_1), \quad (dy_{ji}) = \sum_{s \neq i, j}^{n+1} (k-1) \text{Fix}(a_s) - 2 \text{Fix}(a_i).$$

Si  $r \in \mathbb{Z}$  y  $(\alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}) \in \{0, 1, \dots, k-1\}^{n-1}$ , entonces podemos formar la diferencial meromorfa

$$\theta_{r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}} = \frac{z^r dz}{y_3^{\alpha_3} y_4^{\alpha_4} \cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}}, \quad (3.4)$$

cuyo divisor es

$$(\theta_{r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}}) = (\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n+1} - 2 - r) \text{Fix}(a_1) + r \text{Fix}(a_2) + \sum_{j=3}^{n+1} (k-1 - \alpha_j) \text{Fix}(a_j). \quad (3.5)$$

**Observación 3.4.** De la Observación 3.2, podemos ver que la acción por pull-back por elementos de  $H$  en las diferenciales anteriores es dada por:

$$a_j^*(\theta_{r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}}) = \begin{cases} \omega_k^{-(r+1) + (\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n+1})} \theta_{r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}}, & j = 1, \\ \omega_k^{r+1} \theta_{r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}}, & j = 2, \\ \omega_k^{-\alpha_j} \theta_{r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}}, & j \in \{3, \dots, n+1\}. \end{cases}$$

**Teorema 3.5** ([10]). *La colección*

$$\mathcal{B}^{can} := \{\theta_{r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}}\}_{(r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}) \in I_{k, n}},$$

donde  $I_{k, n} = \{(r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}); \alpha_j \in \{0, 1, \dots, k-1\}, 0 \leq r \leq \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n+1} - 2\}$ , define una base para  $H^{1,0}(C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k)$ , llamada la base estándar.

**Observación 3.6** (Conexión con la incrustación canónica). *Consideremos la base estándar del Teorema 3.5. Esta base induce una incrustación canónica (incrustación canónica estándar)*

$$\iota_{\mathcal{B}^{can}} : C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{g_{k, n}-1}.$$

En [10], se verificó la existencia de una sub-colección  $\{\theta_1, \dots, \theta_{n+1}\}$  de  $\mathcal{B}^{can}$ , de manera que

$$\widehat{\iota}_{\mathcal{B}^{can}} : C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n : [x_1 : \dots : x_{n+1}] \mapsto [\theta_1 : \dots : \theta_{n+1}]$$

es la función identidad.

**Observación 3.7.** Usando la Observación 3.4, junto al Teorema 3.5, es posible describir explícitamente la acción de  $H_0$  en el espacio  $H^{q,0}(C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k)$  de las  $q$ -diferenciales holomorfas [13].

### 3.6. Sobre el vector de constantes de Riemann

Nuestra primera observación, es dada en el siguiente.

**Teorema 3.8.** Sea  $(S, H)$  un par generalizado de Fermat de tipo  $(k, n)$ ,  $(k-1)(n-1) > 2$ . Sean  $q_1, \dots, q_{k^{n-1}}$  los puntos fijos de un generador estándar. Entonces,  $\mathcal{K}_{q_1} + \dots + \mathcal{K}_{q_{k^{n-1}}}$  es un punto de torsión de orden 2 de  $JS$ .

*Demostración.* Podemos asumir que  $S = C_n^k := C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k$  y  $H = H_0 = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ , donde  $a_1, \dots, a_{n+1}$  son los generadores estándar.

Recordemos que, si  $q \in C_n^k$ , entonces  $\varphi_q((dz)) = -2\mathcal{K}_q$ . Como

$$(dz) = \sum_{j=3}^{n+1} (k-1)\text{Fix}(a_j) - 2\text{Fix}(a_1),$$

y, para  $i \neq j$ , cada divisor de la forma  $\text{Fix}(a_i) - \text{Fix}(a_j)$  es principal, se tiene la igualdad

$$-2\mathcal{K}_q = ((n-1)(k-1) - 2) \varphi_q(\text{Fix}(a_j)), \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (3.6)$$

Sea  $\alpha = (n-1)(k-1) - 2$ . Tenemos las siguientes igualdades (obtenidas de (3.6))

$$\begin{aligned} -2\mathcal{K}_{q_1} &= \alpha\varphi_{q_1}(q_1 + \dots + q_{k^{n-1}}) = \alpha\varphi_{q_1}(q_1) + \dots + \alpha\varphi_{q_1}(q_{k^{n-1}}) \\ -2\mathcal{K}_{q_2} &= \alpha\varphi_{q_2}(q_1 + \dots + q_{k^{n-1}}) = \alpha\varphi_{q_2}(q_1) + \dots + \alpha\varphi_{q_2}(q_{k^{n-1}}) \\ &\vdots \\ -2\mathcal{K}_{q_{k^{n-1}}} &= \alpha\varphi_{q_{k^{n-1}}}(q_1 + \dots + q_{k^{n-1}}) = \alpha\varphi_{q_{k^{n-1}}}(q_1) + \dots + \alpha\varphi_{q_{k^{n-1}}}(q_{k^{n-1}}). \end{aligned}$$

Sumando todas ellas (y usando la identidad  $\varphi_{q_i}(q_j) = -\varphi_{q_j}(q_i)$ ), obtenemos

$$-2(\mathcal{K}_{q_1} + \dots + \mathcal{K}_{q_{k^{n-1}}}) = 0.$$

□

### 3.7. Divisores efectivos de grado $g_{k,n}$

Como hemos visto en el Ejemplo 2.1, no es posible encontrar divisores efectivos de grado  $g_{k,n}$  que sean  $H$ -invariantes. De hecho, como veremos más abajo, tampoco hay tales divisores que sean  $K$ -invariantes para la mayoría de los subgrupos  $K$  de  $H$ . Luego, no es posible usar el [14, Theorem 4.4] y, en particular, la búsqueda de generalizaciones de fórmulas tipo Thomae para los pares de Fermat generalizados no es fácil.

**Proposición 3.9.** *Sea  $D \in \text{Div}(S)$  un divisor efectivo de grado  $g_{k,n}$ . Sea  $K$  un subgrupo no-trivial de  $H$  conteniendo un elemento de orden  $d \geq 2$  que no es una potencia de un generador estándar. Entonces  $D$  no puede ser  $K$ -invariante en ninguna de las siguientes tres situaciones:*

- (i)  $d \geq 3$ .
- (ii)  $d = 2$  y  $k$  es múltiplo de 4.
- (iii)  $d = 2$  y  $n \geq 3$ .

*Demuestra*ción. Sea  $a \in K$  de orden  $d \geq 2$ , el cual no es una potencia de un generador estándar (luego, ningún elemento diferente de la identidad de  $\langle a \rangle$  actúa con puntos fijos). Como  $d$  es un divisor de  $k$ , podemos escribir  $k = dk_1$ . Si  $D$  es  $K$ -invariante, entonces también es  $\langle a \rangle$ -invariante. Ya que los elementos no-triviales de  $\langle a \rangle$  no tienen puntos fijos en  $S$ , debemos tener que el grado  $g_{k,n}$  de  $D$  debe ser un múltiplo de  $d$ , esto es, existe un entero  $\alpha \geq 1$  tal que  $2d\alpha = 2 + k^{n-1}((n-1)(k-1) - 2) = 2 + d^{n-1}k_1^{n-1}((n-1)(k-1) - 2)$ . Como  $n \geq 2$ , esto no es posible para  $d \geq 3$ . Si  $d = 2$ , entonces  $2^2\alpha = 2 + 2^{n-1}k_1^{n-1}((n-1)(k-1) - 2)$ . En caso que  $k_1$  sea par o bien que  $n \geq 3$ , tendremos que 4 divide a 2, una contradicción.  $\square$

### 3.8. Divisores efectivos no-especiales soportados en los puntos fijos

En esta sección, estamos interesados en determinar condiciones algebraicas (necesarias y suficientes) para que un divisor efectivo de grado  $g_{k,n}$  en  $C_n^k := C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k$ , cuyo soporte esté contenido en el conjunto de los puntos fijos de los generadores estándar de  $H$ , sea no-especial.

Los divisores anteriores son de la forma

$$D = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{k^{n-1}} m_{j,i} p_{j,i}, \quad m_{j,i} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{k^{n-1}} m_{j,i} = g_{k,n}. \quad (3.7)$$

Asumiremos que los enteros  $m_{j,i}$  están ordenados

$$M_j(D) := m_{j,k^{n-1}} \geq \dots \geq m_{j,1} \geq 0.$$

Para cada subconjunto  $A \neq \emptyset$  de  $I_{k,n}$  definimos:

$$\begin{aligned}\beta_1(A) &:= \min\{\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n+1} - r - 2 : (r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}) \in A\} \geq 0 \\ \beta_2(A) &:= \min\{r : (r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}) \in A\} \geq 0 \\ \beta_j(A) &:= \min\{k - 1 - \alpha_j : (r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}) \in A\} \geq 0, \quad j \geq 3.\end{aligned}$$

Observemos que, si  $\emptyset \neq B \subset A$ , entonces  $\beta_j(A) \leq \beta_j(B)$  para todo  $j \geq 1$ .

Si  $\mu \in (\mathbb{C} - \{0\})^A$ , entonces el divisor de la diferencial holomorfa

$$\theta_{\mu,A} = \sum_{(r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}) \in A} \mu(r; \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1}) \theta_{r; \lambda_3, \dots, \theta_{n+1}}$$

es

$$(\theta_{\mu,A}) = \sum_{j=1}^{n+1} \delta_j(\mu) \text{Fix}(a_j) + D_0,$$

donde  $\delta_j(\mu) \geq \beta_j(A)$  y  $D_0$  es un divisor efectivo cuyo soporte es disjunto con  $\text{Fix}(H)$  (el conjunto formado por todos los puntos fijos de todos los generadores estándar de  $H$ ). Notemos que, para  $\mu$  genérico, se tiene que  $\delta_j(\mu) = \beta_j(A)$ .

El siguiente resultado da condiciones algebraicas necesarias y suficientes para que un divisor como en (3.7) sea no-especial.

**Teorema 3.10.** *Sea  $D \in \text{Div}(C_k^n)$  un divisor efectivo de grado  $g_{k,n}$  como en (3.7). Entonces  $D$  es no-especial si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen.*

(S1) *Para cada  $j \in \{1, \dots, n+1\}$ , se cumple que  $m_{j,1} = 0$  (es decir, existe un punto fijo de  $a_j$  que no pertenece al soporte de  $D$ ).*

(S2) *Para todo subconjunto  $\emptyset \neq A \subset I_{k,n}$ ,  $\exists j \in \{1, \dots, n+1\}$  tal que  $M_j(D) > \beta_j(A)$ .*

*Demostración.* Supongamos que la condición (S1) no es válida, es decir, existe  $j \in \{1, \dots, n+1\}$  tal que  $m_{j,1} \geq 1$ , equivalentemente,  $D \geq \text{Fix}(a_j)$ . Si  $i \in \{1, \dots, n+1\} - \{j\}$ , entonces  $y_{ij}$  es una función meromorfa cuyo divisor es  $\text{Fix}(a_i) - \text{Fix}(a_j)$ , en particular,  $(y_{ij}) + D \geq 0$ . Esto nos dice que  $r(-D) \geq 2$  y, por el Teorema de Riemann-Roch, que  $i(D) > 0$ , es decir,  $D$  es especial.

Ahora, supongamos que la condición (S2) no se cumple, es decir, existe  $\emptyset \neq A \subset I_{k,n}$ , tal que  $M_j(D) \leq \beta_j(A)$ , para todo  $j = 1, \dots, n+1$ . Si  $\mu \in (\mathbb{C} - \{0\})^A$ , entonces

$$(\theta_{\mu,A}) \geq \sum_{j=1}^{n+1} \delta_j(\mu) \text{Fix}(a_j) \geq \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j(A) \text{Fix}(a_j) \geq \sum_{j=1}^{n+1} M_j(D) \text{Fix}(a_j) \geq D,$$

es decir,  $i(D) > 0$ , luego  $D$  es especial.  $\square$

**Ejemplo 3.11** (Caso  $(k, n) = (4, 2)$ ). *En este caso,  $S$  corresponde a la curva de Fermat de grado 4:*

$$S = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : x^4 + y^4 + z^4 = 0\}$$

*que es una superficie de Riemann de género  $g_{4,2} = 3$ . Los generadores estándar de  $H \cong \mathbb{Z}_4^2$  están dados por*

$$a_1([x : y : z]) = [ix : y : z], \quad a_2([x : y : z]) = [x : iy : z], \quad a_3([x : y : z]) = [x : y : iz].$$

*El conjunto de puntos fijos de  $a_1$  es (tomando  $q = e^{i\pi/4}$ ):*

$$\{p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}\} = \{[0 : 1 : q], [0 : 1 : iq], [0 : 1 : -q], [0 : 1 : -iq]\},$$

*el conjunto de puntos fijos de  $a_2$  es:*

$$\{p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}\} = \{[1 : 0 : q], [1 : 0 : iq], [1 : 0 : -q], [1 : 0 : -iq]\},$$

*el conjunto de puntos fijos de  $a_3$  es:*

$$\{p_{3,1}, p_{3,2}, p_{3,3}, p_{3,4}\} = \{[1 : q : 0], [1 : iq : 0], [1 : -q : 0], [1 : -iq : 0]\}.$$

*Un divisor  $D$  como en (3.7), en esta situación, es de la forma*

$$D = \sum_{j=1}^4 m_{1,j} p_{1,j} + \sum_{j=1}^4 m_{2,j} p_{2,j} + \sum_{j=1}^4 m_{3,j} p_{3,j},$$

*donde*

$$M_1(D) = m_{1,4} \geq m_{1,3} \geq m_{1,2} \geq m_{1,1} \geq 0,$$

$$M_2(D) = m_{2,4} \geq m_{2,3} \geq m_{2,2} \geq m_{2,1} \geq 0,$$

$$M_3(D) = m_{3,4} \geq m_{3,3} \geq m_{3,2} \geq m_{3,1} \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^3 (m_{1,j} + m_{2,j} + m_{3,j}) = 3.$$

*La condición (S1) del Teorema 3.10 es equivalente a tener*

$$m_{1,1} = m_{2,1} = m_{3,1} = 0,$$

*lo cual supondremos en lo que sigue de este ejemplo.*

Como  $I_{4,2} = \{(0;2), (0;3), (1;3)\}$ , sus subconjuntos no vacíos son

$$A_1 = \{(0;2)\}, \quad A_2 = \{(0;3)\}, \quad A_3 = \{(1;3)\}, \quad A_4 = \{(0;2), (0;3)\},$$

$$A_5 = \{(0;2), (1;3)\}, \quad A_6 = \{(0;3), (1;3)\}, \quad A_7 = I_{4,2}.$$

Se puede verificar que:

$$\beta_1(A_1) = \beta_1(A_3) = \beta_1(A_4) = \beta_1(A_5) = \beta_1(A_6) = \beta_1(A_7) = 0, \quad \beta_1(A_2) = 1,$$

$$\beta_2(A_1) = \beta_2(A_2) = \beta_2(A_4) = \beta_2(A_5) = \beta_2(A_6) = \beta_2(A_7) = 0, \quad \beta_2(A_3) = 1,$$

$$\beta_3(A_2) = \beta_3(A_3) = \beta_3(A_4) = \beta_3(A_5) = \beta_3(A_6) = \beta_3(A_7) = 0, \quad \beta_3(A_1) = 1.$$

La condición (S2) del Teorema 3.10 es equivalente a tener las siguientes condiciones:

- (a) algún  $M_j(D) \geq 1$  (para satisfacer la condición con  $A_4, A_5, A_6, A_7$ );
- (b)  $M_3(D) = 3$  o bien  $M_1(D) \geq 1$  o bien  $M_2(D) \geq 1$  (para tener tal condición para  $A_1$ );
- (c)  $M_1(D) = 3$  o bien  $M_2(D) \geq 1$  o bien  $M_3(D) \geq 1$  (para tener tal condición para  $A_2$ );
- (d)  $M_2(D) = 3$  o bien  $M_1(D) \geq 1$  o bien  $M_3(D) \geq 1$  (para tener tal condición para  $A_3$ ).

Si (i)  $M_1(D) \geq 1$  y  $M_2(D) \geq 1$ , o bien (ii)  $M_1(D) \geq 1$  y  $M_3(D) \geq 1$ , o bien (iii)  $M_2(D) \geq 1$  y  $M_3(D) \geq 1$ , entonces  $D$  es no-especial.

Por otro lado, si tenemos (por ejemplo)  $M_1(D) = M_2(D) = 0$ , entonces necesitamos tener  $M_3(D) = 3$  para que  $D$  sea no-especial. En este caso,  $D = 3p$ , donde  $p \in \text{Fix}(a_3)$ . Notemos que este divisor es invariante por  $a_3$ .

### 3.9. Divisores no-especiales invariantes por un generador estándar

La Proposición 3.9 nos dice que un divisor  $D$  como en (3.7) no puede ser invariante por varios subgrupos no-triviales  $K$  de  $H$ . Los únicos subgrupos  $K < H$  que admitan un divisor (como en (3.7)) que sea  $K$ -invariante son:

- (i)  $n = 2$  y  $k = 2k_1$ , donde  $k_1 \geq 3$  es impar (luego  $S$  es una curva clásica de Fermat de grado  $k$ ) y  $K$  es un grupo cíclico generado por una involución sin puntos fijos en  $S$ , o bien
- (ii)  $K$  es un grupo cíclico generado por un generador estándar.

Supongamos que  $D$  es invariante por un generador estándar, el cual podemos asumir (sin pérdida de generalidad) sea  $a_{n+1}$ . La invariancia de  $D$  por  $a_{n+1}$  es equivalente a tener, para cada  $j = 1, \dots, n$ ,

que en el divisor  $D$  tenemos

$$\sum_{i=1}^{k^{n-1}} m_{j,i} p_{j,i} = \sum_{i=1}^{k^{n-2}} m_{j,i} D_{j,i}$$

donde  $D_{j,i}$  son las órbitas disjuntas a pares de los puntos fijos  $a_j$  bajo la acción de  $a_{n+1}$ .

**Ejemplo 3.12.** Si  $p \in \text{Fix}(a_{n+1})$ , entonces el divisor  $D = g_{k,n}p$  es invariante por  $a_{n+1}$ . Más aún, como  $\beta_j(A) < g_{k,n}$  para todo subconjunto no vacío  $A$  de  $I_{k,n}$ , tenemos (por el Teorema 3.10) que  $D$  es no-especial. Este ejemplo generaliza el dado al final del Ejemplo 3.11, para el caso  $(k, n) = (4, 2)$ .

En el ejemplo anterior, hemos descrito algunos divisores no-especiales de  $C_n^k$ , estos divisores están soportados en un punto fijo de  $a_{n+1}$ . Las condiciones algebraicas necesarias y suficientes del Teorema 3.10, en el caso de divisores invariantes por  $a_{n+1}$ , se pueden escribir de manera equivalente como sigue.

**Teorema 3.13.** Sea  $D$  un divisor efectivo de grado  $g_{k,n}$  como en (3.7), que es  $a_{n+1}$ -invariante. Entonces  $D$  es no-especial si y sólo si no existe una función meromorfa no-constante  $\phi \in L(-D)$  de la forma

$$\phi = h(z) \cdot y_3^{\alpha_3} \cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}, \quad h(z) \in \mathbb{C}(z), \quad \alpha_3, \dots, \alpha_{n+1} \in \{0, 1, \dots, k-1\}.$$

*Demostración.* Como ya hemos visto,

$$\mathbb{C}(C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k) = \bigoplus_{0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \leq k-1} \mathbb{C}(z) y_3^{\alpha_3} y_4^{\alpha_4} \cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}.$$

De la Observación 3.2, los espacios propios del automorfismo lineal  $a_{n+1}^*$  en  $\mathbb{C}(C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k)$  están dados por

$$E_{\alpha_{n+1}} := \left( \bigoplus_{0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n \leq k-1} \mathbb{C}(z) y_3^{\alpha_3} y_4^{\alpha_4} \cdots y_n^{\alpha_n} \right) y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}, \quad \alpha_{n+1} \in \{0, 1, \dots, k-1\},$$

cuyo valor propio asociado es  $\omega_k^{-\alpha_{n+1}}$ . Como  $D$  es invariante por  $a_{n+1}$ , el espacio  $L(-D)$  es  $a_{n+1}^*$ -invariante. Luego,

$$\begin{aligned} L(-D) &= \bigoplus_{0 \leq \alpha_{n+1} \leq k-1} (L(-D) \cap E_{\alpha_{n+1}}) = \\ &= \bigoplus_{0 \leq \alpha_{n+1} \leq k-1} \left( \bigoplus_{0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n \leq k-1} (L(-D) \cap \mathbb{C}(z) y_3^{\alpha_3} y_4^{\alpha_4} \cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}) \right). \quad \square \quad (3.8) \end{aligned}$$

**Observación 3.14.** Notemos, de lo anterior, que  $\mathbb{C}(C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}}^k)/\langle a_{n+1} \rangle = \mathbb{C}(C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-3}}^k)$  y

$$\mathbb{C}(C_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-3}}^k) = \bigoplus_{0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_n \leq k-1} \mathbb{C}(z) y_3^{\alpha_3} y_4^{\alpha_4} \cdots y_n^{\alpha_n}$$

**Corolario 3.15.** Sea  $D$  un divisor efectivo de grado  $g_{k,n}$  como en (3.7), que es  $a_{n+1}$ -invariante. Entonces  $D$  es no-especial si y sólo si para cada elección de  $L \geq 0$  y cada elección de  $r_j, s_l \in \mathbb{Z}$ , donde  $j = 1, \dots, n$ , y  $l = 1, \dots, L$ , y  $\alpha_3, \dots, \alpha_{n+1} \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ , alguna de las siguientes propiedades falla:

- (1)  $0 = m_{1,1} \geq r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n + s_1 + \cdots + s_L + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n+1}$ ,
- (2)  $0 = m_{1,2} \geq -r_1$ , es decir,  $r_1 \geq 0$ ,
- (3) si  $p_{v,i} \in B_{v-3}$ , entonces  $m_{v,i} + \alpha_v \geq -r_{v-1}$ ,  $v = 3, \dots, n+1$ ,
- (4) si  $\geq 0$ ,  $i = 1, \dots, L$  (esta condición se debe al hecho de que cada  $C_{\beta_i}$  es disjunto de los puntos fijos de los generadores estándar de  $H$ ).

*Demostración.* Sea  $D$  un divisor efectivo de grado  $g_{k,n}$ , como en (3.7), que es  $a_{n+1}$ -invariante. Por la Proposición 3.13, para chequear si  $D$  es no-especial, necesitamos verificar que las funciones meromorfas no-constantes

$$\phi = h(z) \cdot y_3^{\alpha_3} \cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}},$$

donde  $h \in \mathbb{C}(z)$  y  $\alpha_3, \dots, \alpha_{n+1} \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ , no pueden estar en  $L(-D)$ .

Sea  $\lambda_0 = 1$ . Para cada  $j = 0, \dots, n-2$ , fijemos una  $k$ -raíz  $(-\lambda_j)^{1/k}$ . Sea

$$h(z) = z^{r_1} \prod_{j=0}^{n-2} \prod_{l=1}^k \left( z - e^{2l\pi i/k} (-\lambda_j)^{1/k} \right)^{r_{2+j}} \prod_{i=1}^L (z - \beta_i)^{s_i},$$

donde  $-\beta_i^k \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}\}$  y  $r_j, s_i \in \mathbb{Z}$ . Notemos que:

$$(z^{r_1}) = r_1 (\text{Fix}(a_2) - \text{Fix}(a_1)),$$

$$\left( \left( z - e^{2l\pi i/k} (-\lambda_j)^{1/k} \right)^{r_{2+j}} \right) = r_{2+j} (B_j - \text{Fix}(a_1)), \quad j = 0, \dots, n-2,$$

donde

$$B_j = \left\{ [1 : e^{2l\pi i/k} (-\lambda_j)^{1/k} : x_3 : \cdots : x_{n+1}] : x_{i+3}^k = -\lambda_i + \lambda_j \right\} \subset \text{Fix}(a_{j+3}),$$

y

$$((z - \beta_i)^{s_i}) = s_i (C_{\beta_i} - \text{Fix}(a_1)), \quad i = 1, \dots, L,$$

donde

$$C_{\beta_i} = \{ [1 : \beta_i : x_3 : \cdots : x_{n+1}] : x_{t+3}^k = -\lambda_t - \beta_i^k \}.$$

El divisor de  $h$  es:

$$(h) = r_1 (\text{Fix}(a_2) - \text{Fix}(a_1)) + \sum_{j=0}^{n-2} r_{2+j} (B_j - \text{Fix}(a_1)) + \sum_{i=1}^L s_i (C_{\beta_i} - \text{Fix}(a_1)).$$

Ya que el divisor de  $y_j^{\alpha_j}$ , para  $j = 3, \dots, n+1$ , es

$$(y_j^{\alpha_j}) = \alpha_j (\text{Fix}(a_j) - \text{Fix}(a_1))$$

obtenemos que el divisor de  $\phi = h(z) \cdot y_3^{\alpha_3} \cdots y_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$  es

$$\begin{aligned} (\phi) = & -(r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n + s_1 + \cdots + s_L + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n+1}) \text{Fix}(a_1) \\ & + r_1 \text{Fix}(a_2) + \sum_{v=3}^{n+1} (\alpha_v \text{Fix}(a_v) + r_{v-1} B_{v-3}) + \sum_{i=1}^L s_i C_{\beta_i}. \end{aligned}$$

En particular (como  $\alpha_j \geq 0$ ),  $\phi \notin L(-D)$  si alguna de las propiedades enunciadas en el corolario falla.  $\square$

## Agradecimientos

El autor agredece a los referíes por su tiempo dedicado a la revisión de este artículo y los valiosos comentarios, sugerencias y correcciones hechas a la versión preliminar. En especial, a uno de ellos por su paciencia en las muchísimas correcciones hechas respecto al lenguaje castellano. El segundo referí mencionaba en su reporte las posibles relaciones de lo aquí expuesto con cuestiones relacionadas con fibrados vectoriales, principales y de Higgs sobre superficies de Riemann. Como no soy un experto en ese tema, no me atreví a complementar sobre esta y sus posibles relaciones (luego, pido disculpas por esta incompletitud al respecto). Este artículo es parcialmente financiado por el Proyecto Fondecyt 1230001 (ANID).

## Referencias

- [1] M. Bershadsky y A. Radul, “Conformal field theories with additional  $Z_N$  symmetry,” *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 2, no. 1, pp. 165–178, 1987, doi: 10.1142/S0217751X87000053.
- [2] M. Bershadsky y A. Radul, “Fermionic fields on  $\mathbb{Z}_N$ -curves,” *Commun. Math. Phys.*, vol. 116, no. 4, pp. 689–700, 1988, doi: 10.1007/BF01224908.
- [3] A. Eisenmann y H. M. Farkas, “An elementary proof of Thomae’s formulae,” *Online J. Anal. Comb.*, vol. 3, p. 14, 2008, Art. ID 2.
- [4] V. Z. Enolski y T. Grava, “Thomae type formulae for singular  $Z_N$  curves,” *Lett. Math. Phys.*, vol. 76, no. 2-3, pp. 187–214, 2006, doi: 10.1007/s11005-006-0073-7.
- [5] H. M. Farkas y I. Kra, *Riemann surfaces.*, 2nd ed., ser. Grad. Texts Math. New York etc.: Springer-Verlag, 1992, vol. 71, doi: 10.1007/978-1-4612-2034-3.
- [6] H. M. Farkas y S. Zemel, *Generalizations of Thomae’s formula for  $Z_n$  curves*, ser. Dev. Math. Berlin: Springer, 2011, vol. 21, doi: 10.1007/978-1-4419-7847-9.
- [7] G. Frobenius, “Ueber die constanten Factoren der Thetareihen,” *J. Reine Angew. Math.*, vol. 98, pp. 244–263, 1885, doi: 10.1515/crll.1885.98.244.
- [8] G. González-Diez, “Non-special divisors supported on the branch set of a  $p$ -gonal Riemann surface,” in *Geometry of Riemann surfaces. Proceedings of the Anogia conference to celebrate the 65th birthday of William J. Harvey, Anogia, Crete, Greece, June–July 2007*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010, pp. 238–259.
- [9] G. González-Diez, R. A. Hidalgo, y M. Leyton, “Generalized Fermat curves,” *J. Algebra*, vol. 321, no. 6, pp. 1643–1660, 2009, doi: 10.1016/j.jalgebra.2009.01.002.
- [10] R. A. Hidalgo, “Holomorphic differentials of generalized Fermat curves,” *J. Number Theory*, vol. 217, pp. 78–101, 2020, doi: 10.1016/j.jnt.2020.05.014.
- [11] R. A. Hidalgo, “Homology group automorphisms of Riemann surfaces,” *Mosc. Math. J.*, vol. 23, no. 1, pp. 113–120, 2023.
- [12] R. A. Hidalgo, A. Kontogeorgis, M. Leyton-Álvarez, y P. Paramantzoglou, “Automorphisms of generalized Fermat curves,” *J. Pure Appl. Algebra*, vol. 221, no. 9, pp. 2312–2337, 2017, doi: 10.1016/j.jpaa.2016.12.011.
- [13] K. Karagiannis, “Representations on canonical models of generalized Fermat curves and their syzygies,” 2023, *arXiv:2304.02990*.

- 
- [14] Y. Kopeliovich y S. Zemel, “On spaces associated with invariant divisors on Galois covers of Riemann surfaces and their applications,” *Isr. J. Math.*, vol. 234, no. 1, pp. 393–450, 2019, doi: 10.1007/s11856-019-1946-7.
  - [15] D. Piponi, “A generalization of Thomae’s formula for cyclic covers of the sphere, ph.d. dissertation,” Ph.D. dissertation, King’s College London, 1993, thesis supervised by W.J. Harvey.
  - [16] J. Thomae, “Beitrag zur Bestimmung von  $\vartheta(0, 0, \dots, 0)$  durch die Klassenmoduln algebraischer Functionen,” *J. Reine Angew. Math.*, vol. 71, pp. 201–222, doi: 10.1515/crll.1870.71.201.
  - [17] J. Thomae, “Bestimmung von  $\operatorname{d}\!\operatorname{lg} \vartheta(0, 0, \dots, 0)$  durch die Classenmoduln,” *J. Reine Angew. Math.*, vol. 66, pp. 92–96, doi: 10.1515/crll.1866.66.92.
  - [18] S. Zemel, “Thomae formulae for general fully ramified  $z_n$  curves,” *J. Anal. Math.*, vol. 131, pp. 101–158, doi: 10.1007/s11854-017-0004-9.



## Función maximal, un subespacio de Orlicz-Lorentz, y el operador multiplicación

RENÉ ERLIN CASTILLO<sup>1</sup> 

HÉCTOR CAMILO CHAPARRO<sup>2,✉</sup> 

<sup>1</sup> Departamento de Matemáticas  
Universidad Nacional de Colombia,  
Bogotá, Colombia.

*recastillo@unal.edu.co*

<sup>2</sup> Programa de Matemáticas  
Universidad de Cartagena,  
Cartagena de Indias, Colombia.  
*hchaparro@unicartagena.edu.co✉*

### RESUMEN

El espacio de Orlicz-Lorentz se define en términos de funciones de Young aplicadas al reordenamiento decreciente de una función. En este artículo, definimos un subespacio de este espacio, usando la función maximal, y estudiamos su estructura como espacio de Banach. Además, definimos un operador de multiplicación en estos subespacios y caracterizamos sus propiedades más relevantes.

**Keywords and Phrases:** Espacios de Orlicz-Lorentz, función maximal, operador multiplicación.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 47B33, 47B38, 46E30.

Publicado: 18 de agosto de 2025

Aceptado: 08 de mayo de 2025

Revisado: 21 de septiembre de 2024



©2025 R. E. Castillo *et al.* Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

# The maximal function, an Orlicz-Lorentz subspace, and the multiplication operator

RENÉ ERLIN CASTILLO<sup>1</sup> 

HÉCTOR CAMILO CHAPARRO<sup>2,✉</sup> 

<sup>1</sup> Departamento de Matemáticas  
Universidad Nacional de Colombia,  
Bogotá, Colombia.  
*recastillo@unal.edu.co*

<sup>2</sup> Programa de Matemáticas  
Universidad de Cartagena,  
Cartagena de Indias, Colombia.  
*hchaparro@unicartagena.edu.co*

## ABSTRACT

The Orlicz-Lorentz space is defined in terms of Young functions applied to the decreasing rearrangement of a function. In this article, we define a subspace of this space, using the maximal function, and study its structure as a Banach space. Additionally, we define a multiplication operator on these subspaces and characterize its most relevant properties.

**Keywords and Phrases:** Orlicz-Lorentz spaces, maximal function, multiplication operator.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 47B33, 47B38, 46E30.

Published: 18 August, 2025

Accepted: 08 May, 2025

Received: 21 September, 2024

©2025 R. E. Castillo *et al.* This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.



## 1. Introducción

Los espacios de Orlicz-Lorentz han surgido como una generalización común de los espacios de Orlicz y de los espacios de Lorentz, aplicados a problemas de análisis funcional, teoría de operadores y otras áreas de las matemáticas. Estos espacios se definen mediante el uso de funciones de Young aplicadas al reordenamiento decreciente de funciones, proporcionando un marco robusto para estudiar propiedades operatorias en escenarios no lineales y ponderados.

En este artículo, se investigan ciertas propiedades fundamentales de la distribución, el reordenamiento decreciente, la función maximal y las funciones de Young, lo cual permite definir el espacio de Orlicz-Lorentz  $L_{\varphi,w}$ . El enfoque se centra en un subespacio particular,  $\Lambda_{\varphi,w}$ . Nos proponemos realizar un estudio exhaustivo y autocontenido de este subespacio, con el objetivo de proporcionar una base teórica sólida para estudiar las condiciones bajo las cuales el operador de multiplicación  $M_u$ , definido por  $M_u(f) = u \cdot f$ , es acotado, inyectivo, invertible, y compacto. Estas condiciones tienen aplicaciones directas en problemas de teoría de operadores y análisis de Fourier, entre otras áreas. Para este análisis, seguiremos el esquema planteado en [7].

La organización de este artículo es la siguiente. En la Sección 2, describimos y damos propiedades de los elementos básicos que componen a los espacios de Orlicz-Lorentz, a saber, la distribución  $D_f$ , el reordenamiento decreciente  $f^*$ , la función maximal  $f^{**}$ , y las funciones de Young. Luego, en la Sección 3, damos la definición de los espacios de Orlicz-Lorentz  $L_{\varphi,w}$ , y de un subespacio particular  $\Lambda_{\varphi,w}$ , estudiando sus propiedades como espacios de Banach. Finalmente, en la Sección 4, estudiamos el operador multiplicación  $M_u$  definido sobre  $\Lambda_{\varphi,w}$ , caracterizando su acotación, rango cerrado, invertibilidad y compacidad.

## 2. Elementos básicos de los espacios de Orlicz-Lorentz: distribución, reordenamiento decreciente, función maximal y funciones de Young

En esta sección estudiamos los componentes principales de los espacios de Orlicz-Lorentz. Iniciamos este estudio definiendo la distribución de una función.

### 2.1. Función de distribución

**Definición 2.1.** *Sea  $f$  una función medible de valor complejo definida en un espacio de medida  $\sigma$ -finito  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ . Para  $\lambda \geq 0$ , la función distribución de  $f$ , denotada por  $D_f(\lambda)$ , se define como*

$$D_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}). \quad (2.1)$$

Es importante destacar que  $D_f$  depende únicamente del valor absoluto  $|f|$  de la función y que puede tomar el valor  $+\infty$ .

La función distribución  $D_f$  brinda información sobre el “tamaño” de  $f$ , pero no acerca de su comportamiento en puntos específicos. Por ejemplo, una función en  $\mathbb{R}^n$  y sus traslaciones tienen la misma función distribución. A partir de (2.1), se deduce que  $D_f$  es decreciente en  $\lambda$  (aunque no estrictamente) y es continua por la derecha.

Dado un espacio medible  $(X, \mu)$ , y funciones medibles  $f$  y  $g$  definidas en dicho espacio,  $D_f$  cumple las siguientes propiedades para todo  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ :

1.  $D_f \equiv 0 \iff f = 0 \text{ } \mu\text{-c.t.p.};$
2. Si  $|g| \leq |f| \text{ } \mu\text{-c.t.p.}$ , entonces  $D_g \leq D_f$ ;
3.  $D_{cf}(\lambda) = D_f\left(\frac{\lambda}{|c|}\right)$  para todo  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ;
4.  $D_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq D_f(\lambda_1) + D_g(\lambda_2)$ ;
5.  $D_{fg}(\lambda_1 \lambda_2) \leq D_f(\lambda_1) + D_g(\lambda_2)$ .

Para más información sobre la función distribución, consultar las referencias [5, 6, 10].

## 2.2. Reordenamiento decreciente

El reordenamiento decreciente de una función  $f$ , denotado como  $f^*$ , se define de la siguiente manera.

**Definición 2.2.** *Dada una función  $f$  de valor complejo definida en  $X$ , su reordenamiento decreciente,  $f^*$ , es la función definida en  $[0, +\infty)$  como*

$$f^*(t) = \inf\{\lambda > 0 : D_f(\lambda) \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Adoptamos la convención de que  $\inf \emptyset = \infty$ . Note que  $f^*$  es decreciente y continua por la derecha. Además,

$$f^*(0) = \inf\{\lambda > 0 : D_f(\lambda) \leq 0\} = \|f\|_\infty,$$

ya que

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0\}.$$

Si  $D_f$  es estrictamente decreciente, entonces se cumple que

$$f^*(D_f(t)) = \inf\{\lambda > 0 : D_f(\lambda) \leq D_f(t)\} = t.$$

Esto demuestra que  $f^*$  es la inversa de la función distribución  $D_f$ .

Dados dos espacios de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  y  $(Y, \mathcal{M}, \nu)$ , denotamos por  $\mathfrak{F}(X, \mathcal{A})$  al conjunto de todas las funciones  $\mathcal{A}$ -medibles en  $X$  y por  $\mathfrak{F}(Y, \mathcal{M})$  al conjunto de todas las funciones  $\mathcal{M}$ -medibles en  $Y$ , respectivamente.

Dos funciones  $f \in \mathfrak{F}(X, \mathcal{A})$ ,  $g \in \mathfrak{F}(Y, \mathcal{M})$  se llaman equimedibles si tienen la misma función distribución, es decir,

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) = \nu(\{y \in Y : |g(y)| > \lambda\}), \quad \text{para todo } \lambda \geq 0.$$

El siguiente teorema asegura la unicidad del reordenamiento decreciente. Omitimos su demostración, la cual se puede encontrar en [6, Teorema 1.8].

**Teorema 2.3.** *Existe una única función decreciente continua por la derecha,  $\lambda \geq 0$ , equimedible con  $f^*$ . Es decir, el reordenamiento decreciente es único.*

A continuación listamos algunas propiedades importantes de  $f^*$ . Demostraciones de estas propiedades pueden encontrarse en [5, 6, 10].

1.  $f^*$  es decreciente.
2.  $f^* \equiv 0 \iff f = 0$   $\mu$ -c.t.p.
3.  $f^*(t) > \lambda$  si y sólo si  $D_f(\lambda) > t$ .
4.  $|g| \leq |f|$   $\mu$ -c.t.p. implica  $g^* \leq f^*$ . Además,  $|f|^* = f^*$ .
5.  $(kf)^* = |k|f^*$ .
6.  $(f+g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$ .
7.  $(fg)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1)g^*(t_2)$ .
8.  $f$  y  $f^*$  son equimedibles, es decir

$$D_f(\lambda) = D_{f^*}(\lambda) \quad \text{para todo } \lambda \geq 0.$$

9.  $\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty [f^*(t)]^p dt$  si  $0 < p < \infty$ .
10. Si  $|f| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n|$ , entonces  $f^* \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n^*$ .
11. Si  $E \in \mathcal{A}$ , entonces  $(\chi_E)^*(t) = \chi_{[0, \mu(E))}(t)$ .
12. Si  $E \in \mathcal{A}$ , entonces  $(f\chi_E)^*(t) \leq f^*(t)\chi_{[0, \mu(E))}(t)$ .

### 2.3. Función maximal

**Definición 2.4.** Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  una función medible. Por  $f^{**}$  se denotará a la función maximal de  $f^*$ , definida como

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds, \quad t > 0. \quad (2.2)$$

A continuación enumeramos algunas propiedades básicas de la función maximal  $f^{**}$ .

**Proposición 2.5.** Supongamos que  $f$ ,  $g$ , y  $f_n$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ), son funciones medibles, y sea  $\lambda$  cualquier escalar. Entonces  $f^{**}$  es no negativa, decreciente, y continua en  $(0, +\infty)$ . Además, se tienen las siguientes propiedades

$$f^{**} \equiv 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \mu - c.t.p.; \quad (2.3)$$

$$f^* \leq f^{**}; \quad (2.4)$$

$$|g| \leq |f| \quad \mu - c.t.p. \text{ implica } g^{**} \leq f^{**}; \quad (2.5)$$

$$(\lambda f)^{**} = |\lambda| f^{**}; \quad (2.6)$$

$$\text{Si } |f| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n|, \text{ entonces } f^{**} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n^{**} \quad (2.7)$$

$$(f + g)^{**} \leq f^{**} + g^{**} \quad (2.8)$$

### 2.4. Funciones de Young

Los espacios clásicos de Lebesgue son conformados por las (clases de equivalencia de) funciones Lebesgue integrables tales que

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty,$$

donde el integrando se obtiene al aplicar la función  $\varphi(t) = t^p$  ( $p \geq 1$ ) a la función  $|f|$ . Esta función  $\varphi$  hace parte de una clase más general de funciones, llamadas *funciones de Young*, concepto que precisamos a continuación.

**Definición 2.6.** Sea  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  una función convexa tal que

1.  $\varphi(x) = 0$  si y sólo si  $x = 0$ ;

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ .

Tal función se conoce como función de Young.

Una función de Young es estrictamente creciente. En efecto, sean  $0 < x < y$ , entonces  $0 < \frac{x}{y} < 1$  y así, podemos escribir

$$x = \left(1 - \frac{x}{y}\right)0 + \frac{x}{y}y.$$

como  $\varphi$  es convexa, tenemos

$$\varphi(x) = \varphi\left(\left(1 - \frac{x}{y}\right)0 + \frac{x}{y}y\right) \leq \left(1 - \frac{x}{y}\right)\varphi(0) + \frac{x}{y}\varphi(y) < \varphi(y).$$

Decimos que una función de Young *satisface la condición  $\Delta_2$*  si existen constantes no negativas  $x_0$  y  $k$  tales que

$$\varphi(2x) \leq k\varphi(x) \quad \text{para } x \geq x_0. \quad (2.9)$$

Si  $x_0 = 0$ , decimos que  $\varphi$  *satisface globalmente la condición  $\Delta_2$* . La mínima constante  $k$  que satisface (2.9) se denota por  $k_\Delta$ .

**Afirmación 2.7.** *Si  $\varphi$  es una función de Young que satisface la condición  $\Delta_2$ , entonces para cada  $r \geq 0$  existe una constante  $k_\Delta(r)$  tal que*

$$\varphi(rx) \leq k_\Delta(r)\varphi(x) \quad (2.10)$$

para  $x > 0$  suficientemente grande.

*Demostración de la afirmación.* Si  $r > 0$ , podemos elegir  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $r \leq 2^n$ . Entonces, aplicando (2.9)  $n$ -veces y usando el hecho de que  $\varphi$  es creciente, obtenemos

$$\varphi(rx) \leq \varphi(2^n x) \leq k^n \varphi(x),$$

con lo cual (2.10) queda demostrado.  $\square$

**Lema 2.8.** *Una función de Young  $\varphi$  satisface la condición  $\Delta_2$  si y sólo si existen constantes  $\lambda > 1$  y  $t_0 > 0$  tales que*

$$\frac{tp(t)}{\varphi(t)} < \lambda$$

para todo  $t \geq t_0$ , donde  $p$  es la derivada lateral derecha de  $\varphi$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\varphi$  satisface la condición  $\Delta_2$ , entonces existe una constante  $k > 0$  tal que

$$k\varphi(t) \geq \varphi(2t) = \int_0^{2t} p(s) ds > \int_t^{2t} p(s) ds$$

para  $t$  suficientemente grande. Como  $p$  es creciente, se tiene que

$$\int_t^{2t} p(s) ds > tp(t);$$

así, para  $t$  suficientemente grande, obtenemos

$$\frac{tp(t)}{\varphi(t)} \leq k.$$

Recíprocamente, si

$$\frac{tp(t)}{\varphi(t)} < \lambda$$

para todo  $t \geq t_0$ , entonces

$$\int_t^{2t} \frac{p(s)}{\varphi(s)} ds < \lambda \int_t^{2t} \frac{ds}{s} = \lambda \log 2.$$

Dado que  $p(s) = \varphi'(s)$ , tenemos

$$\log \left( \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} \right) < \lambda \log 2,$$

lo cual implica que

$$\varphi(2t) < 2^\lambda \varphi(t).$$

□

A continuación veremos que las funciones de Young que satisfacen la condición  $\Delta_2$  tienen una razón de crecimiento menor que  $t^p$  para algún  $p > 1$ .

**Teorema 2.9.** *Si  $\varphi$  es una función de Young que satisface la condición  $\Delta_2$ , entonces existen constantes  $\lambda > 1$  y  $C > 0$  tales que*

$$\varphi(t) \leq Ct^\lambda$$

para  $t$  suficientemente grande.

*Demostración.* Por (2.8) podemos escribir

$$\int_{t_0}^t \frac{p(s)}{\varphi(s)} ds < \lambda \int_{t_0}^t \frac{ds}{s}$$

donde  $t \geq t_0$ . Entonces

$$\log \left( \frac{\varphi(t)}{\varphi(t_0)} \right) < \lambda \log \left( \frac{t}{t_0} \right),$$

por lo tanto

$$\varphi(t) < \frac{\varphi(t_0)}{t_0^\lambda} t^\lambda,$$

como queríamos demostrar.

□

En relación con la función de Young  $\varphi$ , definimos, para  $t \geq 0$ , la función complementaria de  $\varphi$  mediante

$$\psi(t) = \sup\{ts - \varphi(s) : s \geq 0\}.$$

**Proposición 2.10.** *Si  $\varphi$  es una función de Young, entonces su función complementaria  $\psi$  también es una función de Young.*

*Demostración.* Es claro que  $\psi(0) = 0$  si y sólo si  $x = 0$ . Por lo tanto, sólo debemos demostrar que  $\psi$  es una función convexa. Para esto, escojamos  $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$  y  $\lambda \in [0, 1]$ . Entonces, por definición de  $\psi$ , tenemos

$$\psi(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) = \sup\{s(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) - \varphi(s) : s \geq 0\}.$$

Por otra parte

$$\lambda\psi(t_1) = \lambda \sup\{st_1 - \varphi(s) : s \geq 0\} \geq \lambda(st_1 - \varphi(s)), \quad \forall s \geq 0$$

y además,

$$(1 - \lambda)\psi(t_2) = (1 - \lambda) \sup\{st_2 - \varphi(s) : s \geq 0\} \geq (1 - \lambda)(st_2 - \varphi(s)), \quad \forall s \geq 0.$$

De las últimas dos desigualdades, tenemos

$$s(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) - \varphi(s) = \lambda(st_1 - \varphi(s)) + (1 - \lambda)(st_2 - \varphi(s)) \leq \lambda\psi(t_1) + (1 - \lambda)\psi(t_2)$$

para todo  $s \geq 0$ . Esto significa que  $\lambda\psi(t_1) + (1 - \lambda)\psi(t_2)$  es una cota superior del conjunto

$$\{s(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) - \varphi(s) : s \geq 0\},$$

entonces

$$\psi(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda\psi(t_1) + (1 - \lambda)\psi(t_2),$$

y así  $\psi$  es convexa. □

**Teorema 2.11** (Desigualdad de Young). *Sea  $\psi$  la función complementaria de  $\varphi$ . Entonces*

$$ts \leq \varphi(s) + \psi(t)$$

donde  $t, s \in [0, +\infty)$ .

*Demostración.* Sean  $t, s \in [0, +\infty)$ . Entonces

$$\psi(t) = \sup\{st - \varphi(s) : s \geq 0\} \geq st - \varphi(s), \quad \forall s \geq 0,$$

Luego

$$\psi(t) + \varphi(s) \geq st,$$

y así se completa la demostración.  $\square$

Para más detalles sobre funciones de Young, ver [16].

### 3. Los espacios de Orlicz-Lorentz $L_{\varphi,w}$ y un subespacio particular $\Lambda_{\varphi,w}$

Una vez estudiados los conceptos de distribución, reordenamiento decreciente, función maximal y funciones de Young, estamos listos para definir los *espacios de Orlicz-Lorentz*. El lector interesado puede encontrar información relacionada en [15].

Recordemos que un peso  $w$  es una función no negativa, localmente integrable sobre  $\mathbb{R}$ , que toma valores en  $(0, \infty)$  casi en todas partes. De esta manera, un peso puede tomar los valores cero o infinito sólo sobre un conjunto Lebesgue medible de medida cero.

**Definición 3.1.** Sean  $\varphi$  una función de Young y  $w$  un peso. Se define el espacio de Orlicz-Lorentz con peso  $w$  como

$$L_{\varphi,w} = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ medibles} : \int_0^\infty \varphi(\alpha f^*(t)) w(t) dt < \infty, \text{ para algún } \alpha > 0 \right\}. \quad (3.1)$$

Note que si tomamos  $\varphi(x) = x^p$  ( $p \geq 1$ ) y  $w \equiv 1$ , obtenemos

$$\begin{aligned} L_{x^p,1} &= \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ medibles} : \int_0^\infty (\alpha f^*(t))^p dt < \infty, \text{ para algún } \alpha > 0 \right\} \\ &= \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ medibles} : \alpha^p \int_0^\infty [f^*(t)]^p dt < \infty, \text{ para algún } \alpha > 0 \right\} \\ &= \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ medibles} : \alpha^p \int_X |f|^p d\mu < \infty, \text{ para algún } \alpha > 0 \right\} \\ &= \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ medibles} : \int_X |f|^p d\mu < \infty, \right\} \\ &= L_p. \end{aligned}$$

Es decir, los espacios de Orlicz-Lorentz generalizan los espacios clásicos de Lebesgue  $L_p$ . Para más información sobre espacios de Orlicz-Lorentz, invitamos al lector a consultar las referencias [9, 11, 12, 14, 19].

Estudiaremos un subespacio particular  $\Lambda_{\varphi,w}$  de  $L_{\varphi,w}$ , el cual se obtiene al reemplazar en (3.1), el reordenamiento decreciente  $f^*$  por la función maximal  $f^{**}$ . Esto da origen a la siguiente definición.

**Definición 3.2.** *Sean  $\varphi$  una función de Young y  $w$  un peso. Se define el espacio  $\Lambda_{\varphi,w}$  como*

$$\Lambda_{\varphi,w} = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ medibles} : \int_0^\infty \varphi(\alpha f^{**}(t))w(t) dt < \infty, \text{ para algún } \alpha > 0 \right\}. \quad (3.2)$$

Empezamos por demostrar que  $\Lambda_{\varphi,w} \subseteq L_{\varphi,w}$ . En efecto, como  $f^* \leq f^{**}$ , para  $\alpha > 0$  tenemos  $\alpha f^*(t) \leq \alpha f^{**}(t)$ . Aplicando  $\varphi$  (que es creciente) a cada lado de la desigualdad y multiplicando por el peso  $w$ , obtenemos  $\varphi(\alpha f^*(t))w(t) \leq \varphi(\alpha f^{**}(t))w(t)$ . Por último, integramos de 0 a  $\infty$ , y obtenemos

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha f^*(t))w(t) dt \leq \int_0^\infty \varphi(\alpha f^{**}(t))w(t) dt,$$

de donde  $\Lambda_{\varphi,w} \subseteq L_{\varphi,w}$ .

**Observación 3.3.** *La inclusión  $\Lambda_{\varphi,w} \subseteq L_{\varphi,w}$  es estricta. En efecto, dado el espacio de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , consideremos  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(x) = \chi_A(x)$ , donde  $A \in \mathcal{A}$  es tal que  $\mu(A) < \infty$ . Dado que  $\chi_A^*(s) = \chi_{[0, \mu(A))}(s)$ , tomando  $\varphi(x) = x$ ,  $w = 1$  y  $\alpha = 1$ , obtenemos*

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha f^*(t))w(t) dt = \int_0^\infty \chi_{[0, \mu(A))}(t) dt = \mu(A) < \infty.$$

Por lo tanto  $f \in L_{x,1}$ . Sin embargo, observe que

$$\chi_A^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \chi_A^*(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t \chi_{[0, \mu(A))}(s) ds = \begin{cases} 1, & \text{si } t < \mu(A) \\ \frac{\mu(A)}{t}, & \text{si } t \geq \mu(A). \end{cases}$$

Luego, para  $\alpha > 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi(\alpha f^{**}(t))w(t) dt &= \int_0^\infty \alpha f^{**}(t) dt = \alpha \left[ \int_0^{\mu(A)} dt + \int_{\mu(A)}^\infty \frac{\mu(A)}{t} dt \right] = \\ &= \alpha \left[ \int_0^{\mu(A)} dt + \mu(A) \int_{\mu(A)}^\infty \frac{1}{t} dt \right] = \infty. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que  $f \notin \Lambda_{x,1}$ .

El resultado principal de esta sección consiste en demostrar que  $\Lambda_{\varphi,w}$  posee una estructura de espacio vectorial normado completo. Este resultado es precisamente el contenido del siguiente teorema.

**Teorema 3.4.**  $\Lambda_{\varphi,w}$  equipado con la norma de Luxemburg

$$\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{f^{**}(t)}{\varepsilon} \right) w(t) dt \leq 1 \right\} \in [0, \infty),$$

es un espacio de Banach.

En la demostración de este teorema usaremos el siguiente lema.

**Lema 3.5.** Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en  $\Lambda_{\varphi,w}$ . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = 0$ ;
- (b) Para todo  $\alpha > 0$ ,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi(\alpha f_n^{**}(t)) w(t) dt \leq 1$ ;
- (c) Para todo  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi(\alpha f_n^{**}(t)) w(t) dt = 0$ .

*Demostración.* La equivalencia (a)  $\iff$  (b) es consecuencia directa de la definición de  $\|\cdot\|_{\Lambda_{\varphi,w}}$ . La implicación (c)  $\implies$  (b) es inmediata. Como  $\varphi$  es convexa y  $\varphi(0) = 0$  para todo  $t \geq 0$  y  $0 < \varepsilon \leq 1$ , tenemos

$$\varphi(t) = \varphi \left( (1 - \varepsilon)0 + \varepsilon \frac{t}{\varepsilon} \right) \leq (1 - \varepsilon)\varphi(0) + \varepsilon\varphi \left( \frac{t}{\varepsilon} \right),$$

esto es

$$\varphi(t) \leq \varepsilon\varphi \left( \frac{t}{\varepsilon} \right), \quad t \geq 0, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

De donde se sigue fácilmente que (b)  $\implies$  (c).  $\square$

*Demostración del Teorema 3.4.* Demostremos, en primer lugar, que  $\Lambda_{\varphi,w}$  es un espacio vectorial. Para ello, sean  $f, g \in \Lambda_{\varphi,w}$ . Entonces existen constantes  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  tales que

$$\int_0^\infty \varphi(\lambda_1 f^{**}(t)) w(t) dt < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \varphi(\lambda_2 g^{**}(t)) w(t) dt < \infty.$$

Dado que  $(f + g)^{**} \leq f^{**} + g^{**}$ , tenemos

$$\frac{(f + g)^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}} \leq \frac{f^{**}(t) + g^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}} = \frac{\frac{1}{\lambda_1}}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}} \frac{f^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{\frac{1}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}} \frac{g^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_2}}.$$

Dado que  $\varphi$  es no decreciente y convexa, de la desigualdad anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{(f+g)^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}}\right) &\leq \varphi\left(\frac{\frac{1}{\lambda_1}}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}} \frac{f^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{\frac{1}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}} \frac{g^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_2}}\right) \\ &\leq \frac{\frac{1}{\lambda_1}}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}} \varphi\left(\frac{f^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_1}}\right) + \frac{\frac{1}{\lambda_2}}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}} \varphi\left(\frac{g^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_2}}\right) \\ &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \varphi(\lambda_1 f^{**}(t)) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \varphi(\lambda_2 g^{**}(t)). \end{aligned}$$

Multiplicando por el peso  $w(t)$  e integrando,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(f+g)^{**}(t)}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}}\right) w(t) dt &\leq \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^\infty \varphi(\lambda_1 f^{**}(t)) w(t) dt \\ &\quad + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_0^\infty \varphi(\lambda_2 g^{**}(t)) w(t) dt < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $f+g \in \Lambda_{\varphi,w}$ .

Ahora veamos que para cualquier escalar  $\alpha$ ,  $\alpha f \in \Lambda_{\varphi,w}$  si  $f \in \Lambda_{\varphi,w}$ . Existe  $\lambda > 0$  tal que

$$\int_0^\infty \varphi(\lambda f^{**}(t)) w(t) dt < \infty.$$

Para verificar que  $\alpha f \in \Lambda_{\varphi,w}$ , tome  $c = \frac{\lambda}{|\alpha|}$  (el caso  $\alpha = 0$  es trivial). Así

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{\lambda}{|\alpha|}(\alpha f)^{**}(t)\right) w(t) dt = \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\lambda}{|\alpha|}|\alpha|f^{**}(t)\right) w(t) dt = \int_0^\infty \varphi(\lambda f^{**}(t)) w(t) dt < \infty.$$

Luego  $\alpha f \in \Lambda_{\varphi,w}$ .

A continuación demostraremos que  $\|\cdot\|_{\Lambda_{\varphi,w}}$  es, efectivamente, una norma sobre  $\Lambda_{\varphi,w}$ .

Si  $f = 0$   $\mu$ -c.t.p., entonces  $f^*(s) = 0$  para todo  $s$  y así  $f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^\infty 0 ds = 0$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} &= \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{f^{**}(t)}{\varepsilon}\right) w(t) dt \leq 1 \right\} = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{0}{\varepsilon}\right) w(t) dt \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi(0) w(t) dt \leq 1 \right\} = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_0^\infty 0 \cdot w(t) dt \leq 1 \right\} \\ &= \inf \{ \varepsilon > 0 : 0 \leq 1 \} = 0. \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que  $\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = 0$ , entonces  $\int_0^\infty \varphi\left(\frac{f^{**}(t)}{\varepsilon}\right) w(t) dt \leq 1$  para cualquier  $\varepsilon > 0$  y esto sería contradictorio si  $f \neq 0$   $\mu$ -c.t.p. Veámoslo.

Si  $\{x \in X : |f(x)| > \varepsilon\}$  tiene medida positiva para algún  $\varepsilon > 0$ , tenemos  $|f(x)| > \varepsilon$  implica  $f^*(s) > \varepsilon$ , integrando de 0 a  $t$  en ambos miembros de esta desigualdad, obtenemos  $\int_0^t f^*(s) ds > \int_0^t \varepsilon ds = \varepsilon t$ , de donde  $\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds > \varepsilon$ . Es decir,  $f^{**}(t) > \varepsilon$ . Aplicando  $\varphi$  (la cual es creciente) en ambos lados

de esta desigualdad, multiplicando por el peso  $w$ , e integrando, llegamos a  $\int_0^\infty \varphi(f^{**}(t))w(t) dt > \int_0^\infty \varphi(\varepsilon)w(t) dt$ , entonces

$$1 \geq \int_0^\infty \varphi(f^{**}(t))w(t) dt > \underbrace{\varphi(\varepsilon)}_{>0} \int_0^\infty w(t) dt = \infty.$$

Lo cual es contradictorio. Por lo tanto  $\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = 0$  implica  $f = 0$   $\mu$ -c.t.p.

Ahora demostraremos que  $\|\lambda f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = |\lambda| \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}$  para cualquier  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dado que  $(\lambda f)^{**}(t) = |\lambda| f^{**}(t)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} &= \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{(\lambda f)^{**}(t)}{\varepsilon} \right) w(t) dt \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{|\lambda| f^{**}(t)}{\varepsilon} \right) w(t) dt \leq 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{f^{**}(t)}{\frac{\varepsilon}{|\lambda|}} \right) w(t) dt \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Tomando  $\alpha = \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ , obtenemos  $\varepsilon = \alpha |\lambda|$ , luego

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} &= \inf \left\{ \alpha |\lambda| > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{f^{**}(t)}{\alpha} \right) w(t) dt \leq 1 \right\} \\ &= |\lambda| \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{f^{**}(t)}{\alpha} \right) w(t) dt \leq 1 \right\} \\ &= |\lambda| \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}. \end{aligned}$$

Verificaremos ahora la desigualdad triangular. Dado que  $(f + g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} &\leq \frac{f^{**}(t) + g^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \\ &= \frac{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \frac{f^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} + \frac{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \frac{g^{**}(t)}{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}. \end{aligned}$$

Por desigualdad anterior y dado que  $\varphi$  es no decreciente y convexa obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi \left( \frac{(f + g)^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \right) &\leq \varphi \left( \frac{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \frac{f^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} + \frac{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \frac{g^{**}(t)}{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \right) \\ &\leq \frac{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \varphi \left( \frac{f^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \right) + \frac{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \varphi \left( \frac{g^{**}(t)}{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \right). \end{aligned}$$

Multiplicando por el peso  $w(t)$  e integrando,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \varphi \left( \frac{(f+g)^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \right) w(t) dt \\ & \leq \frac{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \underbrace{\int_0^\infty \varphi \left( \frac{f^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \right) w(t) dt}_{\leq 1} + \frac{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \underbrace{\int_0^\infty \varphi \left( \frac{g^{**}(t)}{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \right) w(t) dt}_{\leq 1} \\ & \leq \frac{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} + \frac{\|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} = 1. \end{aligned}$$

Concluimos que  $\varepsilon = \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}$  es una constante para la cual

$$\int_0^\infty \varphi \left( \frac{(f+g)^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \right) w(t) dt \leq 1.$$

Por lo tanto

$$\|f+g\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{(f+g)^{**}(t)}{\varepsilon} \right) w(t) dt \leq 1 \right\} \leq \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} + \|g\|_{\Lambda_{\varphi,w}}.$$

Y se verifica la desigualdad triangular.

Por último, demostraremos la completitud del espacio. Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $\Lambda_{\varphi,w}$ . Escojamos  $\tilde{\varepsilon} > 0$  tal que  $\frac{\tilde{\varepsilon}}{\varphi \left( \frac{\varepsilon}{k_0} \right)} < \frac{1}{n+m}$  para  $n, m \in \mathbb{N}$  y  $\varepsilon > 0, k_0 > 0$ . Para este  $\tilde{\varepsilon}$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|f_n - f_m\|_{\Lambda_{\varphi,w}} < \tilde{\varepsilon}.$$

Si  $n, m \geq n_0$ . Por la definición de la norma de Luxemburg podemos escoger  $k_0 > 0$  de manera que  $k_0 < \tilde{\varepsilon}$  y

$$\int_0^\infty \varphi \left( \frac{(f_n - f_m)^{**}(t)}{k_0} \right) w(t) dt \leq 1.$$

Sea  $E = \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}$ , entonces

$$\varepsilon \chi_E(x) \leq |f_n(x) - f_m(x)|.$$

Y así  $\varepsilon \chi_E^*(s) \leq (f_n - f_m)^*(s)$  implica

$$\varepsilon \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \chi_E^*(s) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t (f_n - f_m)^*(s) ds,$$

es decir

$$\varepsilon \chi_E^{**}(t) \leq (f_n - f_m)^{**}(t),$$

de donde

$$\frac{\varepsilon \chi_E^{**}(t)}{k_0} \leq \frac{(f_n - f_m)^{**}(t)}{k_0}.$$

Aplicando  $\varphi$  que es no decreciente y multiplicando por el peso  $w$  que es no negativo, obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\chi_E^{**}(t)\right)w(t) &\leq \varphi\left(\frac{(f_n - f_m)^{**}(t)}{k_0}\right)w(t) \\ \implies \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\chi_E^{**}(t)\right)w(t)dt &\leq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(f_n - f_m)^{**}(t)}{k_0}\right)w(t)dt. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ahora, dado que

$$\chi_E^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \chi_E^*(s)ds = \frac{1}{t} \int_0^t \chi_{(0, \mu(E))}(s)ds = \begin{cases} 1, & \text{si } t < \mu(E) \\ \frac{\mu(E)}{t}, & \text{si } t \geq \mu(E). \end{cases}$$

Tenemos que

$$\chi_E^{**}(t) = \chi_{(0, \mu(E))}(t) + \frac{\mu(E)}{t}\chi_{[\mu(E), \infty)}(t).$$

Así que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\chi_E^{**}(t)\right)w(t)dt &= \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\left(\chi_{(0, \mu(E))}(t) + \frac{\mu(E)}{t}\chi_{[\mu(E), \infty)}(t)\right)\right)w(t)dt \\ &= \int_0^{\mu(E)} \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\right)w(t)dt + \int_{\mu(E)}^\infty \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0} \cdot \mu(E) \cdot \frac{1}{t}\right)w(t)dt. \end{aligned}$$

Reemplazando esta última igualdad en (3.3), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\mu(E)} \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\right)w(t)dt + \int_{\mu(E)}^\infty \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0} \cdot \mu(E) \cdot \frac{1}{t}\right)w(t)dt &\leq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(f_n - f_m)^{**}(t)}{k_0}\right)w(t)dt \\ \implies \int_0^{\mu(E)} \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\right)w(t)dt &\leq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(f_n - f_m)^{**}(t)}{k_0}\right)w(t)dt. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{\mu(E)} \varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\right)w(t)dt &\leq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(f_n - f_m)^{**}(t)}{k_0}\right)w(t)dt \\ \implies \tilde{\varepsilon} \int_0^{D_{f_n - f_m}(\varepsilon)} w(t)dt &\leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varphi\left(\frac{\varepsilon}{k_0}\right)} \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(f_n - f_m)^{**}(t)}{k_0}\right)w(t)dt \\ \implies \tilde{\varepsilon} \int_0^{D_{f_n - f_m}(\varepsilon)} w(t)dt &\leq \frac{1}{n+m} \\ \implies \tilde{\varepsilon} \lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_0^{D_{f_n - f_m}(\varepsilon)} w(t)dt &= 0. \end{aligned}$$

Como  $w > 0$ , debe tenerse que  $\lim_{n,m \rightarrow \infty} D_{f_n - f_m}(\varepsilon) = 0$ , es decir  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en medida, esto implica que existe una subsucesión  $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  que converge en casi todo punto a una función medible  $f$ , esto es,  $f_{n_k} \rightarrow f$   $\mu$ -c.t.p.

Sea  $\alpha > 0$ . Por el Lema 3.5 existe un entero suficientemente grande  $n(\alpha)$  tal que

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha(f_n - f_m)^{**}(t)) w(t) dt \leq 1, \quad \forall m, n \geq n(\alpha).$$

Por el lema de Fatou, esto conduce a

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha(f_n - f)^{**}(t)) w(t) dt \leq \liminf \int_0^\infty \varphi(\alpha(f_n - f_m)^{**}(t)) w(t) dt \leq 1$$

$\forall m \geq n(\alpha)$ . Así  $f_n - f$  pertenece a  $\Lambda_{\varphi, w}$ . Como  $f_n \in \Lambda_{\varphi, w}$ , entonces  $f \in \Lambda_{\varphi, w}$ .

Además, como  $\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_0^\infty \varphi(\alpha(f_m - f)^{**}(t)) w(t) dt \leq 1$  para todo  $\alpha > 0$ , tenemos  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_{\Lambda_{\varphi, w}} = 0$ . Esto demuestra que  $\Lambda_{\varphi, w}$  es completo.  $\square$

## 4. Operador multiplicación en el espacio $\Lambda_{\varphi, w}$

La última sección de este artículo trata sobre el estudio de un tipo especial de operador, llamado *operador multiplicación*, el cual transforma cualquier función  $f \in \Lambda_{\varphi, w}$ , en la función  $u \cdot f \in \Lambda_{\varphi, w}$ , donde  $(u \cdot f)(x) := u(x) \cdot f(x)$  representa el producto usual de funciones.

Para una revisión más detallada del operador de multiplicación en diferentes tipos de espacios, se pueden consultar, entre otras, las referencias [1, 3, 4, 8, 13, 17, 18].

**Definición 4.1.** *Sea  $F(X)$  un espacio de funciones definidas sobre un conjunto no vacío  $X$ . Sea  $u : X \rightarrow \mathbb{C}$  una función tal que  $u \cdot f \in F(X)$  para cualquier  $f \in F(X)$ .*

*La transformación  $f \mapsto u \cdot f$  definida sobre  $F$  se denota por  $M_u$ . En el caso en que  $F(X)$  sea un espacio topológico y  $M_u$  sea continua, lo llamaremos el operador multiplicación inducido por  $u$ .*

Los operadores multiplicación generalizan la noción de operador dado por una matriz diagonal. Precisamente, uno de los resultados de la teoría de operadores es un teorema espectral, que afirma que todo operador auto-adjunto definido sobre un espacio de Hilbert es unitariamente equivalente a un operador multiplicación sobre un espacio  $L_2$ .

Para un estudio sistemático de los operadores multiplicación definidos en diferentes espacios véase [1, 3, 4, 13, 17].

### 4.1. Inyectividad y acotación de $M_u$

En general, los operadores multiplicación sobre espacios de medida no son inyectivos. Por ejemplo, sea  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espacio de medida y

$$A = X \setminus \text{supp}(u) = \{x \in X : u(x) = 0\}.$$

Si  $\mu(A) \neq 0$  y  $f = \chi_A$ , entonces para cualquier  $x \in X$  tenemos  $f(x)u(x) = 0$  lo cual implica que  $M_u(f) = 0$ , así  $\ker(M_u) \neq \{0\}$  y por lo tanto  $M_u$  no es inyectivo.

Por contrapositiva, tenemos que si  $M_u$  es inyectivo, entonces  $\mu(X \setminus \text{supp}(u)) = 0$ . Por otro lado, si  $\mu(X \setminus \text{supp}(u)) = 0$  y  $\mu$  es una medida completa, entonces  $M_u(f) = 0$  implica  $f(x)u(x) = 0$  para todo  $x \in X$ , luego  $\{x \in X : f(x) \neq 0\} \subseteq X \setminus \text{supp}(u)$  y así  $f = 0$   $\mu$ -c.t.p. en  $X$ . Luego, si  $\mu(X \setminus \text{supp}(u)) = 0$  y  $\mu$  es una medida completa, entonces  $M_u$  es inyectivo.

A continuación definimos un conjunto sobre el cual  $M_u$  es inyectivo.

**Definición 4.2.** *Se define el conjunto  $\Lambda_{\varphi,w}(\text{supp } u)$  mediante*

$$\Lambda_{\varphi,w}(\text{supp } u) = \{f\chi_{\text{supp } u} : f \in \Lambda_{\varphi,w}\}.$$

*Es decir, los elementos de  $\Lambda_{\varphi,w}(\text{supp } u)$  son funciones de  $\Lambda_{\varphi,w}$  restringidas al soporte de  $u$ .*

**Proposición 4.3.**  *$M_u$  es inyectivo en  $Y = \Lambda_{\varphi,w}(\text{supp } u)$ .*

*Demostración.* Sea  $Y = \Lambda_{\varphi,w}(\text{supp } u) = \{f\chi_{\text{supp } u} : f \in \Lambda_{\varphi,w}\}$ . Luego, si  $M_u(\tilde{f}) = 0$  con  $\tilde{f} = f\chi_{\text{supp } u} \in Y$ , entonces  $f(x)\chi_{\text{supp } u}(x)u(x) = 0$  para todo  $x \in X$  y así  $f(x)u(x) = 0$  para todo  $x \in \text{supp}(u)$ , de donde  $f(x) = 0$  para todo  $x \in \text{supp}(u)$ , con lo cual  $f(x)\chi_{\text{supp } u}(x) = 0$  para todo  $x \in X$ . Así,  $\tilde{f} = 0$ , lo cual completa la demostración.  $\square$

A continuación, se caracteriza la acotación del operador  $M_u$  en términos de la acotación de la función  $u$ .

**Teorema 4.4.** *La transformación lineal  $M_u : f \rightarrow u \cdot f$  definida sobre el subespacio  $\Lambda_{\varphi,w}$  es acotada si y sólo si  $u$  es esencialmente acotada. Además,*

$$\|M_u\| = \|u\|_\infty.$$

*Demostración.* Sea  $u \in L_\infty(\mu)$ , note que  $|(uf)(x)| \leq \|u\|_\infty |f(x)|$ , así

$$\{x : |(uf)(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : \|u\|_\infty |f(x)| > \lambda\} = \left\{x : |f(x)| > \frac{\lambda}{\|u\|_\infty}\right\},$$

entonces

$$D_{uf}(\lambda) \leq D_f\left(\frac{\lambda}{\|u\|_\infty}\right)$$

y así

$$\left\{\lambda > 0 : D_f\left(\frac{\lambda}{\|u\|_\infty}\right) \leq s\right\} \subseteq \{\lambda > 0 : D_{uf}(\lambda) \leq s\}.$$

De esto obtenemos

$$\begin{aligned} \inf\{\lambda > 0 : D_{uf}(\lambda) \leq s\} &\leq \inf\left\{\lambda > 0 : D_f\left(\frac{\lambda}{\|u\|_\infty}\right) \leq s\right\} \\ &\leq \inf\{\alpha\|u\|_\infty > 0 : D_f(\alpha) \leq s\} \\ &= \|u\|_\infty \inf\{\alpha > 0 : D_f(\alpha) \leq s\}. \end{aligned}$$

Luego

$$(uf)^*(s) \leq \|u\|_\infty f^*(s).$$

Integrando desde 0 hasta  $t$  y multiplicando por  $\frac{1}{t}$ , obtenemos

$$\frac{1}{t} \int_0^t (uf)^*(s) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t \|u\|_\infty f^*(s) ds.$$

Es decir

$$(uf)^{**}(t) \leq \|u\|_\infty f^{**}(t).$$

Dividiendo por  $\|u\|_\infty \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}$  se tiene que

$$\frac{(uf)^{**}(t)}{\|u\|_\infty \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \leq \frac{\|u\|_\infty f^{**}(t)}{\|u\|_\infty \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} = \frac{f^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}.$$

Dado que  $\varphi$  es no decreciente y el peso  $w$  es no negativo, de la última desigualdad obtenemos

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{(uf)^{**}(t)}{\|u\|_\infty \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\right) w(t) dt \leq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{f^{**}(t)}{\|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}\right) w(t) dt \leq 1.$$

De esta manera  $uf \in \Lambda_{\varphi,w}$ , además,

$$\|M_u f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \leq \|u\|_\infty \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}. \quad (4.1)$$

Recíprocamente, supongamos que  $M_u$  es un operador acotado. Si  $u$  no es una función esencialmente acotada, entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$  el conjunto  $E_n = \{x \in X : |u(x)| > n\}$  tiene medida positiva.

Ahora, sabemos que

$$\chi_{E_n}^*(s) = \chi_{0,\mu(E_n)}(s)$$

y note que

$$\{x : n\chi_{E_n}(x) > \lambda\} \subseteq \{x : |u\chi_{E_n}(x)| > \lambda\},$$

entonces

$$D_{n\chi_{E_n}}(\lambda) \leq D_{u\chi_{E_n}}(\lambda),$$

de aquí obtenemos

$$\{\lambda > 0 : D_{u\chi_{E_n}}(\lambda) \leq s\} \subseteq \{\lambda > 0 : D_{n\chi_{E_n}}(\lambda) \leq s\}.$$

Así

$$\inf\{\lambda > 0 : D_{n\chi_{E_n}}(\lambda) \leq s\} \leq \inf\{\lambda > 0 : D_{u\chi_{E_n}}(\lambda) \leq s\}.$$

Es decir,

$$(u\chi_{E_n})^*(s) \geq n(\chi_{E_n})^*(s).$$

Integrando desde 0 hasta  $t$  y multiplicando por  $\frac{1}{t}$

$$\frac{1}{t} \int_0^t (u\chi_{E_n})^*(s) ds \geq \frac{1}{t} \int_0^t n(\chi_{E_n})^*(s) ds.$$

Esto significa que

$$(u\chi_{E_n})^{**}(t) \geq n(\chi_{E_n})^{**}(t).$$

De aquí obtenemos

$$\int_0^\infty \varphi\left(\frac{(u\chi_{E_n})^{**}(t)}{k}\right) w(t) dt \geq \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(n\chi_{E_n})^{**}(t)}{k}\right) w(t) dt$$

y así

$$\left\{ k > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(u\chi_{E_n})^{**}(t)}{k}\right) w(t) dt \leq 1 \right\} \subseteq \left\{ k > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(n\chi_{E_n})^{**}(t)}{k}\right) w(t) dt \leq 1 \right\},$$

luego

$$\begin{aligned} \inf \left\{ k > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(n\chi_{E_n})^{**}(t)}{k}\right) w(t) dt \leq 1 \right\} \leq \\ \inf \left\{ k > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(u\chi_{E_n})^{**}(t)}{k}\right) w(t) dt \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

esto significa que

$$\|M_u\chi_{E_n}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \geq n\|\chi_{E_n}\|_{\Lambda_{\varphi,w}},$$

lo cual contradice la acotación de  $M_u$ . Luego  $u$  debe ser esencialmente acotada.

Ahora, evidentemente, de (4.1) obtenemos

$$\|M_u\| \leq \|u\|_\infty. \tag{4.2}$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , sea  $E = \{x \in X : |u(x)| \geq \|u\|_\infty - \varepsilon\}$  (observe que  $\mu(E) > 0$ ), entonces

$$\{x \in X : (\|u\|_\infty - \varepsilon)\chi_E(x) > \lambda\} \subseteq \{x \in X : |u\chi_E(x)| > \lambda\},$$

es decir

$$D_{(\|u\|_\infty - \varepsilon)\chi_E}(\lambda) \leq D_{u\chi_E}(\lambda)$$

y así

$$\{\lambda > 0 : D_{u\chi_E}(\lambda) \leq s\} \subseteq \{\lambda > 0 : D_{(\|u\|_\infty - \varepsilon)\chi_E} \leq s\},$$

de esto obtenemos

$$\inf\{\lambda > 0 : D_{(\|u\|_\infty - \varepsilon)\chi_E} \leq s\} \leq \inf\{\lambda > 0 : D_{u\chi_E}(\lambda) \leq s\}.$$

Luego

$$(u\chi_E)^*(s) \geq (\|u\|_\infty - \varepsilon)(\chi_E)^*(s),$$

integrando desde 0 hasta  $t$  y multiplicando por  $\frac{1}{t}$  obtenemos

$$\frac{1}{t} \int_0^t (u\chi_E)^*(s) ds \geq \frac{1}{t} \int_0^t (\|u\|_\infty - \varepsilon)(\chi_E)^*(s) ds,$$

es decir

$$(u\chi_E)^{**}(t) \geq (\|u\|_\infty - \varepsilon)(\chi_E)^{**}(t),$$

entonces

$$\int_0^\infty \varphi \left( \frac{(\|u\|_\infty - \varepsilon)(\chi_E)^{**}(t)}{\|M_u\chi_E\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \right) w(t) dt \leq \int_0^\infty \varphi \left( \frac{(u\chi_E)^{**}(t)}{\|M_u\chi_E\|_{\Lambda_{\varphi,w}}} \right) w(t) dt \leq 1,$$

lo cual implica que

$$\|(\|u\|_\infty - \varepsilon)\chi_E\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \leq \|M_u\chi_E\|_{\Lambda_{\varphi,w}},$$

de aquí

$$(\|u\|_\infty - \varepsilon)\|\chi_E\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \leq \|M_u\chi_E\|_{\Lambda_{\varphi,w}},$$

así

$$\|u\|_\infty - \varepsilon \leq \frac{\|M_u\chi_E\|_{\Lambda_{\varphi,w}}}{\|\chi_E\|_{\Lambda_{\varphi,w}}},$$

lo cual implica que

$$\|M_u\| \geq \|u\|_\infty - \varepsilon, \quad \text{para todo } \varepsilon > 0.$$

De la arbitrariedad de  $\varepsilon$ , se deduce

$$\|M_u\| \geq \|u\|_\infty.$$

En conclusión

$$\|M_u\| = \|u\|_\infty.$$

□

## 4.2. Rango cerrado de $M_u$

En esta sección, caracterizaremos los casos en los cuales  $M_u$  tiene rango cerrado. Iniciamos con un resultado del análisis funcional.

**Teorema 4.5.** *Sea  $T : X \rightarrow Y$  un operador acotado, en donde  $X$  y  $Y$  son espacios de Banach. Entonces  $T$  es acotado inferiormente si y sólo si  $T$  es inyectivo y tiene rango cerrado.*

Una demostración del Teorema 4.5 se puede encontrar en [2].

**Corolario 4.6.**  *$M_u : \Lambda_{\varphi,w}(\text{supp } u) \rightarrow \Lambda_{\varphi,w}(\text{supp } u)$  tiene rango cerrado si y sólo si  $M_u$  es acotado inferiormente sobre  $\Lambda_{\varphi,w}(\text{supp } u)$ .*

Este resultado es claro dado que  $M_u$  es inyectivo en  $\Lambda_{\varphi,w}(\text{supp } u)$ . Además, si  $u \neq 0$   $\mu$ -c.t.p. en  $X$ , siendo  $\mu$  una medida completa, entonces se tiene el siguiente resultado.

**Corolario 4.7.** *Si  $\mu \neq 0$   $\mu$ -c.t.p. en  $X$  y  $\mu$  es una medida completa, entonces*

$$M_u : \Lambda_{\varphi,w}(X, \mathcal{A}, u) \rightarrow \Lambda_{\varphi,w}(X, \mathcal{A}, u)$$

*tiene rango cerrado si y sólo si  $M_u$  es acotado inferiormente sobre  $\Lambda_{\varphi,w}(X, \mathcal{A}, u)$ .*

**Teorema 4.8.**  *$M_u : \Lambda_{\varphi,w}(\text{supp } u) \rightarrow \Lambda_{\varphi,w}(\text{supp } u)$  tiene rango cerrado si y sólo si existe  $\delta > 0$  tal que  $|u(x)| > \delta$   $\mu$ -c.t.p. sobre  $\text{supp } \mu$ .*

*Demostración.* Si existe  $\delta > 0$  tal que  $|u(x)| \geq \delta$   $\mu$ -c.t.p. sobre  $\text{supp}(u)$ , entonces para  $f \in \Lambda_{\varphi,w}$  y  $t > 0$  tenemos

$$\{x : |\delta f \chi_{\text{supp}(u)}(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : |uf \chi_{\text{supp}(u)}(x)| > \lambda\}$$

y así

$$D_{\delta f \chi_{\text{supp}(u)}}(\lambda) \leq D_{uf \chi_{\text{supp}(u)}}(\lambda),$$

entonces

$$\{\lambda > 0 : D_{uf \chi_{\text{supp}(u)}}(\lambda) \leq s\} \subseteq \{\lambda > 0 : D_{\delta f \chi_{\text{supp}(u)}}(\lambda) \leq s\},$$

de aquí obtenemos

$$\inf\{\lambda > 0 : D_{\delta f \chi_{\text{supp}(u)}}(\lambda) \leq s\} \leq \inf\{\lambda > 0 : D_{uf \chi_{\text{supp}(u)}}(\lambda) \leq s\},$$

luego

$$(uf \chi_{\text{supp}(u)})^*(s) \geq \delta(f \chi_{\text{supp}(u)})^*(s),$$

integrando desde 0 hasta  $t$  y multiplicando por  $\frac{1}{t}$ ,

$$\frac{1}{t} \int_0^t (uf\chi_{\text{supp}(u)})^*(s) ds \geq \frac{1}{t} \int_0^t \delta(f\chi_{\text{supp}(u)})^*(s) ds,$$

es decir

$$(uf\chi_{\text{supp}(u)})^{**}(t) \geq \delta(f\chi_{\text{supp}(u)})^{**}(t),$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \left\{ k > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{(uf\chi_{\text{supp}(u)})^{**}(t)}{k} \right) w(t) dt \leq 1 \right\} \subseteq \\ \left\{ k > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{(\delta f\chi_{\text{supp}(u)})^{**}(t)}{k} \right) w(t) dt \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \inf \left\{ k > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{(\delta f\chi_{\text{supp}(u)})^{**}(t)}{k} \right) w(t) dt \leq 1 \right\} \leq \\ \inf \left\{ k > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{(uf\chi_{\text{supp}(u)})^{**}(t)}{k} \right) w(t) dt \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

lo cual significa que

$$\|\delta f\chi_{\text{supp}(u)}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \leq \|M_u f\chi_{\text{supp}(u)}\|_{\Lambda_{\varphi,w}},$$

luego

$$\|M_u f\chi_{\text{supp}(u)}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \geq \delta \|f\chi_{\text{supp}(u)}\|_{\Lambda_{\varphi,w}}.$$

Por lo tanto  $M_u$  tiene rango cerrado.

Recíprocamente, supongamos que  $M_u$  tiene rango cerrado sobre  $\Lambda_{\varphi,w}(\text{supp}(u))$ . Dado que  $M_u : \Lambda_{\varphi,w}(\text{supp}(u)) \rightarrow \Lambda_{\varphi,w}(\text{supp}(u))$  es inyectivo, entonces  $M_u$  es acotado inferiormente, luego existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\|M_u f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \geq \varepsilon \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}}$$

para toda  $f \in \Lambda_{\varphi,w}(\text{supp}(u))$ . Sea  $E = \{x \in \text{supp}(u) : |u(x)| < \varepsilon/2\}$ .

Si  $\mu(E) > 0$ , podemos hallar un conjunto medible  $F \subseteq E$  tal que  $\chi_F \in \Lambda_{\varphi,w}(\text{supp}(u))$ . Entonces

$$\{x : |u\chi_F| > \lambda\} \subseteq \left\{ x : \left| \frac{\varepsilon}{2} \chi_F \right| > \lambda \right\}$$

y así

$$D_{u\chi_F}(\lambda) \leq D_{\frac{\varepsilon}{2}\chi_F}(\lambda),$$

de esto obtenemos

$$\{\lambda > 0 : D_{\frac{\varepsilon}{2}\chi_F}(\lambda) \leq s\} \subseteq \{\lambda > 0 : D_{u\chi_F}(\lambda) \leq s\},$$

entonces

$$\inf\{\lambda > 0 : D_{u\chi_F}(\lambda) \leq s\} \leq \inf\{\lambda > 0 : D_{\frac{\varepsilon}{2}\chi_F}(\lambda) \leq s\},$$

esto es

$$(u\chi_F)^*(s) \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\chi_F\right)^*(s),$$

integrando desde 0 hasta  $t$  y multiplicando por  $\frac{1}{t}$ , obtenemos

$$\frac{1}{t} \int_0^t (u\chi_F)^*(s) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{\varepsilon}{2}\chi_F\right)^*(s) ds,$$

es decir

$$(u\chi_F)^{**}(t) \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\chi_F\right)^{**}(t).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|M_u\chi_F\|_{\Lambda_{\varphi,w}} &= \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{(u\chi_F)^{**}(t)}{\varepsilon} \right) w(t) dt \leq 1 \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\chi_F\right)^{**}(t)}{\varepsilon} \right) w(t) dt \leq 1 \right\} = \left\| \frac{\varepsilon}{2}\chi_F \right\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|\chi_F\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \end{aligned}$$

lo cual es contradictorio. Así que  $\mu(E) = 0$ . Esto completa la demostración.  $\square$

**Corolario 4.9.** *Si  $\mu \neq 0$   $\mu$ -c.t.p. en  $X$  y  $\mu$  es una medida completa, entonces  $M_u$  tiene rango cerrado sobre  $\Lambda_{\varphi,w}(X, \mathcal{A}, \mu)$  si y sólo si existe  $\delta > 0$  tal que  $|u(x)| \geq \delta$   $\mu$ -c.t.p. en  $X$ .*

*Demostración.* El resultado se dá como consecuencia de que

$$\Lambda_{\varphi,w}(X, \mathcal{A}, \mu) = \Lambda_{\varphi,w}(\text{supp } u).$$

$\square$

### 4.3. Invertibilidad de $M_u$

En esta sección, caracterizaremos la invertibilidad de  $M_u$  en términos de la invertibilidad de  $u$  (en el sentido multiplicativo). Iniciamos con el siguiente resultado.

**Teorema 4.10.** *El conjunto de todos los operadores multiplicación sobre  $\Lambda_{\varphi,w}$  es una subálgebra maximal abeliana del conjunto  $B(\Lambda_{\varphi,w})$ , el álgebra de todos los operadores lineales acotados sobre  $\Lambda_{\varphi,w}$ .*

*Demostración.* Sea

$$\mathcal{H} = \{M_u : u \in L_\infty\}$$

y considere el operador multiplicación

$$M_u \cdot M_v = M_{uv},$$

donde  $M_u, M_v \in \mathcal{H}$ . Verifiquemos que ésta es un álgebra de Banach. Sean  $u, v \in L_\infty$ , entonces  $|u| \leq \|u\|_\infty$  y  $|v| \leq \|v\|_\infty$ , luego

$$\|uv\|_\infty \leq \|u\|_\infty \|v\|_\infty,$$

esto implica que el producto es una operación cerrada, además como el producto usual de funciones es asociativo, commutativo y distributivo respecto a la suma y al producto por escalar, concluimos que  $\mathcal{H}$  es una subálgebra de  $B(\Lambda_{\varphi,w})$ . Ahora, vamos a verificar que es una subálgebra maximal, es decir, dado  $N \in B(\Lambda_{\varphi,w})$ , si  $N$  commuta con  $\mathcal{H}$ , debemos demostrar que  $N \in \mathcal{H}$ . Consideremos la función unitaria  $e : X \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $e(x) = 1$  para todo  $x \in X$ . Sea  $N \in B(\Lambda_{\varphi,w})$  un operador que commuta con  $\mathcal{H}$  y sea  $\chi_E$  la función característica de un conjunto medible  $E$ . Entonces

$$N(\chi_E) = N[M_{\chi_E}(e)] = M_{\chi_E}[N(e)] = \chi_E \cdot N(e) = N(e) \cdot \chi_E = M_w \cdot \chi_E,$$

donde  $w = N(e)$ . De manera similar

$$N(s) = M_w(s) \tag{4.3}$$

para cualquier función simple.

Ahora, verificaremos que  $w \in L_\infty$ . Por contradicción, supongamos que  $w \notin L_\infty$ , entonces el conjunto

$$E_n = \{x \in X : |w(x)| > n\}$$

tiene medida positiva para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Note que

$$M_w(\chi_{E_n})(x) = w\chi_{E_n}(x) \geq n\chi_{E_n}(x)$$

para todo  $x \in X$ . Por la monotonicidad de la función distribución tenemos que

$$D_{w\chi_{E_n}}(\lambda) \geq D_{\chi_{E_n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right).$$

De aquí

$$\{\lambda > 0 : D_{w\chi_{E_n}}(\lambda) \leq s\} \subseteq \left\{\lambda > 0 : D_{\chi_{E_n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) \leq s\right\}.$$

Entonces

$$\inf \left\{\lambda > 0 : D_{\chi_{E_n}}\left(\frac{\lambda}{n}\right) \leq s\right\} \leq \inf \{\lambda > 0 : D_{w\chi_{E_n}}(\lambda) \leq s\}.$$

Tomando  $\alpha = \frac{\lambda}{n}$ , obtenemos

$$\|w\chi_{E_n}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \geq n\|\chi_{E_n}\|_{\Lambda_{\varphi,w}},$$

como  $\chi_E$  es una función simple, por (4.3) tenemos

$$M_w(\chi_{E_n}) = N(\chi_{E_n}).$$

Así que

$$\|N(\chi_{E_n})\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \geq n\|\chi_{E_n}\|_{\Lambda_{\varphi,w}}.$$

Entonces  $N$  es un operador no acotado. Esto contradice el hecho que  $N$  es acotado.

Por lo tanto  $w \in L_\infty$  y por el Teorema 4.4  $M_w$  es acotado.

Ahora, dada  $f \in \Lambda_{\varphi,w}$ , existe una sucesión no decreciente  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de funciones simples medibles tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f$  y por (4.3) tenemos

$$N(f) = N(\lim s_n) = \lim N(s_n) = \lim M_w(s_n) = M_w(\lim s_n) = M_w(f).$$

Luego  $N(f) = M_w(f)$  para toda  $f \in \Lambda_{\varphi,w}$  y así concluimos que  $N \in \mathcal{H}$ .  $\square$

**Corolario 4.11.** *El operador multiplicación es invertible sobre  $B(\Lambda_{\varphi,w})$  si y sólo si  $u$  es invertible sobre  $L_\infty$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $M_u$  es invertible. Entonces existe  $N \in B(\Lambda_{\varphi,w})$  tal que

$$M_u \cdot N = N \cdot M_u = I \tag{4.4}$$

donde  $I$  representa el operador identidad. Verifiquemos que  $N$  commuta con  $\mathcal{H}$ .

Sea  $M_w \in \mathcal{H}$ , entonces

$$M_w \cdot M_u = M_u \cdot M_w. \tag{4.5}$$

Aplicando  $N$  a (4.4) y por (4.5) obtenemos

$$\begin{aligned} N \cdot M_w \cdot M_u \cdot N &= N \cdot M_u \cdot M_w \cdot N, \\ N \cdot M_w \cdot I &= I \cdot M_w \cdot N, \\ N \cdot M_w &= M_w \cdot N, \end{aligned}$$

y así concluimos que  $N$  commuta con  $\mathcal{H}$ . Por el Teorema 4.10  $N \in \mathcal{H}$ , entonces existe  $g \in L_\infty$  tal que  $N = M_g$ , así

$$M_u \cdot M_g = M_g \cdot M_u = I,$$

esto implica que  $ug = gu = 1$   $\mu$ -c.t.p., lo cual significa que  $u$  es invertible sobre  $L_\infty$ .

Por otro lado, supongamos que  $u$  es invertible sobre  $L_\infty$ , es decir,  $\frac{1}{u} \in L_\infty$ , entonces

$$M_u \cdot M_{\frac{1}{u}} = M_{\frac{1}{u}} \cdot M_u = M_{(\frac{1}{u})u} = M_1 = I,$$

lo cual significa que  $M_u$  es invertible sobre  $B(\Lambda_{\varphi,w})$ .  $\square$

#### 4.4. Compacidad de $M_u$

Para finalizar este artículo, caracterizaremos la compacidad del operador  $M_u$ . La siguiente definición y el lema subsecuente, tendrán un papel importante en los resultados posteriores.

**Definición 4.12.** *Sea  $T : X \rightarrow X$  un operador. Un subespacio  $V$  de  $X$  se dice invariante bajo  $T$  (o simplemente  $T$ -invariante) si*

$$T(V) \subseteq V.$$

**Lema 4.13.** *Sea  $T : X \rightarrow X$  un operador. Si  $T$  es compacto y  $M$  es un subespacio cerrado  $T$ -invariante de  $X$ , entonces  $T|_M$  es compacto.*

*Demostración.* Sea  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una subsucesión de  $M \subseteq X$ . Entonces  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ , así que existe una subsucesión  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $T(x_{n_k})$  converge in  $X$ , pero  $T(x_{n_k}) \subseteq T(M)$  pues  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq M$ . Entonces  $T(x_{n_k})$  converge en  $\overline{T(M)} \subseteq \overline{M} = M$ . Así  $T(x_{n_k})$  converge en  $M$ , luego  $T|_M$  es compacto.  $\square$

**Teorema 4.14.** *Sea  $M_u$  un operador compacto. Para  $\varepsilon > 0$  defina*

$$A_\varepsilon(u) = \{x \in X : |u(x)| \geq \varepsilon\},$$

$y$

$$\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u)) = \{f \chi_{A_\varepsilon(u)} : f \in \Lambda_{\varphi,w}\}.$$

*Entonces  $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$  es un subespacio cerrado invariante de  $\Lambda_{\varphi,w}$  bajo  $M_u$ . Además*

$$M_u|_{\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))}$$

*es un operador compacto.*

*Demostración.* Sean  $h, s \in \Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Entonces  $h = f \chi_{A_\varepsilon(u)}$  y  $s = g \chi_{A_\varepsilon(u)}$  donde  $f, g \in \Lambda_{\varphi,w}$  así

$$\alpha h + \beta s = \alpha(f \chi_{A_\varepsilon(u)}) + \beta(g \chi_{A_\varepsilon(u)}) = (\alpha f + \beta g) \chi_{A_\varepsilon(u)} \in \Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u)),$$

lo cual significa que  $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$  es un subespacio  $\Lambda_{\varphi,w}$ .

Ahora, para todo  $h \in \Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$  tenemos

$$M_u h = uh = u(f\chi_{A_\varepsilon(u)}) = (uf)\chi_{A_\varepsilon(u)},$$

donde  $uf \in \Lambda_{\varphi,w}$ . Por consiguiente  $M_u \in \Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ , lo cual significa que  $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$  es un subespacio invariante de  $\Lambda_{\varphi,w}$  bajo  $M_u$ .

Ahora, verificaremos que  $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$  es un conjunto cerrado. En efecto, sea  $g$  en la clausura de  $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ , entonces existe una sucesión  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$  tal que

$$g_n \rightarrow g \text{ en } \Lambda_{\varphi,w}.$$

Debemos demostrar que  $g$  pertenece a  $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ . Note que

$$g = g\chi_{A_\varepsilon(u)} + g\chi_{A_\varepsilon^c(u)}.$$

Demostraremos que  $g\chi_{A_\varepsilon^c(u)} = 0$ . Para esto, dado  $\varepsilon_1 > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|g\chi_{A_\varepsilon^c(u)}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = \|(g - g_{n_0} + g_{n_0})\chi_{A_\varepsilon^c(u)}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} = \|(g - g_{n_0})\chi_{A_\varepsilon^c(u)}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \leq \|g - g_{n_0}\|_{\Lambda_{\varphi,w}} < \varepsilon_1.$$

Así,  $g\chi_{A_\varepsilon^c(u)} = 0$  lo cual significa que  $g = g\chi_{A_\varepsilon(u)}$ , es decir,  $g \in \Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$ . Finalmente por el Lema 4.13, tenemos que

$$M_u \Big|_{\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))},$$

es un operador compacto. Con esto termina la demostración.  $\square$

**Teorema 4.15.** *Sea  $M_u \in B(\Lambda_{\varphi,w})$ . Entonces  $M_u$  es compacto si y sólo si  $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$  es de dimensión finita para todo  $\varepsilon > 0$ .*

*Demostración.* Si  $|u(x)| \geq \varepsilon$ , observe que

$$|uf\chi_{A_\varepsilon}(x)| \geq \varepsilon f\chi_{A_\varepsilon}(x)$$

y así

$$\{x : \varepsilon f\chi_{A_\varepsilon}(x) > \lambda\} \subseteq \{x : |uf\chi_{A_\varepsilon}(x)| > \lambda\},$$

luego

$$D_{\varepsilon f\chi_{A_\varepsilon}(u)}(\lambda) \leq D_{uf\chi_{A_\varepsilon}(u)}(\lambda),$$

entonces

$$\{\lambda > 0 : D_{uf\chi_{A_\varepsilon}(u)}(\lambda) \leq s\} \subseteq \{\lambda > 0 : D_{\varepsilon f\chi_{A_\varepsilon}(u)}(\lambda) \leq s\}$$

de aquí obtenemos

$$\inf\{\lambda > 0 : D_{\varepsilon f \chi_{A_\varepsilon}(u)}(\lambda) \leq s\} \leq \inf\{\lambda > 0 : D_{uf \chi_{A_\varepsilon}(u)}(\lambda) \leq s\},$$

es decir

$$(\varepsilon f \chi_{A_\varepsilon}(u))^*(s) \leq (uf \chi_{A_\varepsilon}(u))^*(s),$$

integrando de 0 a  $t$  y multiplicando por  $\frac{1}{t}$  obtenemos

$$\frac{1}{t} \int_0^t (\varepsilon f \chi_{A_\varepsilon}(u))^*(s) dt \leq \frac{1}{t} \int_0^t (uf \chi_{A_\varepsilon}(u))^*(s) ds,$$

o sea

$$(\varepsilon f \chi_{A_\varepsilon}(u))^{\ast\ast}(t) \leq (uf \chi_{A_\varepsilon}(u))^{\ast\ast}(t),$$

multiplicando la anterior desigualdad por  $\frac{1}{k} > 0$ ,

$$\frac{(\varepsilon f \chi_{A_\varepsilon}(u))^{\ast\ast}(t)}{k} \leq \frac{(uf \chi_{A_\varepsilon}(u))^{\ast\ast}(t)}{k}.$$

Dado que  $\varphi$  es no decreciente y el peso  $w$  es una función no negativa, esto conduce a

$$\varphi((\varepsilon f \chi_{A_\varepsilon}(u))^{\ast\ast}(t)) w(t) \leq \varphi((uf \chi_{A_\varepsilon}(u))^{\ast\ast}(t)) w(t).$$

Integrando la anterior desigualdad de 0 a  $\infty$ ,

$$\int_0^\infty \varphi((\varepsilon f \chi_{A_\varepsilon}(u))^{\ast\ast}(t)) w(t) dt \leq \int_0^\infty \varphi((uf \chi_{A_\varepsilon}(u))^{\ast\ast}(t)) w(t) dt.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left\{ k > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(uf \chi_{A_\varepsilon}(u))^{\ast\ast}(t)}{k}\right) w(t) dt \leq 1 \right\} \subseteq \\ \left\{ k > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\varepsilon(f \chi_{A_\varepsilon}(u))^{\ast\ast}(t)}{k}\right) w(t) dt \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \inf \left\{ k > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\varepsilon(f \chi_{A_\varepsilon}(u))^{\ast\ast}(t)}{k}\right) w(t) dt \leq 1 \right\} \leq \\ \inf \left\{ k > 0 : \int_0^\infty \varphi\left(\frac{(uf \chi_{A_\varepsilon}(u))^{\ast\ast}(t)}{k}\right) w(t) dt \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Y así

$$\|M_u f \chi_{A_\varepsilon}(u)\|_{\Lambda_{\varphi, w}} \geq \varepsilon \|f \chi_{A_\varepsilon}(u)\|_{\Lambda_{\varphi, w}}. \quad (4.6)$$

Ahora, si  $M_u$  es un operador compacto, entonces  $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$  es un subespacio cerrado invariante de  $\Lambda_{\varphi,w}$  bajo  $M_u$  y por el Lema 4.13

$$M_u|_{\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))}$$

es un operador compacto. Entonces por (4.6)  $M_u|_{\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))}$  tiene rango cerrado en  $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$  y además es invertible, siendo compacto  $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$  tiene dimensión finita.

Recíprocamente, supongamos que  $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$  es de dimensión finita para cada  $\varepsilon > 0$ . En particular, para cada  $n$ ,  $\Lambda_{\varphi,w}(A_{\frac{1}{n}}(u))$  es de dimensión finita, entonces para cada  $n$ , definamos  $u_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  como

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) & \text{if } |u(x)| \geq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{if } |u(x)| < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$((u_n - u) \cdot f)^*(s) \leq \|u_n - u\|_\infty f^*(s), \quad \forall s > 0.$$

Integrando desde 0 hasta  $t$  y multiplicando por  $\frac{1}{t}$ , obtenemos

$$\frac{1}{t} \int_0^t ((u_n - u) \cdot f)^*(s) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t \|u_n - u\|_\infty f^*(s) ds, \quad \forall s > 0,$$

es decir

$$((u_n - u) \cdot f)^{**}(t) \leq \|u_n - u\|_\infty f^{**}(t).$$

Multiplicando por  $\frac{1}{\varepsilon}$  con  $\varepsilon > 0$  tenemos

$$\frac{((u_n - u) \cdot f)^{**}(t)}{\varepsilon} \leq \frac{\|u_n - u\|_\infty f^{**}(t)}{\varepsilon}.$$

Como  $\varphi$  es no decreciente y el peso  $w$  es no negativo, lo anterior conduce a

$$\int_0^\infty \varphi \left( \frac{((u_n - u) \cdot f)^{**}(t)}{\varepsilon} \right) w(t) dt \leq \int_0^\infty \varphi \left( \frac{\|u_n - u\|_\infty f^{**}(t)}{\varepsilon} \right) w(t) dt.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left\{ \varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{\|u_n - u\|_\infty f^{**}(t)}{\varepsilon} \right) w(t) dt \leq 1 \right\} &\subseteq \\ \left\{ \varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{((u_n - u) \cdot f)^{**}(t)}{\varepsilon} \right) w(t) dt \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{((u_n - u) \cdot f)^{**}(t)}{\varepsilon} \right) w(t) dt \leq 1 \right\} \leq \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \int_0^\infty \varphi \left( \frac{\|u_n - u\|_\infty f^{**}(t)}{\varepsilon} \right) w(t) dt \leq 1 \right\}.$$

Consecuentemente

$$\|M_{u_n}f - M_u f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \leq \|u_n - u\|_\infty \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}} \leq \frac{1}{n} \|f\|_{\Lambda_{\varphi,w}},$$

lo cual implica que  $M_{u_n}$  converge a  $M_u$  uniformemente. Como  $\Lambda_{\varphi,w}(A_\varepsilon(u))$  es de dimensión finita, entonces  $M_{u_n}$  es un operador de rango finito. Luego,  $M_{u_n}$  es un operador compacto y así  $M_u$  es un operador compacto.  $\square$

## Agradecimientos

Los autores agradecen a los revisores anónimos por sus sugerencias, las cuales mejoraron la calidad del artículo.

## Referencias

- [1] M. B. Abrahamse, *Multiplication operators*, ser. Lecture notes in Math. Springer Verlag, 1978.
- [2] Y. A. Abramovich y C. D. Aliprantis, *An invitation to operator theory*, ser. Grad. Stud. Math. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2002, vol. 50.
- [3] S. C. Arora, G. Datt, y S. Verma, “Multiplication operators on Lorentz spaces,” *Indian J. Math.*, vol. 48, no. 3, pp. 317–329, 2006.
- [4] S. Axler, “Multiplication operators on bergman spaces,” *J. Reine Angew. Math.*, vol. 336, pp. 26–44, 1982, doi: 10.1515/crll.1982.336.26.
- [5] C. Bennett y R. Sharpley, *Interpolation of operators*, ser. Pure Appl. Math., Academic Press. Boston, MA etc.: Academic Press, Inc., 1988, vol. 129.
- [6] R. E. Castillo y H. C. Chaparro, *Classical and multidimensional Lorentz spaces*. Berlin: De Gruyter, 2021, doi: 10.1515/9783110750355.
- [7] R. E. Castillo, H. C. Chaparro, y J. C. Ramos-Fernández, “Orlicz-Lorentz spaces and their multiplication operators,” *Hacet. J. Math. Stat.*, vol. 44, no. 5, pp. 991–1009, 2015, doi: 10.15672/HJMS.2015449663.
- [8] R. E. Castillo, R. León, y E. Trousselot, “Multiplication operator on  $L_{(p,q)}$  spaces,” *Panam. Math. J.*, vol. 19, no. 1, pp. 37–44, 2009.
- [9] P. Foralewski y J. Kończak, “Orlicz-Lorentz function spaces equipped with the Orlicz norm,” *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat., RACSAM*, vol. 117, no. 3, p. 23, 2023, Art. ID 120, doi: 10.1007/s13398-023-01449-z.
- [10] L. Grafakos, *Classical Fourier analysis*, 2nd ed., ser. Grad. Texts Math. New York, NY: Springer, 2008, vol. 249, doi: 10.1007/978-0-387-09432-8.
- [11] H. Hudzik, A. Kamińska, y M. Mastyło, “On geometric properties of Orlicz-Lorentz spaces,” *Can. Math. Bull.*, vol. 40, no. 3, pp. 316–329, 1997, doi: 10.4153/CMB-1997-038-6.
- [12] H. Hudzik, A. Kamińska, y M. Mastyło, “On the dual of Orlicz-Lorentz space,” *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 130, no. 6, pp. 1645–1654, 2002, doi: 10.1090/S0002-9939-02-05997-X.
- [13] B. S. Komal y S. Gupta, “Multiplication operators between Orlicz spaces,” *Integral Equations Oper. Theory*, vol. 41, no. 3, pp. 324–330, 2001, doi: 10.1007/BF01203174.
- [14] S. J. Montgomery-Smith, “Orlicz-Lorentz spaces,” in *Proceedings of the Orlicz memorial conference, held in Oxford, MS, USA, March 21-23, 1991*. Oxford, MS: The University of Mississippi, Department of Mathematics, 1991.

- [15] E. T. Oklander, *Interpolation, Lorentz spaces and the theorem of Marcinkiewicz. (Interpolación, espacios de Lorentz y teorema de Marcinkiewicz)*, ser. Cursos Semin. Math. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemática, 1965, vol. 20.
- [16] M. M. Rao y Z. D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, ser. Pure Appl. Math., Marcel Dekker. New York etc.: Marcel Dekker, Inc., 1991, vol. 146.
- [17] R. K. Singh y A. Kumar, “Multiplication operators and composition operators with closed ranges,” *Bull. Aust. Math. Soc.*, vol. 16, pp. 247–252, 1977, doi: 10.1017/S0004972700023261.
- [18] H. Takagi, “Fredholm weighted composition operators,” *Integral Equations Oper. Theory*, vol. 16, no. 2, pp. 267–276, 1993, doi: 10.1007/BF01358956.
- [19] A. Torchinsky, “Interpolation of operations and Orlicz classes,” *Stud. Math.*, vol. 59, pp. 177–207, 1976, doi: 10.4064/sm-59-2-177-207.



## Biorreactor de fermentación con tasa estocástica de consumo

RICARDO CASTRO SANTIS<sup>1,✉</sup> 

FERNANDO CÓRDOVA-LEPE<sup>2</sup> 

ANA BELÉN VENEGAS<sup>3</sup> 

<sup>1</sup> Departamento de Matemática,  
Universidad Tecnológica Metropolitana,  
Santiago, Chile.  
*rcastro@utem.cl*<sup>✉</sup>

<sup>2</sup> Departamento de Matemática, Física y  
Estadística Facultad de Ciencias Básicas,  
Universidad Católica del Maule, Talca,  
Chile.  
*fcordova@ucm.cl*

<sup>3</sup> Departamento de Matemáticas,  
Universidad Andrés Bello, Sede  
Concepción, Chile.  
*a.venegasramos@unab.cl*

### RESUMEN

Se presenta un modelo matemático para describir el funcionamiento de un biorreactor diseñado para reducir la concentración de sustrato en una solución acuosa mediante actividad microbiana. El sistema opera en ciclos: una vez que la concentración de sustrato alcanza un nivel mínimo preestablecido, el biorreactor se vacía y se recarga con una nueva solución que restaura la concentración inicial. El estudio se centra en evaluar la viabilidad operativa del sistema, analizando la duración de los intervalos entre ciclos consecutivos de vaciado y llenado. Para ello, se establecen cotas matemáticas —definidas por los parámetros del modelo— que garantizan la finitud de estos tiempos de espera. Además, se proponen condiciones mínimas para la tasa de consumo microbiano del sustrato, incorporando perturbaciones estocásticas en dicho proceso metabólico.

**Palabras claves:** Biomatemática climática, ecuación diferencial estocástica, biorreactor

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 92B05, 60H10.

Publicado: 20 de agosto de 2025

Aceptado: 20 de mayo de 2025

Recibido: 30 de noviembre de 2024



©2025 R. Castro Santis *et al.* Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

# Fermentation bioreactor with stochastic consumption rate

RICARDO CASTRO SANTIS<sup>1</sup> 

FERNANDO CÓRDOVA-LEPE<sup>2</sup> 

ANA BELÉN VENEGAS<sup>3</sup> 

<sup>1</sup> Departamento de Matemática,  
Universidad Tecnológica Metropolitana,  
Santiago, Chile.  
*rcastro@utem.cl*

<sup>2</sup> Departamento de Matemática, Física y  
Estadística Facultad de Ciencias Básicas,  
Universidad Católica del Maule, Talca,  
Chile.  
*fcordova@ucm.cl*

<sup>3</sup> Departamento de Matemáticas,  
Universidad Andrés Bello, Sede  
Concepción, Chile.  
*a.venegasramos@unab.cl*

## ABSTRACT

We present a mathematical model to describe the operation of a bioreactor designed to reduce the substrate concentration in an aqueous solution via microbial activity. The system works in cycles: once the substrate concentration reaches a pre-established minimum level, the bioreactor empties and is reloaded with a new solution that restores the initial concentration. The study evaluates the system's operational viability, analyzing the length of the intervals between consecutive filling and emptying cycles. To achieve this, we establish mathematical bounds—defined by the model's parameters—guaranteeing the finiteness of these waiting times. In addition, we propose minimal conditions for the microbial consumption rate of the substrate, including stochastic perturbations to the metabolic process.

**Keywords and Phrases:** Climate biomathematics, stochastic differential equation, bioreactor.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 92B05, 60H10.

Published: 20 August, 2025

Accepted: 20 May, 2025

Received: 30 November, 2024



©2025 R. Castro Santis *et al.* This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

## 1. Introduction

El diseño de modelos matemáticos de biorreactores y el análisis de su dinámica es actualmente una herramienta casi indispensable a nivel de investigación industrial avanzada. El desarrollo de la biotecnología así lo requiere. Disponer de la dualidad biorreactor - modelo puede facilitar las labores, por ejemplo, relacionadas con la optimización y el control de los fenómenos.

En la operacionalización de quimiostatos y biorreactores pueden surgir discrepancias notables entre las abundancias observadas (población o sustratos), así como su variabilidad, y las predicciones estables de estos tamaños que se deducen de los modelos deterministas.

En este sentido, la literatura ha respondido con explicaciones que se justifican incorporando elementos de estocasticidad a estos modelos. La comprensión de diversos sistemas biológicos (pesquerías, comunidades ecológicas, etc.) ha mejorado, en términos de realismo, al considerar efectos estocásticos en sus modelos. Se sabe que incorporar estocasticidad puede cambiar radicalmente la dinámica de un sistema y, por ejemplo, donde un modelo determinista predice solo la persistencia de una población microbiana, a partir de su análogo estocástico, se puede inferir una alta probabilidad de extinción. Ver Imhof & Walcher [11].

Para explicar las fluctuaciones observadas en los experimentos, en torno a los equilibrios estables no triviales predichos por los modelos, los modeladores dentro de las estrategias deterministas han incorporado efectos como retardo, entradas periódicas de nutrientes, control por retroalimentación, aunque también ha surgido la alternativa de perturbaciones estocásticas, ver Crump & O'Young [6]. En Xuehui & Yuan [12], se menciona que en el caso de reactores para el tratamiento de aguas residuales, las fluctuaciones en la concentración de sustrato y microbios pueden explicarse a partir de perturbaciones estocásticas en fuentes externas (luz, temperatura u otras). Sin embargo, también en algunas perturbaciones internas, propias de los procesos fisicoquímicos o biológicos subyacentes.

Otra posibilidad que se menciona como causal de la estocasticidad es el incumplimiento de la ley de los grandes números. Este es el caso cuando las poblaciones microbianas no son lo suficientemente abundantes. Así, tenemos modelos que consideran fluctuaciones aleatorias en el tamaño de la población, más precisamente en los procesos de nacimiento o muerte bacteriana individual, por ejemplo, la inexistencia de replicaciones celulares o no regularidad en los tiempos de bipartición, ver Collet *et al.* [4].

Un biorreactor discontinuo es un biorreactor cerrado, es decir, sin entrada ni salida de agua. Además, en el que debe haber un homogeneizador de la mezcla. En este trabajo nos interesa un reactor que funcione casi todo el tiempo como uno cerrado, salvo en una secuencia de instantes en los que se produce un proceso instantáneo de vaciado y llenado de una porción constante del volumen del tanque. En estos instantes se produce un salto en las concentraciones tanto del nutriente como del microorganismo, lo que técnicamente se denomina pulso o impulso.

En la literatura se ha considerado la incorporación de pulsos por diferentes motivos y vías. Un ejemplo es cuando estos instantes de impulso son conocidos de antemano (es decir, predeterminados) y, sin vaciar, se introducen en el sistema cierta cantidad de nutrientes en dichos instantes. Por ejemplo, en Song & Zhao [17], si el intervalo de tiempo entre la introducción de nutrientes es mayor que un cierto umbral (relacionado con la función de consumo), se demuestra la extinción del microorganismo.

En Meng & Gao [14] hay otro ejemplo con uso de tiempos de impulso fijos, en ese modelo se mezcla un efecto de retardo y una secuencia de instantes de alimentación. Allí, el sistema considera un nutriente, una población y una función de consumo de tipo Monod. En este trabajo se dan condiciones de umbral para separar, en el espacio de parámetros, zona de extinción y zona de persistencia de la población.

En el caso que analizaremos, los tiempos de pulso (de vaciado y llenado) no están predefinidos y se determinan en función del valor de la variable de estado, más precisamente cuando la concentración poblacional alcanza un límite superior, un máximo permitido. Un caso particular, ya que se trabaja con una función de conversión específica, lo podemos encontrar en Su & Tian [18], donde se prueba en un contexto determinista la posibilidad de soluciones periódicas estables.

En este artículo, presentamos y estudiamos un modelo de biorreactor de una sola población y una recurso único. Esto parece muy sencillo, pero es novedoso en cuanto considera, por un lado, una secuencia de lotes (es decir, con impulsos) y por otro, incorpora el efecto estocástico como perturbación en la función de consumo, lo que no es habitual.

De hecho, si consideramos que la población está compuesta por organismos unicelulares (p. ej., bacterias), destacamos que durante el metabolismo celular ocurren en el interior de las células diversas series de reacciones químicas (catalizadas por enzimas específicas) que transforman el nutriente. Como existen factores, como la temperatura y/o el pH, que afectan a las enzimas y su especificidad, es natural suponer que se crea una fuente de aleatoriedad en la acción enzimática, ya que está relacionada con los encuentros enzima-producto.

Dado que en el modelo la determinación de los instantes de vaciado-llenado depende del valor de la variable aleatoria de estado (microorganismo-sustrato), el objetivo principal y los resultados del artículo están asociados a la posibilidad de que el biorreactor desarrolle efectivamente, ocupando un tiempo finito, la secuenciación del decaimiento de la concentración del sustrato y su reposición (vaciado-llenado).

El artículo se encuentra estructurado para facilitar diferentes niveles de lectura. Para una evaluación expedita del proceso de modelado y sus propiedades dinámicas, basta con consultar la Sección 2 (donde se presenta el marco teórico-analítico) y la Sección 3 (que sintetiza los principales hallazgos sobre el comportamiento del sistema). Por otro lado, quienes requieran profundizar en los fundamentos matemáticos de los resultados expuestos, encontrarán en la Sección 4 las demostra-

ciones de cada teorema y proposición. La Sección 5 incluye algunas conclusiones y observaciones del trabajo y los aspectos técnicos y herramientas matemáticas auxiliares requeridas para replicar el análisis se han compilado en el apéndice.

## 2. El modelo

Como mínimo, un modelo de biorreactor considera una única especie de microorganismo que consume un único tipo de sustrato, este es nuestro caso. Denotaremos por  $x(\cdot)$  y  $s(\cdot)$ , las funciones que representan respectivamente medidas (no negativas) de la abundancia de microorganismo y sustrato a lo largo del tiempo. En la literatura técnica de base biológica existen diversos modelos matemáticos que explican, en términos cuantitativos, el proceso metabólico en un biorreactor, es decir, relacionan cuantitativamente estas variables. Los modelos diferenciales temporales continuos, que se limitan a representar el crecimiento poblacional a partir de una biomasa inicial  $x_0$  como efecto del consumo gradual de un único aporte de sustrato  $s_0$ , pueden resumirse en la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} s'(t) = -\frac{1}{\gamma} \mu[s(t)] x(t), \\ x'(t) = \mu[s(t)] x(t), \quad s(0) = s_0, x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde la función  $\mu[\cdot]$  representa la tasa de crecimiento en función del sustrato disponible y la constante  $\gamma$  es el factor de conversión del sustrato en biomasa por unidad de tiempo.

El sustrato presente en el bioreactor se mide como masa por unidad de volumen. La biomasa de microorganismos se mide según su tipo y modelo concreto a utilizar. La unidad utilizada no afecta el modelo, lo que es inmediato de la forma de la ecuación (2.1).

### 2.1. Función de conversión de nutrientes en biomasa

La literatura muestra varias formas específicas para la función  $\mu[\cdot]$  dependiendo de los atributos geométricos de su gráfico que deseé incorporar, ver ver Rene & Sveti [2]. La forma que se considera más estándar es  $\mu[s] = \mu^* s / (\kappa + s)$ , del tipo Monod [15], que tiene una forma creciente y cóncava que se aproxima a un valor máximo  $\mu^*$  para valores altos del sustrato y que, para  $s = \kappa$  toma el valor medio de este máximo.

Existen otras posibilidades, pero éstas se definen a tres parámetros. Tenemos la de Haldane [8] y la de Andrews [3], definidas respectivamente.

$$\mu_h[s] = \mu_m[s] \frac{1}{1 + s/\kappa_i} \quad \text{y} \quad \mu_a[s] = \mu_m[s] \frac{1}{1 + \mu_m[s] s/\kappa_i},$$

que son equivalentes por transformación de parámetros. Su forma gráfica cuando  $s$  crece es cóncava, unimodal y luego decae asintóticamente a cero. Con una forma completamente similar, pero no racional, es  $\mu_{asn}[s] = \mu_m[s] e^{-s/\kappa_i}$ , usada en Aiba, Shode & Nogatani [1].

Con cuatro parámetros, tenemos la forma introducida por Webb [19], cuya forma es una alteración de  $\mu_a[\cdot]$ , en efecto,  $\mu_w[s] = \mu_a[s](1 + \beta s/\kappa_i)$ . Esta función en su forma es como  $\mu_a[\cdot]$ , pero con decaimiento asintótico al valor  $\beta$ .

Una muy singular, ya que tiene un dominio  $[0, s_M]$ , pues la concentración es Han & Levenspiel [9], dado por  $\mu_{hl}[s] = \mu_m[s](1 - s/s_M)$ , que es cero en los extremos.

En Shukor & Shukor [16] es posible encontrar una lista de otras formas de la función de conversión de nutrientes en nueva biomasa. Nombres como Teissier [7], Yano & Koga [20], Han & Levenspiel generalizados [9], Luong [13] y Hinshelwood [10], se mencionan asociados con funciones  $\mu[\cdot]$ .

Todas las funciones de conversión de nutrientes-biomasa presentes en este trabajo, comparten la propiedad de ser funciones continuas y pasar por el origen. Con el fin de cubrir un amplio espectro de posibilidades se consideran solo estas hipótesis mínimas sobre la función conversión, es decir;  $\mu : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  es una función continua tal que  $\mu(0) = 0$ .

## 2.2. Ecuación de llenado y vaciado del biorreactor

La dinámica del proceso se desarrolla en un biorreactor que contiene una disolución acuosa en la que hay un sustrato a una concentración inicial igual a  $s_{\oplus}$  (concentración máxima) y una población de microorganismos, al principio de tamaño  $x_0$ , que metabolizan dicho sustrato. El proceso se interrumpe cuando la concentración de sustrato, decreciente por consumo, alcanza un nivel predeterminado que denotamos por  $s_{\ominus}$  (concentración mínima,  $s_{\ominus} < s_{\oplus}$ ), es decir, en un instante  $t > 0$  tal que  $s(t) = s_{\ominus}$ . En este instante  $t$ , se extrae una fracción  $p$  del volumen de la disolución y se rellena con una nueva disolución con una concentración de sustrato igual a la inicial, es decir  $s_{\oplus}$ . Al mezclar instantáneamente con la parte residual que queda en el biorreactor, se genera una nueva concentración  $q s(t) + p s_{\oplus}$ .

Nótese que con este vaciado el número de microorganismos se redujo a  $q x(t)$ ,  $q = 1 - p$  y en el proceso de llenado inmediato no cambia esta cantidad. Es esta población la que reiniciará el siguiente ciclo del proceso metabólico.

En Córdova-Lepe *et al.* [5], se propone un modelo que utiliza un sistema diferencial impulsivo que representa, como variable de estado continua, la parte metabólica y los procesos de vaciado-llenado del biorreactor como pulsos que interrumpen esa continuidad. Este modelo es el siguiente

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{s}(t) & = & -\frac{1}{\gamma} \mu[s(t)] x(t) \\ \dot{x}(t) & = & \mu[s(t)] x(t) \\ s(t^+) & = & q s(t) + p s_{\oplus} \\ x(t^+) & = & q x(t) \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} s(t) \neq s_{\ominus}, \\ s(t) = s_{\ominus}, \end{array} \quad (2.2)$$

con  $s(0) = s_{\oplus}$  and  $x(0) = x_0 > 0$ .

### 2.3. El modelo de perturbación estocástica

La función metabolizadora puede verse afectada por perturbaciones de variado origen, como las inevitables variaciones de temperatura y las vibraciones propias del funcionamiento del biorreactor. En estas circunstancias, la opción de considerar una perturbación normalizada se presenta como la más natural, es decir  $\tilde{\mu}(s) = \mu(s) + \sigma W(t)$ , donde  $W(t)$  es un Ruido Blanco y  $\sigma$  es una constante positiva que modula la intensidad del ruido.

Esta opción, siendo la más natural presenta el inconveniente que para valores cercanos a cero de  $\mu$  o de ruido muy intenso  $\tilde{\mu}$  podría, eventualmente, tomar valores negativos lo que equivale a la introducción de sustrato en el biorreactor, lo que no tiene sentido en el contexto del problema presentado. Este inconveniente, es propio de la modelación por ruido blanco, el cual puede tomar cualquier valor real. En la práctica, esta limitación no afecta el modelamiento para valores pequeños de  $\sigma$  y si existe un valor mínimo, estrictamente positivo, para  $\mu$ . Estas condiciones son fijadas con precisión en la ecuación (3.1).

Así, sustituyendo  $\tilde{\mu}(s)$  en la ecuación (2.1), integrando (en el intervalo  $[0, t]$ ) y utilizando las letras mayúsculas para diferenciar el enfoque estocástico, obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} S(t) & = & S_{\oplus} - \frac{1}{\gamma} \int_0^t \mu[S(u)] X(u) du - \frac{\sigma}{\gamma} \int_0^t X(u) W(u) du \\ X(t) & = & X_0 + \int_0^t \mu(S(u)) X(u) du + \sigma \int_0^t X(u) W(u) du. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que, heurísticamente  $dB(t) = W(t)dt$ , la propuesta de modelo estocástico impulsivo, escrito en su forma diferencial, queda:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} dS & = & -\frac{1}{\gamma} \{ \mu[S]dt + \sigma dB(t) \} X \\ dX & = & \{ \mu[S]dt + \sigma dB(t) \} X \\ S(t^+) & = & qS(t) + pS_{\oplus} \\ X(t^+) & = & qX(t) \end{array} \right\}, \quad \begin{array}{l} S(t) \neq S_{\ominus}, \\ S(t) = S_{\ominus}, \end{array} \quad (2.4)$$

con  $S(0) = S_{\oplus}$  and  $X(0) = X_0 > 0$ .

### 3. Declaración de los resultados principales

Es posible decir que para el sistema dado en (2.4), bajo la hipótesis de un ruido de amplitud no demasiado grande, como para aniquilar la dinámica, es decir

$$\alpha := \min_{Z \in \mathcal{J}} \{ \mu[Z] \} > \sigma^2/2, \quad \text{con} \quad \mathcal{J} := [S_{\ominus}, S_{\oplus}], \quad (3.1)$$

Se cumplen las siguientes proposiciones:

**T<sub>1</sub> Existencia y unicidad:** El proceso tiene solución única en sentido estocástico y estas existen en todo el tiempo futuro. Además, este proceso limita a los tiempos de vaciado-llenado, definido por una ley determinista y unidimensional para la dinámica

**T<sub>2</sub> Finitud de tiempos de espera:** La secuencia definida por los tiempos de espera entre vaciados y llenados consecutivos, es una variable estocástica de esperanza finita.

**T<sub>3</sub> Cota para los tiempos de espera:** El período de espera entre la  $n$ -ésima y la  $(n+1)$ -ésima acción de vaciado-llenado tiene una esperanza en  $[\kappa_n(\beta), \kappa_n(\alpha)]$ , donde

$$\kappa_n(\nu) = \frac{1}{\nu - \sigma^2/2} \ln \left\{ 1 + \frac{\gamma \Delta S_{\ominus}^{\oplus}}{q^n X_0 + q\gamma \Delta S_{\ominus}^{\oplus}} \right\}, \quad (3.2)$$

con  $\Delta S_{\ominus}^{\oplus} = S_{\oplus} - S_{\ominus}$  y  $\beta = \max_{Z \in \mathcal{J}} \{ \mu[Z] \}$ .

**T<sub>4</sub> Comportamiento asintótico:** Los tiempos de espera de los procesos de vaciado-llenado se estabilizan como una variable aleatoria cuya esperanza se encuentra en el intervalo  $[\kappa_{\infty}(\beta), \kappa_{\infty}(\alpha)]$ , donde  $\kappa_{\infty}(\nu) = \ln(1 + 1/q)/[\nu - \sigma^2/2]$ , con  $\nu \in \{\alpha, \beta\}$ .

**T<sub>5</sub> Estabilidad:** Las desviaciones  $\Delta X_0$  y  $\Delta S_{\oplus}$  en términos de los organismos iniciales y del sustrato de entrada respectivamente, implican una variación en la abundancia del microorganismo, después del momento de  $n$ -ésimo vaciado-llenado  $q^n \Delta X_0 + q\gamma \Delta S_{\oplus}$ . A largo plazo, este límite se estabiliza en  $q\gamma \Delta S_{\oplus}$ , de modo que a medida que transcurre el tiempo no habrá

diferencia entre las abundancias poblacionales si no hay diferencia en las concentraciones iniciales del sustrato de entrada

En el caso Monod para  $\mu$ , debido a que es una función creciente, se tiene que  $\alpha = \mu_m[S_\ominus]$  y  $\beta = \mu_m[S_\oplus]$ .

En casos unimodales, como  $\mu_h$ ,  $\mu_a$  o  $\mu_{asn}$ , se tiene un máximo en algún valor de  $S = S^*$ . De modo que, si  $S^* \in \mathcal{J}$ , entonces  $\alpha = \mu[S_\ominus]$  y  $\beta = \mu[S^*]$ , pero en caso de  $S^* \notin \mathcal{J}$ , el valor de  $\alpha$  y  $\beta$  son valores de  $\mu$  en los bordes de  $\mathcal{J}$ , según el tipo de monotonía  $\mu$  en  $\mathcal{J}$ .

Nótese que lo observado en este apartado, en principio, no implica que la espera de un siguiente momento de vaciado-llenado sea acotada, es decir de probabilidad positiva para tiempos de espera arbitrariamente grandes, pero su probabilidad debe tender a cero al crecer el tiempo de espera.

## 4. Demostración de los resultados principales

### 4.1. Demostración de $T_1$

Como se dijo, cuando el nivel de sustrato en el biorreactor disminuye hasta alcanzar el nivel  $S_\ominus$ , se lleva acabo el proceso de *emptying-filling*. Nótese que a partir del tiempo cero, los momentos de intersección con la condición  $S(t) = S_\ominus$ , los llamados tiempos de impulso, forman una secuencia creciente de instantes que denotaremos por  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . De modo que el proceso determinado por (2.4) induce una dinámica discreta bidimensional  $\{(X_n, S_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida por  $X_n = X(\tau_n^+)$  y  $S_n = S(\tau_n^+)$ .

De hecho, a partir de la ecuación (2.3), tomando la suma  $X(\cdot) + \gamma S(\cdot)$ , es posible obtener la siguiente relación lineal entre  $S$  y  $X$ :

$$X(t) - X_n = \gamma(S_n - S(t)), \quad t \in ]\tau_n, \tau_{n+1}], \quad n \geq 0, \quad (4.1)$$

donde se considera  $\tau_0 = 0$ ,  $S_0 = S_\oplus$ .

Dado que  $S_n = S(\tau_n^+)$ , considerando la tercera ecuación del sistema (2.4), se tiene que  $S_n = qS(\tau_n) + pS_\oplus$ , de modo que

$$S_n = qS_\ominus + pS_\oplus, \quad \text{para todo } n \geq 1. \quad (4.2)$$

Por tanto,  $S_n$  es siempre el promedio ponderado entre el valor de concentración de entrada  $S_\oplus$  y la tolerancia reducida (valor de salida)  $S_\ominus$ , ambos parámetros fijos.

Así también se tiene que  $X_n = X(\tau_n^+) = qX(\tau_n)$ . Por lo tanto, por (4.1) se obtiene  $X_{n+1} =$

$q\{X_n + \gamma(S_n - S(\tau_{n+1}))\}$ . Luego por (4.2) se sigue la recurrencia escalar lineal:

$$X_{n+1} = qX_n + \gamma p q \Delta S_{\ominus}^{\oplus}, \quad \text{para todo } n \geq 0. \quad (4.3)$$

**Teorema 4.1.** *Una solución  $(X(\cdot), S(\cdot))$  de (2.4) es tal que  $\{X(\tau_n^+)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , satisface (4.4). Entonces se tiene*

$$X(\tau_n^+) = q^n X_0 + \gamma q \Delta S_{\ominus}^{\oplus} (1 - q^n), \quad \text{para todo } n \geq 1. \quad (4.4)$$

Por lo tanto

$$X(\tau_n^+) \rightarrow \gamma q \Delta S_{\ominus}^{\oplus}, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

*Demostración.* Se obtiene por sustitución directa de (4.4) sobre sí misma, para luego plantear la conjetura de la solución general y demostrar por inducción.  $\square$

**Observación:** Puede resultar sorprendente que el resultado asintótico (4.5) del teorema anterior sea independiente de la función  $\mu[\cdot]$  y del factor estocástico  $\sigma$  del modelo. Sin embargo, como se verá más adelante, la función  $\mu[\cdot]$  influye en la determinación de los tiempos de impulso  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donde tiene lugar el proceso de vaciado-llenado.

## 4.2. Demostración de $T_2$

En la sección anterior, mostramos la dinámica de los puntos iniciales de los procesos de vaciado-llenado del biorreactor, pero esta dinámica presupone que los microorganismos metabolizadores son capaces de llevar la concentración de sustrato desde el estado  $S(\tau_n^+) = qS_{\ominus} + pS_{\oplus}$  al estado  $S(\tau_{n+1}) = S_{\ominus}$  en un tiempo finito (lo que en términos deterministas sería  $\Delta\tau_n := \tau_{n+1} - \tau_n < \infty$ ) y para todos los valores de  $n$ . Por lo tanto, ahora el objetivo principal será (a) demostrar la existencia y unicidad del proceso estocástico (microorganismo-sustrato (2.4)), entre tiempos consecutivos de vaciado-llenado del biorreactor y (b) la finitud de la expectativa de los tiempos de espera de estos procesos (esto es  $\mathbb{E}[\Delta\tau_n] < \infty$ ).

Nótese que la relación (4.1) dada por (2.4), para  $t \in [0, \delta]$ ,  $\delta > 0$  suficientemente pequeño, el sistema se puede desacoplar y reducir a la ecuación estocástica unidimensional:

$$dX(t) = \mu [S_{\oplus} - \{X(t) - X_0\}/\gamma] X(t) dt + \sigma X(t) dB(t), \quad X(0) = X_0. \quad (4.6)$$

Nótese que la ecuación (4.6) tiene la forma dada por (5.3), pero con función  $f[\cdot]$  definida por:

$$f[u] = \mu [S_{\oplus} - \{u - X_0\}/\gamma] u, \quad u \geq 0, \quad (4.7)$$

una función continua, ya que es producto y composición de funciones continuas.

Además, dado que  $f[u]/u = \mu[S]$  y  $S \in \mathcal{J} := [S_{\ominus}, S_{\oplus}]$ , al elegir

$$\alpha = \min_{Z \in \mathcal{J}} \{\mu[Z]\} \quad \text{y} \quad \beta = \max_{Z \in \mathcal{J}} \{\mu[Z]\}, \quad (4.8)$$

la función  $f[\cdot]$  satisface la relación (5.4) con  $L = \infty$ .

En la Sección 2.1, se consideraron varias posibilidades (tomadas de la literatura biológica) para la función  $\mu[\cdot]$ , donde todas ellas cumplen con ser funciones positivas, diferenciables y nulas en cero.

**Lema 4.2.** *Consideremos el proceso definido por (4.6) y la condición  $\alpha > \sigma^2/2$ . Entonces, se tiene que el tiempo de parada definido por*

$$\tau_1 = \inf\{t > 0 \mid X(t) \geq X_0 + \gamma \Delta S_{\ominus}^{\oplus}\}, \quad (4.9)$$

que representa el primer tiempo de vaciado-llenado del biorreactor, es una variable aleatoria de esperanza finita.

*Demostración.* Según lo planteado para la función  $\mu[\cdot]$ , se tiene que  $f[\cdot]$  definida por (4.7) cumple con las hipótesis de la Proposición 5.3. Por lo tanto, se concluye la demostración.  $\square$

Con el Lema 4.2, acabamos de concluir que el tiempo de espera hasta el primer vaciado-llenado tiene expectativa finita. Ahora, necesitamos analizar la existencia de sucesivos tiempos de espera para el proceso de vaciado-llenado del biorreactor.

Recordar que  $\{(X_n, S_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  está dado por

$$X_n = q^n X_0 + q\gamma \Delta S_{\ominus}^{\oplus} (1 - q^n) \quad \text{y} \quad S_n = qS_{\ominus} + pS_{\oplus}.$$

Procediendo por inducción, supongamos que existe un tiempo de parada  $n$ -ésimo. Por lo tanto, el problema de Cauchy estocástico después del  $n$ -ésimo tiempo de vaciado-llenado es:

$$dX(t) = \mu [S_n - \{X(t) - X_n\}/\gamma] X(t) dt + \sigma X(t) dB(t), \quad t > \tau_n. \quad (4.10)$$

Entonces, al cambiar la variable de tiempo  $\tau = t - \tau_n$  con  $t \geq \tau_n$ , transformará la ecuación (4.10) en

$$dY(\tau) = \mu [S_0 - \{Y(\tau) - X_0\}/\gamma] Y(\tau) d\tau + \sigma Y(\tau) d\tilde{B}(\tau), \quad (4.11)$$

con  $Y(0^+) = q^n X_0 + q\gamma(X_0 - \bar{X})$  y donde  $\tilde{B}(\tau)$  es un movimiento Browniano estándar  $\tilde{B}(\tau) := B(\tau + \tau_n) - B(\tau_n)$ .

**Teorema 4.3.** *Considérese el proceso definido por (4.11). Luego, la secuencia definida por los tiempos de espera entre instantes consecutivos de vaciado-llenado, dada por  $\Delta\tau_n := \tau_n - \tau_{n-1}$ , con  $\{\tau_n\}$  definidos recursivamente por*

$$\tau_{n+1} = \inf\{t > \tau_n \mid X(t) \geq qX(\tau_n) + \gamma p \Delta S_{\ominus}^{\oplus}\}, \quad n \geq 1,$$

*es una variable estocástica de esperanza finita.*

*Demostración.* Es análoga a la realizada en el Lema (4.2), siguiendo un argumento recursivo.  $\square$

### 4.3. Demostración de $T_3$

**Teorema 4.4.** *Considérese el proceso definido por (4.11). Entonces,*

$$\frac{\kappa_n}{\beta - \frac{\sigma^2}{2}} \leq \mathbb{E}[\Delta\tau_n] \leq \frac{\kappa_n}{\alpha - \frac{\sigma^2}{2}}. \quad (4.12)$$

*Demostración.* Usando el Teorema 4.3 y (5.7), podemos establecer el siguiente control sobre los tiempos de espera

$$\frac{\ln(X(\tau_{n+1})/X(\tau_n^+))}{\beta - \frac{\sigma^2}{2}} \leq \mathbb{E}[\Delta\tau_n] \leq \frac{\ln(X(\tau_{n+1})/X(\tau_n^+))}{\alpha - \frac{\sigma^2}{2}}. \quad (4.13)$$

Dado que  $X(\tau_{n+1}) = X(\tau_n^+) + \gamma \Delta S_{\ominus}^{\oplus}$  y  $X(\tau_n^+) = q^n X_0 + q\gamma \Delta S_{\ominus}^{\oplus}(1 - q^n)$ , entonces definiendo  $\kappa_n = \ln(X(\tau_{n+1})/X(\tau_n^+))$ , se tiene

$$\kappa_n = \ln\left(1 + \frac{\gamma \Delta S_{\ominus}^{\oplus}}{q^n X_0 + q\gamma \Delta S_{\ominus}^{\oplus}(1 - q^n)}\right) =: \kappa_n. \quad (4.14)$$

con lo que se obtiene directamente (4.12).  $\square$

### 4.4. Demostración de $T_4$

**Teorema 4.5.** *Los tiempos de espera de los procesos de vaciado-llenado se estabilizan como una variable aleatoria cuyo valor esperado se encuentra en el intervalo  $[\Lambda(\alpha), \Lambda(\beta)]$ , con  $\Lambda(\nu) = \ln(1 + 1/q)/[\nu - \sigma^2/2]$ .*

*Demostración.* Considerando la fórmula (4.12), se tiene que el límite de  $\mathbb{E}[\Delta\tau_n]$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , depende de la sucesión  $\{\kappa_n\}$  dada por (4.14). De donde es claro que  $\kappa_n \rightarrow \ln(1 + 1/q)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , concluyendo la demostración.  $\square$

#### 4.5. Demostración de $T_5$

Una cuestión que siempre es interesante en el estudio de la dinámica es el comportamiento asintótico. Sobre esto se tiene que:

**Teorema 4.6.** *La evolución de los valores iniciales representa una dinámica estable.*

*Demostración.* Sea  $(X_0, S_{\oplus})$  y  $(\tilde{X}_0, \tilde{S}_{\oplus})$  dos valores iniciales para la abundancia inicial de microorganismos y la cantidad de nutrientes respectivamente. Entonces,  $\mathcal{V}_n := (X_n, S_n)$  y  $\tilde{\mathcal{V}}_n := (\tilde{X}_n, \tilde{S}_n)$ ,  $n \geq 0$ , representan las respectivas dinámicas discretas, tenemos según la ecuación (4.1) que:

$$\|\mathcal{V}_n - \tilde{\mathcal{V}}_n\| = \|(q^n(X_0 - \tilde{X}_0) + q\gamma(S_{\oplus} - \tilde{S}_{\oplus}), 0)\| \leq \max\{q^n, q\gamma\} \|\mathcal{V}_0 - \tilde{\mathcal{V}}_0\|. \quad (4.15)$$

Por lo tanto, las dos dinámicas son tan cercanas como sus puntos iniciales.  $\square$

**Lema 4.7.** *La dinámica de los valores de  $(X_n, S_n)$ , es decir, inmediatamente después de los tiempos de vaciado-llenado, tiende a un par  $(X_{\infty}, S_{\infty})$  que depende exclusivamente de los valores de la concentración inicial y final de sustrato y, además, de la fracción de volumen extraído.*

*Demostración.* Según las ecuaciones (4.2) y (4.4), se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} (X_n, S_n) = (q\gamma\Delta S_{\ominus}^{\oplus}, pS_{\oplus} + qS_{\ominus})$ . Este es un par independiente de los valores iniciales de concentración de microorganismos, pero dependiente del valor inicial y final de los valores de concentración inicial y final de sustrato y de la fracción de volumen extraído.  $\square$

### 5. Observaciones finales

**Proceso solución:** Hasta ahora se ha usado una construcción por intervalos, desde  $\tau_n$  a  $\tau_{n+1}$ , entonces si denominamos  $X^{(n)}(t)$  a la solución de la ecuación (4.10) para  $t \in ]\tau_n, \tau_{n+1}]$ , el proceso

$$X(t) := \sum_{n=1}^{\infty} X^{(n)}(t) \mathbf{1}_{]\tau_{n-1}, \tau_n]} \quad (5.1)$$

es solución de la ecuación (4.10) para todo  $n$  y además cumple que la condición del proceso de vaciado-llenado. Además,  $S^{(n)}(t) = S_n - \frac{1}{\gamma} (X^{(n)}(t) - X_n)$  soluciona la evolución del sustrato en el intervalo de tiempo estocástico  $]\tau_n, \tau_{n+1}]$ . Por lo tanto el proceso bidimensional

$$(X(t), S(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} (X^{(n)}(t), S^{(n)}(t)) \mathbf{1}_{]\tau_{n-1}, \tau_n]} \quad (5.2)$$

es una solución global de la ecuación (2.3).

El Teorema 4.5 muestra que si la fracción de volumen que se extrae del biorreactor es muy grande ( $p$  cercano a 1), entonces la cantidad de microorganismos que quedan en el biorreactor será muy pequeña ( $q$  cercano a 0), lo que implica un valor de  $K_n$  muy grande, lo que significa un largo tiempo de espera para el metabolizado.

El tiempo de espera asintótico obtenido en el Teorema 4.5 da la impresión que es independiente del modelo en particular que se esté utilizando, pero no es cierto debido a que los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  dependen de la función  $\mu$  de crecimiento de microorganismos.

## Apéndice: Antecedentes matemáticos

En esta sección se expondrán dos resultados matemáticos necesarios para la demostración de los resultados principales.

Dada una función continua  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  y un número positivo  $\sigma$ , consideremos la ecuación diferencial estocástica unidimensional

$$dU(t) = f[U(t)]dt + \sigma U(t)dB(t), \quad U(0) = X_0, \quad (5.3)$$

con el gráfico de  $f[\cdot]$  encerrado por un cono, esto significa que, existen constantes positivas  $\alpha, \beta$  y  $L$  que satisfacen

$$\alpha u \leq f[u] \leq \beta u, \quad \text{para todo } u \in [0, L]. \quad (5.4)$$

**Proposición 5.1.** *Dada la ecuación (5.3) bajo (5.4), entonces*

(a) *Existe una única solución del proceso  $U(\cdot)$  definido en el intervalo temporal  $[0, \tau^*]$ , con tiempo de parada:*

$$\tau^* := \inf \left\{ t > 0; U(t) \geq L \right\}. \quad (5.5)$$

(b) *La solución  $U(\cdot)$  del proceso estocástico satisface*

$$U_\alpha(t) := X_0 e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t} \leq U(t) \leq U_\beta(t) := X_0 e^{(\beta - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}, \quad (5.6)$$

para cada  $t \in [0, \tau^*]$ .

*Demostración.* Para cada  $\nu \in \{\alpha, \beta\}$ , se consideran las funciones  $f_\nu[u] = \nu u + \mathbf{1}_{\{0\}}(\nu)f[u]$ ,  $u \in [0, L]$ , y el sistema  $dU(t) = f_\nu[U(t)]dt + \sigma U(t)dB_t$ . Si  $U_\nu(\cdot)$  es solución, tal que  $U_\nu(0) = X_0$ , con  $X_0 \in [0, L]$ , entonces por (5.4) y una simple comparación de las soluciones del sistema, se tiene  $U_\alpha(\cdot) \leq U_0(\cdot) \leq U_\beta(\cdot)$  en el intervalo  $[0, \tau^*]$ , con  $\tau = \inf\{t > 0; 0 \leq U(t) \geq L\}$ . Nótese que como un movimiento Browniano geométrico tiene una solución explícita, es claro que  $U_\nu(t) = X_0 e^{(\nu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$ , para  $\nu \in \{\alpha, \beta\}$ . De (5.6) sigue el resultado.  $\square$

**Observación 5.2.** *La desigualdad (5.6) implica la positividad de las soluciones. Más aún, si  $\beta < \sigma^2/2$  y  $L = \infty$ , se tiene que  $0 < U(t) \leq U_\beta(t)$  y  $U_\beta(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .*

**Proposición 5.3.** *Consideremos la ecuación (5.3) bajo las condiciones (5.4) y  $\alpha > \sigma^2/2$ , entonces la variable aleatoria  $\tau = \inf\{t > 0, U(t) \geq L\}$  tiene una esperanza acotada tal que*

$$\mathbb{E}(\tau_\beta) \leq \mathbb{E}(\tau) \leq \mathbb{E}(\tau_\alpha), \quad \text{donde} \quad \mathbb{E}(\tau_\nu) = \frac{\ln(L/X_0)}{\nu - (\sigma^2/2)}, \quad (5.7)$$

donde  $\nu \in \{\alpha, \beta\}$ .

*Demostración.* Por la proposición anterior se tiene que  $U_\alpha(t) \leq X(t), \forall t \geq 0$ , luego  $\tau \leq \tau_\alpha$ , donde  $\tau = \inf\{t > 0; U(t) = L\}$  y  $\tau_\alpha = \inf\{t > 0; X^\alpha(t) = L\}$ . Ahora, de la ecuación  $U_\alpha(t) = L$  se obtiene que  $(\alpha - (\sigma^2/2))t + B_t = \ln(L/X_0)$ . De donde se sigue que  $\mathbb{E}(\tau_\alpha)$  en el lado derecho de (5.7). Por hipótesis  $X_0 < L$  y  $\alpha > \sigma^2/2$ , de modo que  $0 < \mathbb{E}(\tau_\alpha) < \infty$ , concluyendo el teorema.  $\square$

## Referencias

- [1] S. Aiba, M. Shoda, y M. Nagatani, "Kinetics of product inhibition in alcohol fermentation," *Biotechnology and bioengineering*, vol. 10, no. 6, pp. 845–864, 1968.
- [2] R. Alt y S. Markov, "Theoretical and computational studies of some bioreactor models," *Comput. Math. Appl.*, vol. 64, no. 3, pp. 350–360, 2012, doi: 10.1016/j.camwa.2012.02.046.
- [3] J. F. Andrews, "A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrates," *Biotechnology and bioengineering*, vol. 10, no. 6, pp. 707–723, 1968.
- [4] P. Collet, S. Martínez, S. Méléard, y J. San Martín, "Stochastic models for a chemostat and long-time behavior," *Adv. Appl. Probab.*, vol. 45, no. 3, pp. 822–836, 2013, doi: 10.1239/aap/1377868540.
- [5] F. Córdova-Lepe, R. Del Valle, y G. Robledo, "Stability analysis of a self-cycling fermentation model with state-dependent impulse times," *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 37, no. 10, pp. 1460–1475, 2014, doi: 10.1002/mma.2907.
- [6] K. S. Crump y W.-S. C. O'Young, "Some stochastic features of bacterial constant growth apparatus," *Bull. Math. Biol.*, vol. 41, pp. 53–66, 1979, doi: 10.1007/BF02547924.
- [7] V. H. Edwards, "The influence of high substrate concentrations on microbial kinetics," *Biotechnology and bioengineering*, vol. 12, no. 5, pp. 679–712, 1970.
- [8] J. B. S. Haldane, *Enzymes*, ser. Monographs on Biochemistry. London: Longmans, Green and Co., 1930.
- [9] K. Han y O. Levenspiel, "Extended monod kinetics for substrate, product, and cell inhibition," *Biotechnology and bioengineering*, vol. 32, no. 4, pp. 430–447, 1988.
- [10] C. Hinshelwood, *The Chemical Kinetics of the Bacterial Cell*. Oxford University Press, 1952.
- [11] L. Imhof y S. Walcher, "Exclusion and persistence in deterministic and stochastic chemostat models," *J. Differ. Equations*, vol. 217, no. 1, pp. 26–53, 2005, doi: 10.1016/j.jde.2005.06.017.
- [12] X. Ji y S. Yuan, "Dynamics of a stochastic functional system for wastewater treatment," *Abstr. Appl. Anal.*, vol. 2014, p. 18, 2014, Art. ID 831573, doi: 10.1155/2014/831573.
- [13] J. Luong, "Generalization of Monod kinetics for analysis of growth data with substrate inhibition," *Biotechnology and Bioengineering*, vol. 29, no. 2, pp. 242–248, 1987.
- [14] X. Meng, Q. Gao, y Z. Li, "The effects of delayed growth response on the dynamic behaviors of the Monod type chemostat model with impulsive input nutrient concentration," *Nonlinear Anal., Real World Appl.*, vol. 11, no. 5, pp. 4476–4486, 2010, doi: 10.1016/j.nonrwa.2010.05.030.

- [15] J. Monod, “The growth of bacterial cultures,” *Selected Papers in Molecular Biology by Jacques Monod*, vol. 139, p. 606, 2012.
- [16] M. S. Shukor y M. Y. Shukor, “Statistical evaluation of the mathematical modelling on the molybdenum reduction kinetics of a molybdenum-reducing bacterium,” *Journal of Environmental Bioremediation and Toxicology*, vol. 2, no. 2, pp. 62–66, 2014.
- [17] X. Song y Z. Zhao, “Extinction and permanence of two-nutrient and one-microorganism chemostat model with pulsed input,” *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, vol. 2006, no. 5, p. 14, 2006, Art. ID 38310.
- [18] K. Sun, Y. Tian, L. Chen, y A. Kasperski, “Nonlinear modelling of a synchronized chemostat with impulsive state feedback control,” *Math. Comput. Modelling*, vol. 52, no. 1-2, pp. 227–240, 2010, doi: 10.1016/j.mcm.2010.02.012.
- [19] J. L. Webb, “Effect of more than one inhibitor,” *Enzyme and metabolic inhibitors*, vol. 1, pp. 66–79, 1963.
- [20] T. Yano y S. Koga, “Dynamic behavior of the chemostat subject to substrate inhibition,” *Biotechnology and bioengineering*, vol. 11, no. 2, pp. 139–153, 1969.



# Representaciones lineales irreducibles de grupos finitos en cuerpos de números

RUBÍ E. RODRÍGUEZ<sup>1</sup> 

ANITA M. ROJAS<sup>2,✉</sup> 

MATÍAS SAAVEDRA-LAGOS<sup>2</sup> 

<sup>1</sup> Departamento de Matemática y  
Estadística, Universidad de La Frontera,  
Temuco, Chile.

*rubi.rodriguez@ufrontera.cl*

<sup>2</sup> Departamento de Matemáticas,  
Facultad de Ciencias, Universidad de  
Chile, Santiago, Chile.

*anirojas@uchile.cl*

*matias.saavedra.l@ug.uchile.cl*

## RESUMEN

En esta breve nota, presentamos un método para construir explícitamente todas las representaciones irreducibles de grupos finitos sobre un cuerpo de números, salvo equivalencia. Como subproducto, describimos cómo encontrar las representaciones irreducibles del grupo de cuaterniones generalizado  $Q(2^n)$ , de orden  $2^n$ , sobre un cuerpo  $L$ , con  $\mathbb{Q} \leq L \leq \mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$  y  $\xi_{2^{n-1}}$  una raíz  $2^{n-1}$ -ésima primitiva de la unidad.

**Palabras clave:** Representaciones irreducibles, grupos finitos.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 20C05.

Publicado: 17 de septiembre de 2025

Aceptado: 10 de julio de 2025

Recibido: 17 de noviembre de 2024

©2025 R. E. Rodríguez *et al.* Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.



# Linear irreducible representations of finite groups over number fields

RUBÍ E. RODRÍGUEZ<sup>1</sup> 

ANITA M. ROJAS<sup>2,✉</sup> 

MATÍAS SAAVEDRA-LAGOS<sup>2</sup> 

<sup>1</sup> Departamento de Matemática y  
Estadística, Universidad de La Frontera,  
Temuco, Chile.

*rubi.rodriguez@ufrontera.cl*

<sup>2</sup> Departamento de Matemáticas,  
Facultad de Ciencias, Universidad de  
Chile, Santiago, Chile.  
*anirojas@uchile.cl*  
*matias.saavedra.l@ug.uchile.cl*

## ABSTRACT

In this brief note, we present a method to construct explicitly all irreducible representations of finite groups over a number field, up to equivalence. As a byproduct, we describe how to find the irreducible representations of the generalized quaternion group  $Q(2^n)$ , of order  $2^n$ , over a field  $L$ , where  $\mathbb{Q} \leq L \leq \mathbb{Q}(\xi_{2^n-1})$  and  $\xi_{2^n-1}$  a primitive  $2^{n-1}$ -root of unity.

**Keywords and Phrases:** Irreducible representations, finite groups

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 20C05

Published: 17 September, 2025

Accepted: 10 July, 2025

Received: 17 November, 2024



©2025 R. E. Rodríguez *et al.* This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

## 1. Introducción

La teoría de representaciones lineales de grupos finitos tiene diferentes aplicaciones a las más diversas áreas de la Matemática. Allí donde se estudien objetos con simetrías, allí esta teoría puede dar luz para describir más en profundidad dichos objetos.

Un ejemplo concreto de ello son los fructíferos resultados sobre variedades abelianas que han surgido de llevar la teoría de representaciones a ese campo. Vea por ejemplo [2–4, 7–9].

Recordemos algunas definiciones que usaremos en esta nota. Sea  $G$  un grupo finito y  $K$  un subcuerpo del cuerpo de los números complejos  $\mathbb{C}$ . Una  $K$ -representación de  $G$  es un homomorfismo de grupos  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ , donde  $V$  un espacio vectorial finito dimensional sobre el cuerpo  $K$ . Dos tales representaciones  $\rho_1 : G \rightarrow GL(V_1)$  y  $\rho_2 : G \rightarrow GL(V_2)$  se dicen equivalentes si existe un  $K$ -isomorfismo  $T : V_1 \rightarrow V_2$  que commuta con las acciones inducidas por  $\rho_j$  en  $V_j$ .

Usando la terminología de módulos, vea [6, §29] para detalles, se tiene que  $V$  es un  $KG$ -módulo (a izquierda), y se dice que  $V$  *sustenta* a  $\rho$ . Una  $K$ -representación, o el módulo que la sustenta, se dice *K-irreducible* si no tiene  $G$ -submódulos (sobre  $K$ ) aparte de los triviales y *descomponible* si todo  $G$ -submódulo (no trivial) tiene un  $G$ -submódulo complementario; esto es, si  $W$  es un  $G$ -submódulo de  $V$ , existe un  $G$ -submódulo  $W^c$  tal que  $V = W \oplus W^c$ . Irreducible e indescomponible (no descomponible) no son equivalentes sobre cuerpos arbitrarios. En esta nota estamos considerando representaciones sobre subcuerpos de  $\mathbb{C}$ , y en este caso, estas propiedades sí lo son.

Dada  $K \subseteq L$  una extensión (finita) de cuerpos, por extensión de escalares se define el  $L$ -módulo

$$V^L := V \otimes_K L.$$

Se tiene que  $V^L$  contiene (una copia isomorfa) de  $V$ ,  $\dim_L V^L = \dim_K V$  y  $V^L$  es un  $LG$ -módulo de forma natural. Se tiene entonces una representación, que denotaremos por la misma letra  $\rho$ , de  $G$  sustentada ahora por  $V^L$ .

Emmy Noether [6, Theorem 29.7] respondió afirmativamente a la pregunta natural: ¿Si  $V_1$  y  $V_2$  son  $KG$ -módulos que son  $L$  equivalentes, entonces también lo son sobre  $K$ ? Esta observación abre la puerta a estudiar las representaciones irreducibles de un grupo  $G$  en cuerpos entre los racionales y los complejos. Se necesita fijar lenguaje para esto [6, Def. 29.12]: Sea  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  una  $K$ -representación irreducible (sobre  $K$ ), se dice que

- $V$  (o  $\rho$ ) es *absolutamente irreducible* si  $V^L$  es  $L$ -irreducible para toda extensión  $K \subseteq L$  de  $K$ .
- Un cuerpo  $L$  se llama *cuerpo de descomposición* para el grupo (finito)  $G$  si y sólo si toda  $L$ -representación  $L$ -irreducible es absolutamente irreducible.

Por [6, Theorem 29.16], dado un grupo finito  $G$ , existe un cuerpo de números que es cuerpo de descomposición de  $G$ . Más aún, [6, §41] Maschke conjeturó alrededor del 1900 y Brauer probó en 1945, que un cuerpo de descomposición para  $G$  es  $L_t := \mathbb{Q}(\xi_t)$ , donde  $t$  es el exponente de  $G$  y  $\xi_t$  es una raíz  $t$ -ésima primitiva de la unidad. Este cuerpo de descomposición muchas veces no es el preciso, en el sentido de mínima extensión de  $\mathbb{Q}$ . Por ejemplo, para el grupo simétrico  $S_3$ , que tiene exponente 6, el cuerpo de los racionales es un cuerpo de descomposición y está estrictamente contenido en  $L_6$ .

### 1.1. Teoría de caracteres

A cada  $K$ -representación  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ , le corresponde un  $K$ -caracter  $\chi_\rho : G \rightarrow K$  definido por  $\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$  en alguna base de  $V$ ,  $\text{tr}(A)$  siendo la traza de la matriz  $A$ . Paralelo a la teoría de representaciones, se desarrolla la teoría de caracteres. Esta tiene varias ventajas; cuando se trata de  $\mathbb{C}$ -representaciones se tienen las siguientes: representaciones equivalentes tienen el mismo carácter, se define un producto interno entre caracteres que captura la equivalencia e irreducibilidad de las representaciones asociadas [10, §2.3].

Aprovechando la correspondencia entre  $K$ -representaciones irreducibles y  $K$ -caracteres irreducibles, se encuentran los  $K$ -caracteres irreducibles de  $G$  a partir de los  $L$ -caracteres irreducibles de  $G$ , donde  $L$  es un cuerpo de descomposición de  $G$ . La técnica descansa en Teoría de Galois para la extensión de cuerpos

$$K \subseteq K(\{\chi(g) : g \in G\}) \subseteq L,$$

vea [6, §70] para detalles.

Si bien para muchas de esas aplicaciones, basta conocer los caracteres de un grupo finito  $G$  en un cuerpo  $K$ , por ejemplo en [4] usan  $K = \mathbb{Q}$  o  $K = \mathbb{C}$  para descomponer variedades abelianas, para otras aplicaciones se necesita la expresión matricial de la representación. Vea por ejemplo [10, §2.7], donde se construyen *proyectores* usando los coeficientes de las matrices correspondientes a una representación para descomponer explícitamente un  $G$ -módulo. O el trabajo [1, pág. 270], donde para demostrar el Lema de Selberg; a saber, todo grupo finitamente generado de matrices en un cuerpo de característica cero tiene un subgrupo de índice finito libre de torsión, usa que hay un homomorfismo inyectivo de  $GL(n, F)$  a  $GL(nk, K)$  donde  $F$  es una extensión algebraica finita de grado  $k$  sobre  $K$ . Sin embargo, hasta donde alcanza nuestro conocimiento, no hay en la literatura métodos explícitos y programables para construir tales representaciones matriciales.

## 2. Preliminaries

En esta sección repasamos algunos de los resultados de [6, §42] que serán útiles en nuestra construcción.

Sea  $m$  un entero positivo,  $\xi_m$  una raíz  $m$ -ésima primitiva de la unidad, y  $K$  un subcuerpo de  $\mathbb{C}$ . Entonces  $K(\xi_m)$  es una extensión normal y finita de  $K$ , y cada automorfismo de  $K(\xi_m)$  que fija los elementos de  $K$  está dado por una función

$$\xi_m \xrightarrow{\varphi_m} \xi_m^r,$$

donde  $r$  es algún entero relativamente primo a  $m$ . Se define  $I_m(K)$  como el grupo multiplicativo de enteros  $r$  (módulo  $m$ ) para los cuales  $\varphi_m$  es un automorfismo de  $K(\xi_m)$ .

Entonces el grupo de Galois  $\text{Gal}(K(\xi_m)/K)$  se identifica naturalmente con  $I_m(K)$ . Se verifica que, por ejemplo,  $I_m(\mathbb{C}) = \{1\}$  e  $I_m(\mathbb{Q}) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ .

**Definición 2.1.** *Con las definiciones de arriba. Sea  $G$  un grupo finito de exponente  $t$ , dos elementos  $a, b \in G$  se dicen  $K$ -conjugados si*

$$x^{-1}bx = a^r,$$

*para algún  $x \in G$  y algún  $r \in I_t(K)$ .*

Existe una notable relación que permite contar las representaciones de un grupo  $G$  sobre un cuerpo  $K \subseteq \mathbb{C}$ .

**Teorema 2.2** ([6, Theorem 42.8]). *El número de  $KG$ -módulos irreducibles no isomorfos es el mismo que el número de  $K$ -clases de conjugación en  $G$ .*

Observe que para el caso en que  $K = \mathbb{Q}(\xi_t)$ ,  $t$  el exponente de  $G$ , se tiene que la  $K$ -conjugación es la conjugación usual. Por otro lado, si  $K = \mathbb{Q}$  dos elementos son  $K$ -conjugados si y sólo si generan grupos conjugados. Se recuperan así los teoremas de *conteo* de representaciones irreducibles conocidos para  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{Q}$ , [6, Theorem 27.22, Theorem 39.5] respectivamente.

Con este teorema podemos contar todos los  $KG$ -módulos irreducibles de un grupo  $G$ , pero no construirlos. Sin embargo, es ya un resultado clásico que los  $K$ -caracteres irreducibles de  $G$  en los diferentes subcuerpos  $K$  de un cuerpo de descomposición  $L$  para  $G$ , el cual es una extensión finita normal de  $\mathbb{Q}$ , se construyen a partir de los  $L$ -caracteres irreducibles. Esto está desarrollado, por ejemplo, en [6, §70], particularmente en los teoremas (70.12) y (70.15), junto al Ejercicio 70.2.

El propósito de esta nota breve es entregar un método que permite encontrar explícitamente las representaciones irreducibles de  $G$ , en una forma matricial, en los cuerpos intermedios  $K$  con  $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L_t$ . Esto es, realizar matricialmente la construcción a nivel de caracteres, por ejemplo en [6, §70], que es lo que se realiza usualmente.

### 3. Construyendo $K$ -representaciones irreducibles

En esta sección  $G$  es un grupo finito de exponente  $t$ ,  $\xi_t$  es una raíz  $t$ -ésima primitiva de la unidad y todos los cuerpos que consideraremos son cuerpos de números contenidos en  $L_t := \mathbb{Q}(\xi_t)$ .

Recordemos que,

- Dos elementos  $a, b \in G$  son  $\mathbb{Q}(\xi_t)$ -conjugados si y solo si son conjugados en el sentido usual.
- Dos elementos  $a, b \in G$  son  $\mathbb{Q}$ -conjugados si y solo si  $g\langle a \rangle g^{-1} = \langle b \rangle$ .

**Definición 3.1.** Sean  $[L : K] = m$  y  $\beta = \{e_1, \dots, e_m\}$  una  $K$ -base de  $L$ . Todo  $l \in L$  determina una transformación lineal  $\pi_l : L \rightarrow L$ , dada por  $\pi_l(x) = lx$ . Denotamos por  $\Pi_l = [\pi_l]_\beta$  la matriz de  $m \times m$  correspondiente a  $\pi_l$  en la base  $\beta$ . Para una matriz  $A = (a_{ij}) \in M(s \times s, L)$  definimos su transformada a  $K$ , denominada  $K(A)$ , reemplazando cada coeficiente  $a_{ij}$  por la matriz correspondiente  $\Pi_{a_{ij}}$ . En otras palabras, definimos la función  $K : M(s \times s, L) \rightarrow M(sm \times sm, K)$  dada por  $K(A) = ([\pi_{a_{ij}}]_\beta)_{1 \leq i, j \leq s}$ .

Ilustramos esta definición con un ejemplo sencillo.

**Ejemplo 3.2.** Sean  $K = \mathbb{Q}$ ,  $L = \mathbb{Q}(i)$  y  $\beta = \{1, i\}$ . Entonces la transformada a  $K$  de la matriz  $A = (i) \in M(1 \times 1, L)$  es

$$K(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La Definición 3.1 nos permite obtener una  $K$  representación de un grupo  $G$  a partir de una  $L$  representación de él. Lo explicamos en el siguiente lema.

**Lema 3.3.** Considera la notación de la Definición 3.1. Sea  $\rho : G \rightarrow GL(r, L)$  una  $L$ -representación matricial de  $G$ , entonces  $\psi : G \rightarrow GL(mr, K)$  dada por  $\psi(g) = K(\rho(g))$  es una  $K$ -representación de  $G$ .

*Demostración.* Esto es inmediato de la contención

$$\mathbb{M}_r(L) \cong \mathbb{M}_r(K) \otimes_K L \subseteq \mathbb{M}_r(K) \otimes_K \mathbb{M}_m(K) \cong \mathbb{M}_{mr}(K),$$

donde  $\mathbb{M}_r(K)$  es el anillo de matrices cuadradas de  $r$ -por- $r$ . □

Hablamos de que la  $K$ -representación  $\psi$  es la *transformada a  $K$*  de la  $L$ -representación  $\rho$ . Note que cada matriz  $\psi(g)$  tiene sus coeficientes en el cuerpo  $K$ . El carácter de  $\psi$  está relacionado con el de  $\rho$  de la siguiente forma.

**Lema 3.4.** *Bajo las condiciones del Lema 3.3, si  $\chi$  es el carácter asociado a la representación  $\rho$ ,  $\chi'$  es el carácter asociado a  $\psi$  y si  $\sigma_1, \dots, \sigma_{[L:K]}$  son todas las incrustaciones de  $L$  en  $\bar{K}$ , entonces  $\chi' = \sum_{i=1}^{[L:K]} \sigma_i(\chi)$ .*

*Demostración.* Siempre que una matriz cuadrada se descompone en bloques cuadrados del mismo tamaño, la traza de la matriz es igual a la suma de las trazas de los bloques diagonales. Se sigue que  $\chi'$  es igual a la suma de las trazas de los coeficientes diagonales  $l$  de  $\rho$  interpretado como matrices  $\Pi_l$ . Por definición, la traza  $\text{tr}_{L/K}(l)$  es la traza de la matriz  $\Pi_l$ . Se sigue que  $\chi' = \text{tr}_{L/K}(\chi)$ , y el resultado sigue de la fórmula usual de la traza.  $\square$

Finalmente, presentamos el resultado que permite construir las  $K$ -representaciones irreducibles de  $G$  a partir de las  $L$ -representaciones irreducibles de él.

**Teorema 3.5.** *Bajo las condiciones del Lema 3.4 anterior, si  $L/K$  es una extensión abeliana de grado primo, y si  $\rho$  es una representación irreducible sobre  $L$  que no está definida sobre  $K$ , entonces  $\psi$  es una representación irreducible de  $K$ .*

*Demostración.* Sean  $\mathcal{G} = \text{Gal}(L/K) = \langle \sigma \rangle$  el grupo de Galois de la extensión  $K \subset L$ ,  $p = [L : K] = \#\mathcal{G}$  (primo). Además, como antes, denote por  $\chi$  al carácter asociado a la representación  $\rho$  y  $\chi'$  al carácter asociado a  $\psi$ . Entonces las órbitas de Galois de  $\chi$  tienen  $p$  elementos o un elemento. En el primer caso  $\chi' = \sum_{i=0}^{p-1} \sigma^i(\chi)$ , y entonces es irreducible por ser la suma de una órbita de Galois. En el segundo caso se tiene que  $\chi' = p\chi$ , entonces si  $m$  es el índice de Schur de  $\chi$  sobre  $K$ , este debe dividir a  $p$ . Como  $m > 1$ , pues  $\rho$  no está definido sobre  $K$ , se concluye que  $m = p$ .  $\square$

## 4. Aplicación 1: Grupos de orden pequeño.

Sea  $G$  un grupo finito de exponente  $t$  y, como antes,  $L_t := \mathbb{Q}(\xi_t)$  con  $\xi_t$  raíz  $t$ -ésima primitiva de 1. En esta sección encontraremos todas las representaciones irreducibles en los cuerpos  $K$  entre  $\mathbb{Q}$  y  $L_t$  para todos los grupos hasta orden 8. Llegamos hasta ese orden pues es el orden donde aparece el primer elemento de la familia de grupos que estudiaremos en la sección siguiente. Usaremos la notación  $C_s$  para el grupo cíclico de orden  $s$ .

Los grupos  $C_2$  y  $C_2 \times C_2$  tiene todas sus representaciones racionales absolutamente irreducibles.

Para  $C_3 = \langle x : x^3 = 1 \rangle$  la situación es distinta. Tiene 3 representaciones irreducibles complejas, todas realizables sobre  $L_3 = \mathbb{Q}(\xi_3)$ . La representación trivial  $\chi_0$  es realizable sobre  $\mathbb{Q}$ . Las otras dos representaciones,  $\chi_1$  y  $\chi_2$  dadas por  $\chi_1(x) = (\xi_3)$  y  $\chi_2(x) = (\xi_3^2)$  respectivamente, no están definidas sobre  $\mathbb{Q}$ . De hecho, corresponden a una única representación de grado 2 irreducible sobre  $\mathbb{Q}$ : La transformada a  $\mathbb{Q}$  de  $\chi_1$  (o  $\chi_2$ ), que está definida por

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad x \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ella se obtiene a partir de la  $\mathbb{Q}$ -base  $\{1, \xi_3\}$  de  $\mathbb{Q}(\xi_3)$ .

El grupo  $C_4 = \langle x : x^4 = 1 \rangle$  tiene 4 representaciones irreducibles todas realizables en  $L_4 = \mathbb{Q}(i)$ . Dos de ellas realizables en  $\mathbb{Q}$  y las otras dos sumadas son equivalentes a la representación del Ejemplo 3.2.

La situación para  $C_5$  comienza a ser más interesante. Tiene cinco representaciones irreducibles complejas, todas realizables sobre el cuerpo  $L_5 = \mathbb{Q}(\xi_5)$ . Note que en este caso tenemos al cuerpo intermedio,  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\xi_5)$ . La representación trivial está definida sobre  $\mathbb{Q}$ . Como  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$  está contenida en  $\mathbb{R}$ , ninguna de las otras representaciones está definida sobre este cuerpo. Las representaciones que envían el generador a  $(\xi_5)$  y  $(\xi_5^4)$  son conjugados complejos, por lo que corresponden a una única representación sobre  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ . Usando la base  $\beta = \{1, \xi_5\}$  obtenemos la representación

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix},$$

donde  $u = \xi_5 + \xi_5^4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ , pues  $\xi_5$  satisface la ecuación  $x^2 = ux - 1$ . Similarmente, las representaciones que mandan el generador a  $(\xi_5^2)$  y  $(\xi_5^3)$  son conjugados complejos, y corresponden a la representación de dimensión dos,

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & u \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -u \\ u & u^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -u \\ u & -u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Como la traza de cada matriz en las últimas dos representaciones es irracional, hay solo dos representaciones irreducibles sobre  $\mathbb{Q}$ , la representación trivial y la que es dada por

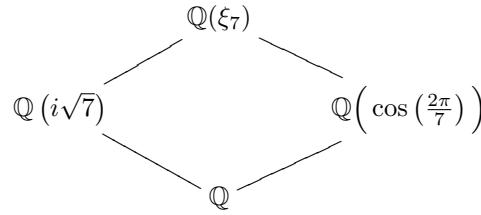
$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

en donde usamos la  $\mathbb{Q}$ -base  $\{1, u\}$  de  $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(u)$ . Note que  $u^2 = -u + 1$ , entonces está última representación corresponde a la matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

En orden 6 tenemos el grupo cíclico  $C_6$  que tiene sus representaciones irreducibles complejas realizables en  $L_6 = \mathbb{Q}(\xi_6)$ . Dos de ellas con cuerpo de descomposición  $\mathbb{Q}$  y las otras cuatro se combinan de a dos para determinar dos  $\mathbb{Q}$ -representaciones irreducibles de grado 2. Para el estudio del grupo dihedral referimos a [4].

#### 4.1. El grupo de orden 7

Llegamos a  $C_7 = \langle x : x^7 = 1 \rangle$  que tiene siete representaciones complejas irreducibles, todas realizables sobre  $L_7 = \mathbb{Q}(\xi_7)$ . Este caso ya tiene más ingredientes. El reticulado de los cuerpos intermedios es el siguiente:



en donde los dos subcuerpos intermedios corresponden a los subgrupos de orden 3 y 2 del grupo  $\mathcal{G}_7 = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_7)/\mathbb{Q})$ , que es el cíclico de orden 6.

Análogo a lo anterior, tenemos siete representaciones complejas  $\chi_j$  dadas por  $\chi_j(x) = (\xi_7^j)$  con  $0 \leq j \leq 6$ .

Primero consideremos las representaciones irreducibles sobre el cuerpo  $\mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)$ . Para eso note que  $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}(\xi_7 + \xi_7^6)$ . Concluimos que  $L = \mathbb{Q}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right)$  es el cuerpo invariante del automorfismo dado por  $\sigma(\xi_7) = \xi_7^{-1}$ . Hay cuatro  $L$ -clases de conjugación (Definición 2.1), estas son  $\{1\}$ ,  $\{x, x^6\}$ ,  $\{x^2, x^5\}$  and  $\{x^3, x^4\}$ . Así que debemos encontrar cuatro representaciones. La representación trivial está definida sobre  $\mathbb{Q}$ , para las restantes, escogemos una representación en cada clase de Galois y aplicamos el método de la Definición 3.1 y Lema 3.3. Tenemos las siguientes matrices:

$$[\pi_{\xi_7}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \end{pmatrix}, \quad [\pi_{\xi_7^2}]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & -2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \\ 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) & -1 + 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) \end{pmatrix},$$

$$[\pi_{\xi_7^3}]_\beta = \begin{pmatrix} -2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) & 1 - 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) \\ -1 + 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) & 1 - 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) \end{pmatrix}.$$

Para el coeficiente de la esquina de abajo y derecha de la última matriz usamos el hecho de que  $u = 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$  satisface  $u^3 + u^2 - 2u - 1 = 0$ , y por lo tanto  $u^3 - 2u = 1 - u^2$ .

Ahora consideramos las representaciones irreducibles sobre el cuerpo  $E = \mathbb{Q}(i\sqrt{7})$ . Note que  $i\sqrt{7} = 2(\xi_7 + \xi_7^2 + \xi_7^4) + 1$ , por lo tanto  $E$  es el cuerpo fijo del automorfismo dado por  $\sigma(\xi_7) = \xi_7^2$ . Note

que  $\xi_7$  y  $\xi_7^3$  están en diferentes órbitas de Galois. De nuevo, podemos escribir las representaciones sobre  $E$  de dimensión tres enviando el generador a las matrices  $[\pi_{\xi_7}]_\beta$  o  $[\pi_{\xi_7^3}]_\beta$  en una base dada. Para poder calcular estas matrices necesitamos encontrar el polinomio irreducible de  $\xi_7$  sobre  $E$ . Sea  $b = \xi_7 + \xi_7^2 + \xi_7^4 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ . Entonces  $\xi_7$  es una raíz de  $x^4 + x^2 + x - b = 0$ . También se tiene que  $\xi_7^3 + \xi_7^5 + \xi_7^6 = -1 - b$ . Multiplicando por  $\xi_7^4$  obtenemos  $(1+b)\xi_7^4 + 1 + \xi_7^2 + \xi_7^3 = 0$ . En particular  $\xi_7$  es una raíz de  $(1+b)x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0$ . Multiplicando la primera ecuación por  $b+1$  y restándola con la segunda ecuación obtenemos,  $x^3 - bx^2 - (1+b)x + (b^2 + b + 1) = 0$ . Como es una ecuación cúbica, esta debe ser el polinomio irreducible de  $\xi_7$ . Note que además  $b = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$  es una raíz de  $x^2 + x + 2 = 0$ , entonces podemos reescribir el polinomio minimal de  $\xi_7$  sobre  $E$  como  $x^3 - bx^2 - (1+b)x - 1$ . Esto nos entrega la matriz

$$[\pi_{\xi_7}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b+1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix},$$

y también

$$[\pi_{\xi_7^3}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b+1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ b+1 & -1 & -1 \\ b & -1 & -1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} & -1 \\ \frac{1+i\sqrt{7}}{2} & -1 & -1 \\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} & -1 & \frac{-1-i\sqrt{7}}{2} \end{pmatrix}.$$

En donde para computar la última matriz, la identidad  $b^2 + b + 1 = -1$  fue usada varias veces.

Finalmente, encontraremos las representaciones irreducibles sobre  $\mathbb{Q}$  a partir de las representaciones irreducibles de la extensión cúbica  $L/\mathbb{Q}$ . Primero note que las  $\mathbb{Q}$ -clases de conjugación son  $\{1\}$  y  $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$ , entonces hay precisamente dos representaciones irreducibles sobre  $\mathbb{Q}$ . Considere la  $\mathbb{Q}$ -base de  $L$  dada por  $\beta = \{1, \cos(\frac{2\pi}{7}), \cos^2(\frac{2\pi}{7})\}$ . Entonces se tiene que

$$[\pi_{\pm 1}]_\beta = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad [\pi_{2\cos(\frac{2\pi}{7})}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

en donde para la última matriz, usamos que  $u = 2\cos(\frac{2\pi}{7})$  satisface  $u^3 = -u^2 + 2u + 1$ , y por lo tanto  $u\cos^2(\frac{2\pi}{7}) = -\cos^2(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{2\pi}{7}) + 1/4$ . Ahora la representación irreducible no trivial

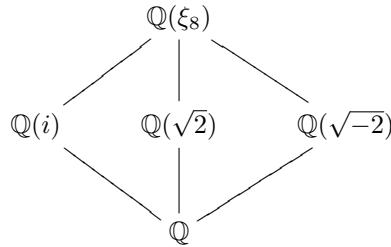
sobre  $\mathbb{Q}$  está dada por

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

#### 4.2. Grupos de orden 8

Para los dos grupos abelianos  $C_4 \times C_2$  y  $C_2 \times C_2 \times C_2$  construimos sus representaciones como producto directo de las representaciones de sus factores, las que fueron descritas arriba. Para  $D_4$  referimos a [4]. Queda entonces por analizar las representaciones de  $C_8$  y  $Q_8$ . Vamos por casos.

- Sea  $G = C_8 = \langle x : x^8 = 1 \rangle$ . Todas sus representaciones complejas irreducibles están definidas sobre  $L_8 = \mathbb{Q}(\xi_8)$ . El reticulado de este cuerpo es



Hay ocho representaciones irreducibles sobre el cuerpo  $\mathbb{Q}(\xi_8)$ , cada una de la forma  $\chi_r(x) = \xi_8^r$  con  $0 \leq r \leq 7$ . Para  $r = 0, 4$  la representación está definida sobre  $\mathbb{Q}$ . Misma situación para  $\mathbb{Q}(i)$  y representaciones correspondientes a  $r = 2, 6$ .

Las otras cuatro se separan en dos pares de órbitas de Galois y por lo tanto se obtienen a partir de las representaciones que envían el generador a  $\xi_8$  y  $\xi_8^3$ , esto pues  $\mathbb{Q}(i)$  es el cuerpo invariante del automorfismo  $\xi_8 \mapsto -\xi_8 = \xi_8^5$ .

Concluimos que las representaciones irreducibles restantes sobre  $\mathbb{Q}(i)$ , se obtienen mandando el generador a las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

El cuerpo  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  es el cuerpo invariante del automorfismo que envía  $\xi_8$  a  $\xi_8^7$ , pues es la intersección de  $\mathbb{Q}(\xi_8)$  con el cuerpo de números reales. En este caso, las órbitas de Galois

de las raíces de la unidad son  $\{i, -i\}$ ,  $\{\xi_8, \xi_8^7\}$  y  $\{\xi_8^3, \xi_8^5\}$ . Más aún,  $\xi_8$  satisface la ecuación  $x^2 - x\sqrt{2} + 1 = 0$ , mientras que  $i$  satisface la ecuación  $x^2 + 1 = 0$ . Obtenemos, entonces, tres representaciones irreducibles de dimensión dos sobre este cuerpo, donde las imágenes de  $x$  es alguna de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, el cuerpo  $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$  es el cuerpo invariante del automorfismo que envía  $\xi_8$  a  $\xi_8^3$ . En este caso, las órbitas de Galois de las raíces de la unidad son  $\{i, -i\}$ ,  $\{\xi_8, \xi_8^3\}$  y  $\{\xi_8^5, \xi_8^7\}$ . Más aún,  $\xi_8$  satisface la ecuación  $x^2 - x\sqrt{-2} - 1 = 0$ , mientras  $i$  satisface la ecuación  $x^2 + 1 = 0$ , como antes. Obtenemos, nuevamente, tres representaciones irreducibles de dimensión dos sobre este cuerpo, donde la imagen de  $x$  es una de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{-2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{-2} \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{-2} & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las representaciones irreducibles racionales se pueden obtener a partir de las de  $\mathbb{Q}(i)$ , y obtenemos las representaciones que envían  $x$  a:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Sea  $G = \langle x, y | x^4 = y^4 = 1, x^2 = y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$ , el grupo cuaternio  $Q_8$ . Todas las representaciones irreducibles complejas [6, Ex. §70.13] están definidas sobre  $\mathbb{Q}(i)$ . Hay cuatro representaciones irreducibles de dimensión uno que envían los generadores a  $(1)$  o  $(-1)$  y están definidas sobre  $\mathbb{Q}$  y una representación de dimensión 2 dada por:

$$\rho_5(x) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \rho_5(y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando el Lema 3.3 y Ejemplo 3.2, vemos que esta última corresponde a una representación irreducible sobre  $\mathbb{Q}$  dada por

$$\rho_5(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_5(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 5. Aplicación 2: Cuaterniones generalizados

Estudiaremos ahora las representaciones irreducibles, en los distintos cuerpos de números entre  $\mathbb{Q}$  y el cuerpo de descomposición  $L_{exp(G)}$ , para  $G$  en la familia de cuaterniones generalizados. Su presentación es la siguiente:

$$Q(2^n) = \langle x, y : x^{2^{n-1}} = 1, y^2 = x^{2^{n-2}}, yxy^{-1} = x^{-1} \rangle, \quad \text{with } n \geq 3.$$

Este grupo tiene orden  $2^n$ . Cada elemento se puede escribir como  $x^\alpha y^\beta$  con  $\alpha \in \{0, \dots, 2^{n-1} - 1\}$  y  $\beta \in \{0, 1\}$ , el exponente de este grupo es  $t = 2^{n-1}$ , así que las representaciones irreducibles complejas de este grupo son realizables en  $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$ . Como además se conocen sus representaciones irreducibles sobre  $\mathbb{C}$ , o lo mismo sobre  $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$ , sólo tenemos que aplicar los resultados de la sección anterior, Lema 3.3 y Teorema 3.5, para obtener lo deseado.

De [5, §4.1], y las referencias allí citadas, se obtiene que el grupo  $Q(2^n)$  tiene  $3 + 2^{n-2}$  representaciones irreducibles sobre  $\mathbb{C}$ , cuatro de ellas son racionales pues mandan los generadores a (1) o  $(-1)$ , y las otras están dadas por

$$\theta_s : x \mapsto \begin{pmatrix} \omega^s & 0 \\ 0 & \omega^{-s} \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^s & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $\omega = \exp(2\pi i/2^{n-1})$  y  $s \in \{1, \dots, 2^{n-2} - 1\}$ . Note que  $\theta_s$  tiene, en su diagonal, una órbita de la acción natural de  $-1$  sobre las raíces  $2^{n-1}$ -ésimas de la unidad, excepto 1 y  $-1$ .

Recuerde que si  $\mathcal{U}_n$  es el conjunto de raíces  $n$ -ésimas de la unidad y  $\mathcal{PU}_n$  es el conjunto de raíces  $n$ -ésimas primitivas de la unidad, entonces

$$\mathcal{U}_{2^{n-1}} = \bigsqcup_{k|2^{n-1}} \mathcal{PU}_k.$$

**Definición 5.1.** Considerando la notación anterior, se define

$$Irr(2^k) = \{\theta_s \in Irr_{\mathbb{C}}(Q(2^n)) : \omega^s \in \mathcal{PU}_{2^k}\},$$

con  $2 \leq k \leq n - 1$ .

Note que  $\text{Irr}(2^k)$  tiene  $2^{k-2}$  elementos, una representación por cada  $\langle -1 \rangle$ -órbita sobre  $\mathcal{P}\mathcal{U}_{2^k}$ .

En esta sección tenemos tres objetivos. El primero es *contar*, vea la Sección 5.1. Es decir, determinar la cantidad de representaciones irreducibles (salvo equivalencia) sobre los distintos subcuerpos de  $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$ . Recordemos que  $K$  es un subcuerpo de  $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$  entonces  $\text{Gal} = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/K)$  actúa sobre cada representación por la acción sobre cada entrada de las matrices correspondientes. El número de órbitas de esta acción es el número de representaciones irreducibles sobre  $K$  [6, §70].

El segundo objetivo (Sección 5.2) es describir explícitamente las representaciones matriciales sobre  $\mathbb{Q}$  del grupo  $Q(2^n)$ . Si bien en [5, §3.1] las describen como representaciones complejas, aquí queremos exhibir las matrices con sus entradas efectivamente en  $\mathbb{Q}$ .

El tercer objetivo es entregar un procedimiento algorítmico que permite construir todas las representaciones irreducibles del grupo  $Q(2^n)$  en los cuerpos intermedios entre  $\mathbb{Q}$  y su cuerpo de descomposición  $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$ . El cual es fácilmente generalizable a cualquier grupo (finito)  $G$ .

### 5.1. Cantidad de representaciones irreducibles del grupo cuaternio generalizado

Aplicando los resultados expuestos en la sección anterior, primero comenzamos por determinar la cantidad de representaciones irreducibles en los distintos cuerpos de interés del grupo  $Q(2^n)$ .

Primero, recuperamos, por completitud y a nuestro contexto, un resultado obtenido en [5, §4].

**Proposición 5.2** ([5, §4.1]). *Considere el grupo  $Q(2^n)$ , con  $n \geq 3$ . El número de representaciones irreducibles sobre  $\mathbb{Q}$  es  $n + 2$ .*

*Demostración.* Considere  $\phi \in \text{Irr}(2^k)$ , entonces si  $\tau \in \text{Gal} \cong (\mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z})^*$  actúa sobre  $\phi$ , como para todo  $\omega \in \mathcal{P}\mathcal{U}_{2^k}$ ,  $\omega^\tau \in \mathcal{P}\mathcal{U}_{2^k}$ , tenemos que  $\tau.\phi \in \text{Irr}(2^k)$ . Más aún, la acción del grupo de Galois correspondiente en  $\mathcal{P}\mathcal{U}_{2^k}$  es transitiva, entonces para todo  $\omega \in \mathcal{P}\mathcal{U}_{2^k}$  tenemos que  $\text{Gal}(\omega) = \mathcal{P}\mathcal{U}_{2^k}$ , así que concluimos que la acción de Gal sobre  $\text{Irr}(2^k)$  es transitiva. Por otro lado, como las representaciones irreducibles de dimensión uno están definidas sobre  $\mathbb{Q}$ , estas están fijas por cada elemento del grupo de Galois. Luego concluimos que hay  $n + 2$  órbitas, cuatro de ellas son singletons que consisten en las representaciones de dimensión uno y las otras  $n - 2$  corresponden a los conjuntos  $\text{Irr}(2^k)$ .  $\square$

Ahora calcularemos la cantidad de representaciones irreducibles, salvo equivalencia, sobre los otros subcuerpos de  $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$ .

**Proposición 5.3.** *Considere el grupo  $Q(2^n)$ , con  $n \geq 3$ , el número de representaciones irreducibles sobre  $\mathbb{Q}(\xi_{2^k})$ , con  $2 \leq k \leq n-1$  es  $(n-k+1)2^{k-2} + 3$*

*Demuestração.* Para este resultado recordemos que la notación  $ord_b(a)$  se refiere al orden multiplicativo del elemento  $a$  visto en  $(\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^*$ .

Si  $\text{Gal} = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^k}))$  entonces  $|\text{Gal}| = 2^{n-2}/2^{k-1} = 2^{n-k-1}$ . Ahora, como las representaciones irreducibles en los conjuntos  $\text{Irr}(2^q)$ , con  $2 \leq q \leq k$  están definidas sobre  $\mathbb{Q}(\xi_{2^k})$  los estabilizadores de la representación en estos conjuntos son todos los elementos de  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^k}))$ .

Para calcular los estabilizadores de las otras representaciones note que  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^k}))$  es un subgrupo de  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q})$  y este último es isomorfo a  $(\mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z})^*$ . De hecho, usando el resultado de que para todo  $k \geq 2$   $ord_{2^k}(5) = 2^{k-2}$ , se puede ver que la acción de  $5^{2^{k-2}}$  fija el elemento  $\xi_{2^k}$ , es decir que si  $\tau \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q})$  es tal que  $\tau(\xi_{2^{n-1}}) = \xi_{2^{n-1}}^{5^{2^{k-2}}}$  entonces  $\tau(\xi_{2^k}) = \xi_{2^k}$  y por lo tanto  $\tau \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^k}))$ , más aún, se tiene que  $|\tau| = 2^{n-k-1}$ , y por lo tanto podemos concluir que  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^k}))$  es isomorfo a  $\langle \bar{5}^{2^{k-2}} \rangle \subseteq (\mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z})^*$ . Así que considere  $\phi \in \text{Irr}(2^q)$ , con  $k+1 \leq q \leq n-1$ . Esta representación tiene asociada una raíz  $2^q$ -ésima primitiva de la unidad  $\omega$ . Entonces si identificamos a los elementos de  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^k}))$  con sus respectivas imágenes en  $(\mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z})^*$  se cumple que  $\tau^i \in Stab_{\text{Gal}}(\phi)$  si y solo si  $\omega^{\tau^i} = \omega$  o  $\omega^{-\tau^i} = \omega$ , y esto pasa si y solo si  $\tau^i \equiv 1 \pmod{2^q}$  o  $\tau^i \equiv -1 \pmod{2^q}$ , recuerde que  $\tau^i = \bar{5}^{2^{k-2}i}$  para algún  $1 \leq i \leq 2^{n-k-1}$ . Esta última condición no pasa ya que  $5 \equiv 1 \pmod{4}$  y entonces se tendría que  $1 \equiv -1 \pmod{4}$ , lo que es una contradicción. Así es que queremos conocer cuándo  $5^{2^{k-2}i} \equiv 1 \pmod{2^q}$ , esto pasa si y solo si  $2^{k-2}i = 2^{q-2}r$ , para algún  $r \in \mathbb{Z}$ , entonces se tiene que  $i = 2^{q-k}r$ , y como  $1 \leq i \leq 2^{n-k-1}$ , existen  $2^{n-q-1}$  posibilidades para  $r$ . Concluimos que  $|Stab_{\text{Gal}}(\phi)| = 2^{n-q-1}$ .

Usando el lema de conteo de Burnside, se tiene que

$$\begin{aligned}
 |\text{Gal} \setminus \text{Irr}_{\mathbb{C}}(Q(2^n))| &= \frac{1}{|\text{Gal}|} \sum_{\phi \in \text{Irr}} |Stab_{\text{Gal}}\phi| \\
 &= \frac{1}{|\text{Gal}|} (4|\text{Gal}| + \sum_{q=2}^k |\text{Irr}(2^q)| |\text{Gal}| + \sum_{q=k+1}^{n-1} |\text{Irr}(2^q)| 2^{n-q-1}) \\
 &= 4 + \sum_{q=2}^k 2^{q-1} + \frac{1}{2^{n-k-1}} \sum_{q=k+1}^{n-1} 2^{q-2} 2^{n-q-1} \\
 &= 4 + 2^{k-1} - 1 + (n-k-1)2^{k-2} = (n-k+1)2^{k-2} + 3.
 \end{aligned}$$

Y con esto se concluye el resultado.  $\square$

## 5.2. Representaciones irreducibles matriciales racionales para el cuaternio generalizado

Una vez que conocemos la cantidad de representaciones irreducibles racionales de un grupo  $G$  y su descomposición en irreducibles complejas, nos interesa describir explícitamente las matrices correspondientes en cada una de ellas. Para eso usamos el método del Teorema 3.5.

Para el caso de  $G = Q(2^n)$  sabemos obtener explícitamente las  $n + 2$  representaciones irreducibles racionales sobre  $Q(2^n)$  como representaciones complejas, ver [5, §3.1]. Ahora queremos exhibir cómo se ven matricialmente con coeficientes efectivamente en el cuerpo  $\mathbb{Q}$ . Recordemos que, técnicamente, el resultado en [6] escribe cómo construir cada irreducible racional como suma directa de complejas, luego estas no se verán necesariamente como matrices con coeficientes en  $\mathbb{Q}$ . Lo que se sabe, en ese punto, es que es *realizable* sobre  $\mathbb{Q}$ ; es decir, es  $\mathbb{C}$ -equivalente a una representación racional.

Vamos entonces a la construcción explícita de las representaciones irreducibles racionales de  $Q(2^n)$  (salvo isomorfismo). Primero, sabemos que las cuatro representaciones (de grado 1) son realizables sobre  $\mathbb{Q}$ . Para obtener las otras  $n - 2$  representaciones irreducibles racionales de forma efectiva en los racionales, escogeremos un elemento del conjunto  $\text{Irr}(2^k)$  para cada  $2 \leq k \leq n - 1$ . Luego, con el procedimiento descrito en el Lema 3.3 y Teorema 3.5, obtenemos explícitamente una representación racional irreducible  $\varphi$ . Esta, al tensorizarla con  $\mathbb{C}$ , se descompone en suma de algunas de las irreducibles que tenemos. Repetimos el proceso con otra de las representaciones irreducibles complejas de  $Q(2^n)$  que no es componente de  $\varphi$ . Con este procedimiento encontramos todas las representaciones irreducibles racionales del grupo.

**Proposición 5.4.** *Sea  $\theta_{2^k}$  la representación en  $\text{Irr}(2^k)$  que envía  $x$  a la matriz  $\begin{pmatrix} \xi_{2^k} & 0 \\ 0 & \xi_{2^k}^{-1} \end{pmatrix}$ , con  $\xi_{2^k}$  una raíz  $2^k$ -ésima primitiva de la unidad. Entonces, la transformada  $\mathbb{Q}$  de  $\theta_{2^k}(x)$  corresponde a la matriz*

$$\mathbb{Q}(\theta_{2^k}(x)) = \begin{pmatrix} [\xi_{2^k}]_\beta & 0 \\ 0 & [\xi_{2^k}^{-1}]_\beta \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & \cdots & 0 & -1 \\ & & 0 & \\ \hline I_{2^{k-1}-1} & & \vdots & \\ & & 0 & \\ \hline \mathbf{0} & & & \\ & & \vdots & I_{2^{k-1}-1} \\ & & 0 & \\ & & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)$$

y la transformada  $\mathbb{Q}$  de  $\theta_{2^k}(y)$  corresponde a la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ (-I_n)^s & 0 \end{pmatrix}.$$

En ambos casos  $I_\star$  denota la matriz identidad de tamaño  $\star$ .

*Demuestra*ción. Considera la  $\mathbb{Q}$ -base de  $\mathbb{Q}(\xi_{2^k})$ ,  $\beta = \{1, \xi_{2^k}, \dots, \xi_{2^k}^{2^{k-1}-1}\}$ . Como se cumple que  $\xi_{2^k}^{2^{k-1}} = -1$  y  $\xi_{2^k}^{-1} = -\xi_{2^k}^{2^{k-1}-1}$ , la representación resultante de aplicar la transformada  $K = \mathbb{Q}$  a  $\theta_{2^k}$  es tal que  $g \mapsto \mathbb{Q}(\theta_{2^k}(g))$  para todo  $g \in Q(2^n)$ . Recuerde que esta transformada consiste en aplicar la Definición 3.1 a cada entrada de cada matriz correspondiente a  $\theta_{2^k}(g)$ .

Para ver que esta representación es irreducible calculamos su carácter.

Note que los elementos de  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^k})/\mathbb{Q})$  actúan enviando  $\xi_{2^k}$  a  $\xi_{2^k}^\alpha$  con  $\alpha$  un número impar. Entonces si  $\chi$  es el carácter de la representación  $\theta_{2^k} \in \text{Irr}(2^k)$  escogida y  $\chi'$  es el carácter de la representación  $\mathbb{Q}(\theta_{2^k})$  después de aplicar la transformada a  $\mathbb{Q}$  (Definición 3.1), por el Lema 3.4 sabemos que para todo  $g \in Q(2^n)$  se cumple que  $\chi'(g) = \sum_{i=1}^{2^{k-1}} \sigma_i(\chi(g))$  con  $\sigma_i$  los elementos de  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^k})/\mathbb{Q})$ . Entonces como  $\rho(x^\alpha) = \begin{pmatrix} \xi_{2^k}^\alpha & 0 \\ 0 & \xi_{2^k}^{-\alpha} \end{pmatrix}$  se tiene que  $\chi'(x^\alpha) = \sum_{i=1}^{2^{k-1}} \xi_{2^k}^{\alpha(2i-1)} + \xi_{2^k}^{-\alpha(2i-1)}$ .

Hay distintos casos,

- si  $\alpha$  no es congruente a 0 ni a  $2^{k-1}$  módulo  $2^k$  entonces siempre que aparezca un sumando, estará su inverso aditivo, luego en este caso tenemos que  $\chi'(x^\alpha) = 0$ .
- Si  $\alpha$  es congruente a  $2^{k-1}$  módulo  $2^k$  entonces todos los sumandos son  $-1$ , por lo tanto,  $\chi'(x^\alpha) = -2^k$ .
- Por último si  $\alpha$  es congruente a 0 módulo  $2^k$  entonces  $\chi'(x^\alpha) = 2^k$ . Calculando explícitamente las matrices asociadas a los elementos  $y$  y  $xy$  vemos que  $\chi'(y) = \chi'(xy) = 0$ , y con esto sabemos los caracteres de un representante en cada clase de conjugación de  $Q(2^n)$ , y por lo tanto, conocemos toda la tabla de caracteres.

Luego comparamos este carácter con el obtenido de aplicar *transformadas a K*, ver la Definición 3.1, de forma inductiva. Esto es, se toma  $\theta_{2^k}$  y, para obtener la representación racional irreducible asociada iremos bajando de cuerpo uno a uno a partir de  $\mathbb{Q}(2^{n-1})$ . Así, en un paso, de la representación  $\rho$  que está definida en  $\mathbb{Q}(2^k)$ , obtenemos una representación en  $\mathbb{Q}(2^{k-1})$  y así sucesivamente, bajando en la cadena de cuerpos hasta llegar a la representación racional. Este proceso nos asegura obtener una representación irreducible en cada paso, por el Teorema 3.5.

Note que el grupo de Galois de la extensión  $\mathbb{Q}(\xi_{2^k})/\mathbb{Q}(\xi_{2^{k-1}})$  es un grupo de orden 2 generado por el automorfismo  $\xi_{2^k} \mapsto -\xi_{2^k}$ . Luego si  $\chi$  es el carácter de la representación  $\rho$  del conjunto  $\text{Irr}(2^k)$  y  $\chi''$  es el carácter de la representación transformada a  $\mathbb{Q}(\xi_{2^{k-1}})$ , se tendrá que si  $\alpha$  no es congruente a 0 ni a  $2^{k-1}$  módulo  $2^k$  entonces  $\chi''(x^\alpha) = \xi_{2^k}^\alpha + \xi_{2^k}^{-\alpha} + (-\xi_{2^k})^\alpha + (-\xi_{2^k})^{-\alpha}$ .

Si  $\alpha$  es impar entonces  $\chi''(x^\alpha) = 0$ . Si no lo fuera, entonces  $\chi''(x^\alpha) = 2(\xi_{2^q}^\beta + \xi_{2^q}^{-\beta})$  con  $\beta$  impar y  $2 \leq q$ . Entonces, para los  $\alpha$  que son impares, el carácter de la representación racional obtenida evaluado en  $x^\alpha$  es 0, pues al ir bajando de cuerpo los caracteres serán sumas de 0.

Para el caso en donde  $\alpha$  no es impar, la imagen del carácter se irá duplicando cada vez que bajemos a otro cuerpo hasta llegar a la representación sobre  $\mathbb{Q}(\xi_{2^q})$ . Entonces, en este cuerpo el carácter asociado evaluado en  $x^\alpha$  es  $2^r(\xi_{2^q}^\beta + \xi_{2^q}^{-\beta})$ .

Para la siguiente etapa el grupo de Galois actuará enviando  $\xi_{2^q} \mapsto -\xi_{2^q}$ . Por lo tanto, como  $\beta$  es impar, el carácter asociado evaluado en  $x^\alpha$  es 0.

Luego, de todas formas cuando lleguemos en este proceso inductivo a la representación sobre los racionales, se tendrá que el carácter de  $x^\alpha$  es 0. Luego para  $x^\alpha$  con  $\alpha$  no congruente a 0 ni a  $2^{k-1}$  módulo  $2^k$ , la imagen del carácter racional es igual a la del carácter racional de la representación obtenida en la Proposición, calculado más arriba.

Si  $\alpha$  es congruente a  $2^{k-1}$  módulo  $2^k$  es fácil ver que el carácter de la representación racional obtenida evaluado en  $x^\alpha$  es  $-2^k$ . Similarmente, si  $\alpha$  es congruente a 0 módulo  $2^k$ , entonces el carácter evaluado en  $x^\alpha$  es  $2^k$ .

Por último como  $\chi(y) = \chi(xy) = 0$ , el carácter racional obtenido también es 0 al evaluarlo en  $y$  y  $xy$ . Concluimos que esta representación racional, obtenida inductivamente haciendo el proceso de  $K$ -transformada con  $K$  desde  $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$  a  $\mathbb{Q}$ , que sabemos que es irreducible, tiene el mismo carácter que la representación racional que calculamos directamente y por lo tanto son equivalentes. Eso implica que la representación que calculamos es irreducible. De esta forma, tenemos de forma efectiva las  $n+2$  representaciones irreducibles racionales del grupo  $Q(2^n)$ .  $\square$

### 5.3. Algoritmo constructivo y explícito

El siguiente procedimiento es claramente generalizable a un grupo finito  $G$  y permite encontrar sus  $K$ -representaciones irreducibles salvo  $K$ -equivalencia. Donde, al igual que antes,  $K$  es un cuerpo de números contenido en un cuerpo de descomposición de  $G$  que es una extensión algebraica finita de  $\mathbb{Q}$ . Por ejemplo, el cuerpo de descomposición  $L_t = \mathbb{Q}(\xi_t)$  con  $t$  el exponente de  $G$  y  $\xi_t$  una raíz  $t$ -ésima primitiva de 1. Sin embargo, lo redactamos para el grupo  $G = Q(2^n)$  cuaternio generalizado con el propósito de simplificar la ilustración.

Sea  $\mathbb{Q} \subset K \subset L$  una extensión finita algebraica de cuerpos, considere que si  $\rho$  es una  $L$ -representación, llamamos al conjunto  $\{\rho^\sigma : \sigma \in \text{Gal}(L/K)\}$  la *clase de Galois de  $L$  sobre  $K$*  de  $\rho$ . El conjunto de  $L$ -representaciones irreducibles de  $G$  se partitiona en estas clases de Galois, hablamos de *un representante de las clases de Galois* cuando se considera un representante por cada una de estas clases.

Para el procedimiento que sigue, consideramos  $L = \mathbb{Q}(\xi_{2^{k-1}})$  y  $K = \mathbb{Q}(\xi_{2^{k-2}})$ , con  $k$  bajando desde  $k = n$  hasta  $k = 2$  en cada paso.

**Algoritmo 5.5.** *Procedimiento para la construcción explícita de  $K$ -representaciones irreducibles a partir de las  $L$ -representaciones irreducibles de  $G$ , con  $L$  extensión finita algebraica de  $K$ .*

**Entrada:** *El conjunto  $U$  constituido por un representante  $\theta$  por cada órbita de Galois, para  $\text{Gal}(L/K)$ , de representaciones irreducibles.*

**Salida:** *Las representaciones irreducibles sobre  $K$ .*

**Procedimiento:**

1. *Tome  $\theta \in U$ , luego es irreducible y definida sobre  $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$ .*
2. *Si  $\theta$  está definida sobre  $\mathbb{Q}(\xi_{2^{k-2}})$ , o un cuerpo  $K$  de grado menor sobre  $\mathbb{Q}$ , no hace nada pues  $\theta$  ya está definida por matrices con coeficientes en el cuerpo buscado.*
3. *Si no, entonces*
  - *Realice la transformada a  $K$  para  $K = \mathbb{Q}(\xi_{2^{k-2}})$  a  $\theta$  usando la base  $\beta = \{1, \xi_{2^{k-1}}\}$ .*
  - *Obtenga la representación  $K(\theta)$  con coeficientes en  $K$ , para  $K = \mathbb{Q}(\xi_{2^{k-2}})$ .*
4. *Repita el procedimiento con cada  $\theta \in U$ .*

*Demostración.* El algoritmo comienza seleccionando entre las representaciones irreducibles sobre  $L := \mathbb{Q}(\xi_{2^{k-1}})$ , cada una en una órbita de Galois distinta, considerando el grupo de Galois  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{k-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^{k-2}}))$ , para obtener todas las representaciones irreducibles sobre  $\mathbb{Q}(\xi_{2^{k-2}})$  no equivalentes entre sí.

Como el grupo de Galois de la extensión  $\mathbb{Q}(\xi_{2^{k-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^{k-2}})$  es el grupo de orden 2 que contiene al automorfismo que envía  $\xi_{2^{k-1}}$  a  $-\xi_{2^{k-1}}$ , una base apropiada para realizar la transformada es la base  $\beta = \{1, \xi_{2^{k-1}}\}$ . El Teorema 3.5 nos asegura que las representaciones obtenidas en cada paso son irreducibles.  $\square$

Observe que el algoritmo comienza seleccionando una de las  $3 \cdot 2^{n-4} + 3$  representaciones irreducibles sobre  $L = \mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})$ , cada una en una órbita de Galois distinta, considerando el grupo de Galois  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-2}}))$ , para obtener representaciones irreducibles sobre  $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-2}})$  no equivalentes entre sí.

Una vez que tenemos este conjunto de representaciones, cambiamos los cuerpos, por lo tanto el grupo de Galois, al paso inferior. Es decir,  $L = \mathbb{Q}(\xi_{2^{n-2}})$ ,  $K = \mathbb{Q}(\xi_{2^{n-3}})$  y el grupo de Galois ahora es  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-2}})/\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-3}}))$  y encuentra las representaciones irreducibles sobre  $\mathbb{Q}(\xi_{2^{n-3}})$  y así sucesivamente hasta  $\mathbb{Q}$ .

Para ilustrar cómo funciona el Algoritmo 5.5, obtenemos las representaciones irreducibles en los distintos cuerpos intermedios para  $Q(2^4)$ .

**Ejemplo 5.6.** *Sea  $G = Q(2^4)$  el grupo cuaternio de orden 16. En este caso  $n = 4$  y  $G$  tiene  $3 + 2^{n-2} = 7$  representaciones irreducibles complejas, todas realizables en  $L_8 = \mathbb{Q}(\xi_8)$ . Como antes,  $G$  tiene cuatro representaciones irreducibles de grado 1 definidas sobre  $\mathbb{Q}$  que mandan los generadores a (1) y (-1). Las otras representaciones irreducibles están dadas por*

$$\theta_s : x \mapsto \begin{pmatrix} \xi_8^s & 0 \\ 0 & \xi_8^{-s} \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^s & 0 \end{pmatrix}$$

con  $s \in \{1, 2, 3\}$ .

Para encontrar las representaciones irreducibles sobre  $\mathbb{Q}(i)$ , ya tenemos las cuatro definidas sobre  $\mathbb{Q}$  y la representación que envía  $x$  a  $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ , falta una más, para eso escogemos la representación que envía  $x$  a  $\begin{pmatrix} \xi_8 & 0 \\ 0 & \xi_8^{-1} \end{pmatrix}$  y ocuparemos el Algoritmo 5.5 con la base  $\beta = \{1, \xi_8\}$  entonces con esto la representación está dada por

$$\psi : x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y las representaciones de  $\mathbb{Q}$  ya las calculamos anteriormente. Y serán las cuatro representaciones de dimensión uno y dos representaciones más que están dadas por

$$\rho_1 : x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2 : x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Agradecimientos

Agradecemos las valiosas observaciones de quienes revisaron nuestro trabajo, ellas mejoraron la presentación. El tercer autor agradece a Luis Arenas-Carmona por fructíferas conversaciones.

Parcialmente financiado por ANID Fondecyt Regular 1230708 y 1230034 (primer y segundo autor, respectivamente). El tercer autor está financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) / ANID Becas / Magíster Nacional 22240434.

## Referencias

- [1] R. C. Alperin, “An elementary account of Selberg’s lemma,” *Enseign. Math. (2)*, vol. 33, no. 3–4, pp. 269–273, 1987.
- [2] R. Auffarth, S. Reyes-Carocca, y A. M. Rojas, “On the Jacobian variety of the Accola-Maclachlan curve of genus four,” in *New tools in mathematical analysis and applications*, ser. Trends Math. Birkhäuser/Springer, Cham, 2025, pp. 3–15, doi: 10.1007/978-3-031-77050-0\_1.
- [3] A. Behn, R. E. Rodríguez, y A. M. Rojas, “Adapted hyperbolic polygons and symplectic representations for group actions on Riemann surfaces,” *J. Pure Appl. Algebra*, vol. 217, no. 3, pp. 409–426, 2013, doi: 10.1016/j.jpaa.2012.06.030.
- [4] A. Carocca, S. Recillas, y R. E. Rodríguez, “Dihedral groups acting on Jacobians,” in *Complex manifolds and hyperbolic geometry (Guanajuato, 2001)*, ser. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, vol. 311, pp. 41–77, doi: 10.1090/conm/311/05446.
- [5] A. Carocca, S. Reyes-Carocca, y R. E. Rodríguez, “Abelian varieties and Riemann surfaces with generalized quaternion group action,” *J. Pure Appl. Algebra*, vol. 227, no. 11, 2023, Art. ID 107398, doi: 10.1016/j.jpaa.2023.107398.
- [6] C. Curtis e I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, ser. AMS Chelsea Publishing Series. Interscience Publishers, 1966.
- [7] H. Lange y S. Recillas, “Abelian varieties with group action,” *J. Reine Angew. Math.*, vol. 575, pp. 135–155, 2004, doi: 10.1515/crll.2004.076.
- [8] S. Recillas y R. E. Rodríguez, “Jacobians and representations of  $S_3$ ,” in *Workshop on Abelian Varieties and Theta Functions (Spanish) (Morelia, 1996)*, ser. Aportaciones Mat. Investig. Soc. Mat. Mexicana, México, 1998, vol. 13, pp. 117–140.
- [9] R. E. Rodríguez y A. M. Rojas, “A fruitful interaction between algebra, geometry, and topology: varieties through the lens of group actions,” *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 71, no. 6, pp. 715–723, 2024, doi: 10.1090/noti2950.
- [10] J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, vol. 42.

## Parámetros especiales y deformaciones lineales de la familia $(\wp(z))^2 + c$

ADRIÁN ESPARZA-AMADOR<sup>1,✉</sup> 

<sup>1</sup> *Instituto de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Austral de Chile, Valdivia, Chile.*

*adrian.esparza@uach.cl*✉

### RESUMEN

En este trabajo, examinamos el espacio de parámetros de una familia de funciones elípticas de orden cuatro. Para el caso de retículas cuadradas, rectangulares y triangulares, determinamos parámetros para los cuales el conjunto de Fatou es vacío, consta de una componente atractora, o bien consta de una componente parabólica.

**Palabras clave:** Dinámica de funciones meromorfas, conjuntos de Fatou y Julia, aplicaciones quasi-conformes

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 37F10, 33E05, 37F31.

Publicado: 06 de octubre de 2025

Aceptado: 30 de agosto de 2025

Recibido: 31 de octubre de 2024



©2025 Adrián Esparza-Amador. Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

# Special parameters and linear deformations of the family $(\wp(z))^2 + c$

ADRIÁN ESPARZA-AMADOR<sup>1,✉</sup> 

<sup>1</sup> *Instituto de Ciencias Físicas y  
Matemáticas, Universidad Austral de  
Chile, Valdivia, Chile.*

*adrian.esparza@uach.cl*✉

## ABSTRACT

In this work, we examine the space of parameters of a family of elliptic functions of order four. For the case of square, rectangular, and triangular lattices, we determine parameters for which the Fatou set is empty, consists of an attractive component, or consists of a parabolic component.

**Keywords and Phrases:** Dynamics of meromorphic functions, Fatou and Julia sets, quasiconformal mappings.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 37F10, 33E05, 37F31.

Published: 06 October, 2025

Accepted: 30 August, 2025

Received: 31 October, 2024

©2025 A. Esparza-Amador. This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.



## 1. Introducción

De la periodicidad de las funciones elípticas, sabemos que el conjunto de valores singulares es un conjunto finito, en otras palabras, toda función elíptica pertenece a la llamada *clase de Speiser* o *clase  $\mathcal{S}$* . De los resultados de Eremenko y Lyubich [5] se sigue que tales funciones exhiben un comportamiento dinámico similar al de las funciones racionales: no existen dominios errantes ni dominios de Baker.

La iteración de funciones elípticas ha sido objeto de estudio en las últimas décadas. Los trabajos [7] y [16] son considerados pioneros en el estudio y ahora existe una vasta literatura sobre el tema, mencionamos los trabajos [6–10, 13–17, 19] como referencias.

La mayoría de los trabajos se enfocan en estudiar funciones elípticas que están directamente relacionadas con la función  $\wp$  de Weierstrass asociada a ciertas retículas particulares. Este estudio está orientado en la misma dirección.

En el presente trabajo se estudia la familia paramétrica de funciones elípticas definidas por  $F_{\Lambda,c}(z) = (\wp_{\Lambda}(z))^2 + c$ , para  $c \in \mathbb{C}$ , donde  $\wp_{\Lambda}$  denota la función elíptica de Weierstrass (véanse las secciones 2.2 y 2.3). En [13], la familia más general  $f_{n,\Lambda,c}(z) = (\wp_{\Lambda}(z))^n + c$  es estudiada, obteniendo valores particulares de parámetros para los cuales el conjunto de Fatou de la función correspondiente es un conjunto vacío. Y en [11] el caso  $n = 1$  ha sido estudiado obteniendo resultados similares. Ahora buscamos extender algunos de los resultados obtenidos en [11] de la familia  $f_{1,\Lambda,c}(z) = \wp_{\Lambda}(z) + c$  a nuestra familia. Además, utilizando algunos de los resultados en [8] podemos obtener parámetros para los cuales la función correspondiente presenta una dinámica prescrita.

La organización del escrito es la siguiente. En la Sección 2 presentamos los preliminares de la teoría de iteración de funciones meromorfas, los fundamentos de las funciones elípticas y en particular algunas propiedades de la función  $\wp_{\Lambda}$ . La familia  $F_{\Lambda,c}$  es definida en la Sección 3 y los primeros resultados son presentados. En la Sección 4 construimos algunos parámetros con dinámica prescrita. Finalmente, en la Sección 5 consideramos deformaciones quasi-conformes simples de funciones elípticas.

## 2. Teoría preliminar

### 2.1. Teoría de Fatou y Julia para funciones meromorfas

Denotemos por  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  a la esfera de Riemann y sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  una función meromorfa trascendente. La iteración de la función  $f$  genera una dicotomía en la esfera de Riemann. El *conjunto de Fatou*, denotado por  $\mathcal{F}(f)$ , está compuesto por los puntos  $z \in \mathbb{C}$  para los cuales existe una vecindad en la que la sucesión de iteradas  $\{f^n\}_{n \geq 0}$  está bien definida y es normal en el sentido

de Montel. El *conjunto de Julia*, denotado por  $\mathcal{J}(f)$ , consiste en el complemento del conjunto de Fatou en la esfera de Riemann. Si  $f$  posee al menos un polo que no es un valor omitido, el conjunto de Julia está determinado por la siguiente relación

$$\mathcal{J}(f) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\infty)}.$$

Un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  es llamado *periódico* si existe un  $p \geq 1$  tal que  $f^p(z_0) = z_0$ . Al mínimo  $p$  con esta propiedad, se le llama *periodo* de  $z_0$  y el conjunto  $\{z_0, f(z_0), \dots, f^{p-1}(z_0)\}$  es llamado el *p-ciclo* de  $z_0$ . Si  $p = 1$ ,  $z_0$  es un *punto fijo*. El *multiplicador* de un punto  $p$ -periódico está dado por la derivada  $(f^p)'(z_0)$ . El multiplicador proporciona información dinámica local de los ciclos periódicos. Decimos así que un punto  $p$ -periódico es *atractor*, *repulsor* o *neutro* si  $|(f^p)'(z_0)|$  es menor, mayor o igual a 1, respectivamente. Si  $(f^p)'(z_0) = 0$ ,  $z_0$  es llamado *súper-atractor* y si el multiplicador es una raíz de la unidad, el ciclo es llamado *parabólico*. Es un hecho conocido que el conjunto de puntos periódicos repulsores es denso en el conjunto de Julia.

De la definición, el conjunto de Fatou es abierto en  $\mathbb{C}$ . Además, tanto  $\mathcal{F}(f)$  como  $\mathcal{J}(f)$  son completamente invariantes. Sea  $U \subset \mathcal{F}(f)$  una componente conexa. Decimos que  $U$  es *pre-periódica* si existen  $m > n \geq 0$  tales que  $f^m(U) = f^n(U)$ . Si  $n = 0$ ,  $U$  es una componente *periódica* de periodo  $p = m - n$ , y si  $m = 1$ ,  $U$  es llamada una componente *invariante*. Una componente que no es pre-periódica, es llamada un *dominio errante*. Análogo al caso racional, existe una clasificación de las componentes periódicas de una función meromorfa trascendente, aunque en el contexto trascendente aparece un nuevo tipo de componente periódica de Fatou que no existe para funciones racionales, los llamados *dominios de Baker*.  $U \subset \mathcal{F}(f)$  es un dominio de Baker de periodo  $p$ , si existe un punto  $z_0 \in \partial U$  tal que  $f^{np}(z) \rightarrow z_0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , pero  $f^p(z_0)$  no está definido. En particular, si  $p = 1$  tenemos que  $z_0 = \infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ .

Denotemos por  $\text{Crit}(f)$  al conjunto de puntos críticos de la función  $f$ . Además de los valores críticos, en el contexto meromorfo existen otros puntos en  $\mathbb{C}$ , en los cuales la rama inversa  $f^{-1}$  puede no estar bien definida. Un punto  $w$  se denomina un *valor asintótico* para  $f$  si existe una trayectoria  $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \infty$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(\alpha(t)) = w$ . Definimos así el *conjunto singular* de  $f$ , denotado por  $\text{sing}(f^{-1})$ , como el conjunto de valores críticos y valores asintóticos de  $f$ . Existe una fuerte relación entre cuencas atractoras o parabólicas y el conjunto singular de  $f$ . Si  $C = \{U_0, U_1, \dots, U_{p-1}\}$  es un  $p$ -ciclo de componentes atractoras o parabólicas, entonces  $U_j \cap \text{sing}(f^{-1}) \neq \emptyset$  para algún  $0 \leq j < p$ . Si  $C$  es un ciclo de discos de Siegel o anillos de Herman, entonces  $\partial U_j \subset \mathcal{P}(f)$  para todo  $0 \leq j < p$ , donde  $\mathcal{P}(f)$  denota el conjunto *post-singular* el cual está dado por

$$\mathcal{P}(f) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^n(\text{sing}(f^{-1}))}.$$

Una descripción más detallada de los resultados en iteración de funciones meromorfas se puede encontrar en [1, 2] para funciones meromorfas en general y en [7, 8, 10] para funciones elípticas.

## 2.2. Funciones elípticas

Existen varias formas de definir una función elíptica. En el presente trabajo, consideramos la definición más simple que se basa en una propiedad de periodicidad. Siendo el conjunto de periodos, una retícula en el plano complejo.

**Definición 2.1.** *Una retícula  $\Lambda$  de números complejos, es un subconjunto de  $\mathbb{C}$  con dos propiedades:*

- i.  $\Lambda$  es un grupo aditivo.
- ii. Las normas de los elementos distintos de cero, están acotadas por abajo, es decir, existe  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$ , tal que  $|\lambda| \geq k$  para todo  $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ .

Existen tres tipos de retículas:

- i. Trivial: consiste solo del cero.
- ii. Simple: consiste de todos los múltiplos enteros de un solo elemento generador, que es único salvo el signo.
- iii. Doble: consiste de todas las combinaciones lineales con coeficientes enteros de dos elementos generadores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , cuya razón es no real. Estos generadores no son únicos; si  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  generan  $\Lambda$ , también lo hacen

$$\lambda'_1 = p\lambda_1 + q\lambda_2, \quad \lambda'_2 = r\lambda_1 + s\lambda_2$$

donde  $p, q, r, s$  son enteros con  $pr - qs = 1$ .

Es usual elegir el orden de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  de tal manera que  $\text{Im}(\lambda_2/\lambda_1) > 0$ . En lo sucesivo, consideraremos retículas de tipo doble con esta propiedad. Así, si  $\Lambda$  es una retícula doble, generada por  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , entonces

$$\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2] = \{m\lambda_1 + n\lambda_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

**Definición 2.2.** *Un subconjunto  $P \subset \mathbb{C}$  cerrado y conexo es una región fundamental para  $\Lambda$  si para cada  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P$  contiene al menos un punto en la misma  $\Lambda$ -órbita de  $z$  y no existen dos puntos en el interior de  $P$  en una misma  $\Lambda$ -órbita. Si  $P$  es un paralelogramo, es llamado un paralelogramo periodo para  $\Lambda$ .*

Los puntos retícula, son los vértices de un patrón de paralelogramos que llenan todo el plano y cuyos lados pueden ser tomados como cualquier par de generadores.

### 2.2.1. Formas

Dada una retícula  $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$ , su apariencia en el plano complejo, está determinada por la razón  $\tau = \lambda_2/\lambda_1$  (por convención, elegimos los generadores de tal manera que  $\text{Im}(\tau) > 0$ ). Es usual referirse al tipo de retícula por la forma del paralelogramo periodo correspondiente. Si  $\Lambda$  es una retícula y  $k \neq 0$  es un número complejo,  $k\Lambda$  denota el subconjunto de valores  $k\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ . Ésta también es una retícula, que es llamada *similar* a  $\Lambda$ ; la similitud es una relación de equivalencia entre retículas y a una clase de equivalencias se le llama la *forma* de la retícula. Como ejemplo, dado que  $\lambda_1 \neq 0$ , la retícula  $\Lambda_\tau = [1, \tau]$  es similar a la retícula  $\Lambda = \lambda_1 \Lambda_\tau$ .

Sin embargo, si los generadores de una retícula arbitraria  $\Lambda$  no son especificados, el valor  $\tau$  no está determinado de manera única. La acción del *grupo modular clásico*  $\Gamma$  actuando en el semiplano superior brinda la relación entre las posibles elecciones de  $\tau$  para una sola forma de retícula. Entonces cada forma de retícula está representada por un solo punto en una región fundamental del grupo  $\Gamma$ . La *región fundamental primitiva* del grupo modular  $\Gamma$  se muestra en la Figura 1 y está definida por

$$B = \left\{ \text{Im}(\tau) > 0, -\frac{1}{2} \leq \text{Re}(\tau) < \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1, \text{ con } |\tau| > 1 \text{ si } \text{Re}(\tau) > 0 \right\}. \quad (2.1)$$

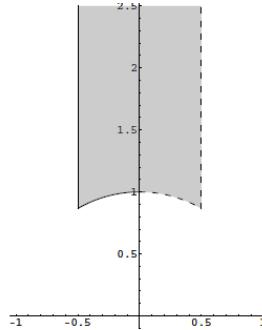


Figura 1: La región fundamental  $B$ .

**Definición 2.3.** *Sea  $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$  una retícula.*

- (1)  $\Lambda$  es rectangular real *si los generadores pueden ser elegidos (bajo similitud) como  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  y  $\lambda_2 \in i\mathbb{R}$* .
- (2)  $\Lambda$  es rómbica real *si los generadores pueden ser elegidos (bajo similitud) como complejos conjugados, i.e.  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$* .

(3)  $\Lambda$  es cuadrada si  $\Lambda = i\Lambda$ .

(4)  $\Lambda$  es triangular si  $e^{2\pi i/3}\Lambda = \Lambda$ . En este caso el paralelogramo periodo consta de dos triángulos equiláteros.

En cada caso (1)–(3), el paralelogramo periodo con vértices en  $0, \lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_1 + \lambda_2$  puede ser elegido como un paralelogramo rectangular, rómbico o cuadrado respectivamente.

**Lema 2.4** ([7]).  $\Lambda$  es una retícula triangular si y solo si  $\Lambda = [\lambda e^{\pi i/3}, \lambda e^{-\pi i/3}]$ , para algún  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \neq 0$ .

Toda retícula satisface  $\Lambda = -\Lambda$ , los únicos casos donde  $\Lambda = k\Lambda$ , con  $k \neq \pm 1$ , son las retículas cuadradas ( $\Lambda = i\Lambda$ ) y las retículas triángulares ( $\Lambda = \omega\Lambda$ , donde  $\omega^3 = 1$ ).

**Definición 2.5.** Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  una función meromorfa. Decimos que  $f$  es una función elíptica si  $f$  es periódica con respecto a una retícula  $\Lambda$ . Equivalentemente,  $f$  es periódica de periodo  $\Lambda$  si  $f(z + \lambda) = f(z)$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$  y todo  $\lambda \in \Lambda$ .

### 2.3. La función $\wp$ de Weierstrass

Nos referimos a [4, 7, 8] para mayor información sobre resultados y propiedades de la función  $\wp$  de Weierstrass.

Dada una retícula  $\Lambda$  arbitraria, el ejemplo típico de una función elíptica con respecto a  $\Lambda$  es la función  $\wp$  de Weierstrass, definida por

$$\wp_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right).$$

$\wp$  es una función elíptica par con polos de orden 2. Además, la derivada  $\wp'$  es una función elíptica impar de orden 3, periódica con respecto a  $\Lambda$ . Ambas funciones están relacionadas por la ecuación diferencial

$$(\wp'_\Lambda(z))^2 = 4(\wp_\Lambda(z))^3 - g_2\wp_\Lambda(z) - g_3, \quad (2.2)$$

donde  $g_2(\Lambda) = 60 \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \lambda^{-4}$  y  $g_3(\Lambda) = 140 \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \lambda^{-6}$ . Si  $g_2(\Lambda) = g_2(\Lambda')$  y  $g_3(\Lambda) = g_3(\Lambda')$  para retículas  $\Lambda$  y  $\Lambda'$ , entonces  $\Lambda = \Lambda'$ . Por lo que  $g_2(\Lambda)$  y  $g_3(\Lambda)$  son llamados invariantes de la retícula  $\Lambda$ . Además, si  $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$  son tales que  $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ , entonces existe una retícula  $\Lambda$  con  $g_2 = g_2(\Lambda)$  y  $g_3 = g_3(\Lambda)$  como sus invariantes. Para  $\Lambda_\tau = [1, \tau]$ , las funciones  $g_i(\tau) = g_i(\Lambda_\tau)$  son funciones de  $\tau$  analíticas en el semi-plano superior  $\text{Im}(\tau) > 0$ .

Los invariantes  $g_2$  y  $g_3$  cumplen la siguiente propiedad de homogeneidad con respecto a retículas similares.

**Lema 2.6** ([8]). *Para retículas  $\Lambda$  y  $\Lambda'$ , tenemos que  $\Lambda' = k\Lambda$ , para algún  $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  si y solo si*

$$g_2(\Lambda') = k^{-4}g_2(\Lambda) \quad y \quad g_3(\Lambda') = k^{-6}g_3(\Lambda).$$

Una retícula  $\Lambda$  es llamada *real* si  $\Lambda = \bar{\Lambda} := \{\bar{\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$ . Aquí,  $\bar{z}$  denota el conjugado complejo de  $z \in \mathbb{C}$ . Tenemos la siguiente caracterización para retículas reales.

**Proposición 2.7** ([12]). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $\Lambda$  es un retícula real;

2.  $\wp_\Lambda(\bar{z}) = \overline{\wp_\Lambda(z)}$ ;

3.  $g_2, g_3 \in \mathbb{R}$ .

Sean  $\Lambda$  y  $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , al sustituir  $k$  en la definición correspondiente de las funciones  $\wp_\Lambda$  y  $\wp_{k\Lambda}$  se obtiene la siguiente propiedad de homogeneidad

$$\wp_{k\Lambda}(kz) = \frac{1}{k^2} \wp_\Lambda(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (2.3)$$

**Observación 2.8.** *Mencionamos un par de propiedades adicionales que relacionan los puntos críticos, los valores críticos y los invariantes de una función de Weierstrass para una retícula  $\Lambda$  fija.*

1. *Para toda retícula  $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$ ,  $\wp_\Lambda$  tiene una infinidad de puntos críticos simples, uno en cada punto medio de la retícula. Denotamos este conjunto por  $\text{Crit}(\wp_\Lambda) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} + \Lambda$ , donde*

$$\omega_1 = \frac{\lambda_1}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\lambda_2}{2} \quad y \quad \omega_3 = \omega_1 + \omega_2.$$

2. *Sabemos que  $\wp_\Lambda$  no contiene valores asintóticos finitos, por lo que el conjunto singular de la función  $\wp_\Lambda$  está dado por los valores críticos  $w = \wp_\Lambda(c)$ ,  $c \in \text{Crit}(\wp_\Lambda)$ . De la periodicidad de  $\wp_\Lambda$ , el conjunto singular es finito y consta de los valores:*

$$e_1 = \wp_\Lambda(\omega_1), \quad e_2 = \wp_\Lambda(\omega_2) \quad y \quad e_3 = \wp_\Lambda(\omega_3). \quad (2.4)$$

3. *Dado que los  $e_i$  son soluciones distintas a la ecuación (2.2), al factorizar e igualar, obtenemos las siguientes relaciones:*

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_3 + e_1e_2 + e_2e_3 = -\frac{g_2}{4}, \quad e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}. \quad (2.5)$$

## 2.4. $\wp_\Lambda(z)$ y retículas triangulares

Los siguientes resultados relacionan las formas de las retículas con los valores críticos de  $\wp_\Lambda$ , véase [4, 7]. Sea  $p(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$  el polinomio asociado a  $\Lambda$  por (2.2) y defínase  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$  como su discriminante.

**Proposición 2.9** ([4]). *Sea  $\Lambda$  una retícula real.*

- *Si  $\Lambda$  es cuadrada,  $g_3 = 0$  y las raíces de  $p$  son  $0, \pm\sqrt{g_2}/2$ . Así  $e_1 = \sqrt{g_2}/2$  y  $e_2 = -e_1$ .*
- *Si  $\Lambda$  es triangular,  $g_2 = 0$  y las raíces de  $p$  son las raíces cúbicas de  $g_3/4$  siendo todas distintas de cero. Entonces  $e_1, e_2, e_3$  tienen el mismo módulo y  $e_i \in \mathbb{R}$  para algún  $i = 1, 2, 3$  si y solo si  $g_3 \in \mathbb{R}$ .*

La simetría de las retículas está reflejada en el comportamiento del conjunto post-crítico.

**Proposición 2.10** ([7]). *Sea  $\Lambda$  una retícula real.*

- *Si  $\Lambda$  es cuadrada,  $\mathcal{P}(\wp_\Lambda)$  incluye al punto al infinito y  $e_3 \in \mathcal{J}(\wp_\Lambda)$ . De hecho,  $\mathcal{P}(\wp_\Lambda) = \overline{\bigcup_{n \geq 0} \wp_\Lambda^n(e_1) \cup \{e_2, 0, \infty\}}$ . Por lo que dicho conjunto está determinado por la órbita de  $e_1$ .*
- *$\mathcal{P}(\wp_\Lambda)$  está contenido en tres conjuntos positivamente invariantes: el conjunto  $\alpha = \overline{\bigcup \wp_\Lambda^n(e_1)}$ , y los conjuntos  $e^{2\pi i/3}\alpha$  y  $e^{4\pi i/3}\alpha$ . (Estos conjuntos no son necesariamente disjuntos.)*

## 2.5. El conjunto de Fatou

Los siguientes resultados clasifican todas las posibilidades del conjunto de Fatou para la función de Weierstrass con retículas triangulares y cuadradas, respectivamente.

**Proposición 2.11** ([8]). *Para toda retícula triangular  $\Lambda = [\lambda, e^{2\pi i/3}\lambda]$ , uno de los siguientes casos debe ocurrir:*

1.  $\mathcal{J}(\wp_\Lambda) = \widehat{\mathbb{C}}$ .
2. *Para algún periodo  $p$  y algún multiplicador  $\mu$ ,  $0 \leq \mu \leq 1$  existen exactamente tres ciclos periódicos (super)atractores o parabólicos en el conjunto de Fatou de periodo  $p$  y multiplicador  $\mu$ .*
3. *Existe exactamente un ciclo periódico (súper)atractor o parabólico en el conjunto de Fatou que contiene los tres valores críticos.*
4. *Los únicos ciclos de Fatou son discos de Siegel.*

**Proposición 2.12.** *Para una retícula cuadrada  $\Lambda$ , uno de los siguientes casos ocurre:*

1.  $\mathcal{J}(\wp_\Lambda) = \widehat{\mathbb{C}}$ .
2. *Existe exactamente un ciclo periódico (súper)atractor o parabólico del conjunto de Fatou.*
3. *Los únicos ciclos periódicos de Fatou son discos de Siegel.*

La siguiente definición será utilizada al estudiar las familias paramétricas  $\wp_\Lambda^2 + c$ ,  $c \in \mathbb{C}$  y  $\Lambda$  una retícula.

**Definición 2.13.** *Dos funciones elípticas  $f = f_\Lambda$  y  $g = g_{\Lambda'}$  sobre retículas  $\Lambda$  y  $\Lambda'$  respectivamente, son conformemente conjugadas si existe una aplicación  $\phi(z) = \alpha z + \beta$ ,  $\alpha \neq 0$  tal que  $f \circ \phi = \phi \circ g$ .*

### 3. La familia $F_{\Lambda,c}(z) = (\wp_\Lambda(z))^2 + c$

En este trabajo buscamos extender algunos de los resultados obtenidos en [8] y [11] para la familia  $F_{\Lambda,c}$ , definida por

$$F_{\Lambda,c}(z) = (\wp_\Lambda(z))^2 + c, \quad (3.1)$$

donde  $c \in \mathbb{C}$  y  $\Lambda$  es una retícula real. Dado que  $F'_{\Lambda,c} = 2\wp_\Lambda \cdot \wp'_\Lambda$ , se cumple

$$\text{Crit}(F_{\Lambda,c}) = \text{Crit}(\wp_\Lambda) \cup \{\wp_\Lambda^{-1}(0)\}.$$

y los valores críticos están dados por  $v_1 = e_1^2 + c$ ,  $v_2 = e_2^2 + c$ ,  $v_3 = e_3^2 + c$  y  $v_4 = c$ . De las relaciones en (2.5), tenemos la siguiente relación

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 4c + \frac{g_2(\Lambda)}{2}. \quad (3.2)$$

Para cada retícula fija  $\Lambda$ , decimos que la familia holomorfa de aplicaciones meromorfas  $F_{\Lambda,c}$ , parametrizada sobre  $c \in \mathcal{A} \subset \mathbb{C}$  es *reducida* si para todo  $c \neq c'$  en  $\mathcal{A}$ ,  $F_{\Lambda,c}$  y  $F_{\Lambda,c'}$  no son conformemente conjugadas. Siguiendo las ideas en [11], probamos que es suficiente restringirse a un paralelogramo periodo  $P$  como una familia reducida.

**Proposición 3.1.** *Dada una retícula  $\Lambda$  si  $F_{\Lambda,c}(z) = (\wp_\Lambda(z))^2 + c$ , entonces para todo  $\lambda \in \Lambda$ ,  $F_{\Lambda,c}$  es conformemente conjugada a  $F_{\Lambda,c+\lambda}$ .*

*Demostración.* Un cálculo directo muestra que  $\varphi(z) = z - \lambda$  es una conjugación conforme entre  $F_{\Lambda,c}$  y  $F_{\Lambda,c+\lambda}$ .  $\square$

La siguiente identidad, probada en [7], será útil en el resto de esta sección.

**Teorema 3.2.** *Sea  $\Lambda$  una retícula arbitraria y  $u \in \mathbb{C}$ . Para cada  $i = 1, 2, 3$ , tenemos*

$$\wp_\Lambda(u \pm \omega_i) = \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{\wp_\Lambda(u) - e_i} + e_i. \quad (3.3)$$

A continuación mostramos algunos resultados análogos a [11, Sección 3]. Nos restringimos a un paralelogramo periodo  $P$ .

**Teorema 3.3.** *Sea  $\Lambda$  una retícula. Si  $c$  y  $c'$  pertenecen al interior de un paralelogramo periodo  $P$  para  $\Lambda$ , entonces  $F_{\Lambda,c}$  y  $F_{\Lambda,c'}$  no pueden ser conformemente conjugados.*

*Demuestra.* Para simplificar la demostración, omitiremos  $\Lambda$  de la notación. Supongamos que  $(F_c \circ \varphi)(z) = (\varphi \circ F_{c'})(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Dado que la conjugación debe fijar el punto al infinito, tenemos que  $\varphi(z) = Az + B$ , para algunos  $A, B \in \mathbb{C}$  con  $A \neq 0$ . Por otro lado, dado que 0 es un polo de ambas funciones elípticas,  $\varphi(0) = B$  debe ser un polo de  $F_c$ , por lo que  $B = \lambda_0 \in \Lambda$ . Además,  $\varphi$  debe enviar polos en polos de manera inyectiva, así que  $\Lambda = \varphi(\Lambda) = A\Lambda + \lambda_0$ , lo que implica que  $A\Lambda = \Lambda - \lambda_0 = \Lambda$ . Análogamente, para  $\varphi^{-1}$ , tenemos que  $A^{-1}\Lambda = \Lambda$ . Por lo que  $A^k\Lambda = \Lambda$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , lo que implica que  $|A| = 1$  y  $A = e^{2\pi i/p}$  para algún  $p \in \mathbb{N}$ . Entonces  $e^{2\pi i/p}\Lambda = \Lambda$ . De los resultados en [18], tenemos que si  $e^{2\pi i/p} = A \neq 1$  entonces  $p = 2, 3, 4$  o  $6$ .

Ahora bien, dado que  $\varphi$  envía los valores críticos de  $F_{c'}$  en los valores críticos de  $F_c$ , tenemos

$$c = \varphi(c') = Ac' + \lambda_0. \quad (3.4)$$

Calculando las composiciones en la conjugación, tenemos por un lado

$$F_{\Lambda,c}(\varphi(z)) = (\wp_\Lambda(Az + B))^2 + c = (\wp_\Lambda(Az))^2 + Ac' + \lambda_0$$

y

$$\varphi(F_{\Lambda,c'}(z)) = A(\wp_\Lambda(z))^2 + Ac' + \lambda_0,$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Igualando ambas composiciones y usando la homogeneidad tenemos

$$A(\wp_\Lambda(z))^2 = (\wp_\Lambda(Az))^2 = \frac{1}{A^4}(\wp_\Lambda(z))^2.$$

Lo que implica que  $A^5 = 1$ , i.e.,  $A = e^{2\pi i/p}$  con  $p = 5$ , lo que contradice las opciones de  $p$ . Se sigue que  $A = 1$ . Finalmente,  $B = \lambda_0 = 0$  ya que  $c$  y  $c'$  están en el interior de un paralelogramo periodo. Por lo que  $\varphi = \text{Id}$ , contradiciendo la conjugación. Con esto concluimos la demostración del resultado.  $\square$

**Proposición 3.4.** *Dada una retícula arbitraria  $\Lambda$ ,  $z \in \mathbb{C}$  y cualquier punto  $\omega \in \text{Crit}(\wp_\Lambda)$ , entonces tenemos que  $\omega + z \in \mathcal{J}(F_{\Lambda,c})$  si y solo si  $\omega - z \in \mathcal{J}(F_{\Lambda,c})$ .*

*Demostración.* Del Teorema 3.2 y  $\text{Crit}(F_{\Lambda,c}) = \text{Crit}(\wp_\Lambda) \cup \{\wp_\Lambda^{-1}(0)\}$ , se sigue que

$$F_{\Lambda,c}(\omega + z) = (\wp_\Lambda(\omega + z))^2 + c = (\wp_\Lambda(\omega - z))^2 + c = F_{\Lambda,c}(\omega - z).$$

□

**Lema 3.5.** *Si  $\Lambda$  es una retícula real y  $c \in \mathbb{C}$  es algún parámetro fijo, entonces  $F_{\Lambda,c}$  es anti-conformemente conjugado a  $F_{\Lambda,\bar{c}}$ .*

*Demostración.* Un cálculo directo muestra que  $\eta(z) = \bar{z}$  es una conjugación. □

## 4. Parámetros con dinámicas predeterminadas

En la presente sección, mostraremos valores de parámetros específicos en la familia  $F_{\Lambda,c}$  para los cuales se cumplen algunos de los casos en las proposiciones 2.11 y 2.12.

**Proposición 4.1.** *Sea  $\Lambda'$  una retícula real tal que  $\lambda'/2$  es el punto crítico real positivo más pequeño y  $e_r$  es el valor crítico real más grande. Si  $m$  es cualquier entero impar y  $k = \sqrt[3]{2e_r/(m\lambda')}$  (tomando la raíz real), entonces para*

$$\Lambda = k\Lambda' \quad y \quad c = \frac{mk\lambda'}{2} \left(1 - \frac{mk\lambda'}{2}\right),$$

*la función  $F_{\Lambda,c}$  tiene un punto fijo súper-atractor  $z_0 = \frac{mk\lambda'}{2}$ .*

*Demostración.* Del Lema 7.2 en [8], sabemos que  $z_0$  es un punto fijo súper-atractor para  $\wp_\Lambda$ . Luego,

$$F_{\Lambda,c}(z_0) = (\wp_\Lambda(z_0))^2 + \frac{mk\lambda'}{2} \left(1 - \frac{mk\lambda'}{2}\right) = \frac{mk\lambda'}{2}.$$

Dado que  $F'_{\Lambda,c} = 2\wp_\Lambda \cdot \wp'_\Lambda$ , se sigue que  $F'_{\Lambda,c}(z_0) = 0$ , lo que demuestra la proposición. □

Consideramos la siguiente normalización para retículas triangulares.

**Definición 4.2.** *Denotamos por  $\Lambda = [\lambda, e^{2\pi i/3}\lambda]$ , con  $\lambda > 0$ , a la retícula con invariantes  $g_2 = 0$  y  $g_3 = 4$ .  $\Lambda$  es llamada la retícula triangular estándar.*

**Teorema 4.3** ([8, Teorema 8.3]). *Sea  $\Lambda$  la retícula triangular estándar. Para todo  $m, n \in \mathbb{Z}$ , si*

$$k = \left( \frac{1}{(\lambda/2) + m\lambda + n\lambda e^{2\pi i/3}} \right)^{1/3},$$

entonces  $\Omega = k\Lambda$  tiene exactamente tres puntos fijos súper-atractores. Estos parámetros se localizan en  $g_3(\Omega) = 4(\lambda/2 + m\lambda + n\lambda e^{2\pi i/3})^2$ .

Denotamos por  $c_0$  a uno de los puntos fijos súper-atractores del teorema anterior.

**Proposición 4.4.** *Sean  $\Lambda$ ,  $k$  y  $\Omega$  como en el Teorema 4.3 y sea  $c_0$  uno de los puntos fijos súper-atractores de la función de  $\wp_\Omega$ . Entonces la función*

$$F_{\Omega, c_0}(z) = (\wp_\Omega(z))^2 + c_0(1 - c_0),$$

tiene un punto fijo súper-atractor en  $z = c_0$ .

*Demostración.* Por el Teorema 4.3, tenemos que  $\wp_\Omega(c_0) = c_0$  con  $\wp'_\Omega(c_0) = 0$ . Así, sustituyendo en la forma de  $F_{\Omega, c_0}$  tenemos

$$F_{\Omega, c_0}(c_0) = c_0^2 + c_0(1 - c_0) = c_0, \quad \text{y} \quad F'_{\Omega, c_0}(c_0) = 0.$$

□

Finalmente, mostramos parámetros en el caso de retículas cuadradas con puntos súper-atractores.

**Definición 4.5.** *Denotamos por  $\Lambda = [\lambda, i\lambda]$ , con  $\lambda > 0$ , a la retícula con invariantes  $g_2 = 4$  y  $g_3 = 0$ .  $\Lambda$  es llamada la retícula cuadrada estándar.*

**Teorema 4.6** ([8], Teorema 9.3). *Sea  $\Lambda$  la retícula cuadrada estándar. Si*

$$k = \left( \frac{1}{(\lambda/2) + m\lambda + n\lambda i} \right)^{1/3},$$

*(tomando cualquier raíz compleja), si  $\Omega = k\Lambda$  entonces  $\wp_\Omega$  tiene un punto fijo súper-atractor. Estos parámetros están localizados en  $g_2(\Omega) = 4(\lambda/2 + m\lambda + n\lambda)^{4/3}$ .*

**Proposición 4.7.** *Sean  $\Lambda$ ,  $k$  y  $\Omega$  como en el Teorema 4.6. Denotemos por  $c_0$  al punto fijo súper-atractor de  $\wp_\Omega$ . Entonces la función*

$$F_{\Omega, c_0}(z) = (\wp_\Omega(z))^2 + c_0(1 - c_0),$$

tiene un punto fijo súper-atractor en  $c_0$ .

*Demostración.* El resultado se sigue al sustituir  $c_0$  en  $F_{\Omega, c_0}$  y su derivada.

□

## 5. Deformaciones lineales

Finalmente, en esta sección mostramos que es posible obtener funciones elípticas de orden 4 con dinámica prescrita análogas a aquellas descritas en la sección anterior, por medio de deformaciones *quasi-conformes* lineales.

### 5.1. Campo de funciones elípticas para una retícula dada

Fijemos una retícula  $\Lambda$  arbitraria. Es conocido que el conjunto de funciones meromorfas constituye un *campo* (anillo con división conmutativo).

Por un lado, un cálculo directo muestra que la suma, la resta y el producto de cualesquiera dos funciones elípticas con períodos  $\Lambda$ , así como el recíproco de cualquier función elíptica no cero, son de nuevo funciones elípticas con respecto a  $\Lambda$ . Por otro lado, como subconjunto del campo de funciones meromorfas, la suma y la multiplicación están sujetas a las leyes usuales (comutatividad, asociatividad y distributividad). En consecuencia, el subconjunto de funciones elípticas con respecto a  $\Lambda$  constituye un (sub)campo, el cual se denota por:

$$\mathcal{E}(\Lambda) := \{f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} : f \text{ es elíptica de periodo } \Lambda\}.$$

### 5.2. Aplicaciones quasiconformes

Dado que nos interesa solo el caso en que las transformaciones a conjugar sean de tipo lineal, daremos una descripción de las aplicaciones quasi-conformes solo de este tipo. Véase [3].

Consideremos a  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$  como el plano cartesiano visto como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. Toda aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal  $L : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$  puede ser escrita usando coordenadas  $(z, \bar{z})$ , en la forma

$$L(z) = az + b\bar{z}, \quad a, b, z \in \mathbb{C}.$$

Nos restringimos a aplicaciones  $\mathbb{R}$ -lineales que son invertibles y preservan orientación, *i.e.*,  $|a| > |b|$ .

Definimos el *coeficiente de Beltrami* de  $L$  como  $\mu(L) = \frac{b}{a}$  y denotamos por  $\theta \in \mathbb{R}/(\pi\mathbb{Z})$  el argumento medio de  $\mu(L)$ , tenemos así

$$\mu(L) := \left| \frac{b}{a} \right| e^{2\theta i}.$$

Nótese que  $\mu(L) \in \mathbb{D}$  cuando  $L$  preserva orientación y que  $L$  es holomorfa si y solo si  $b = 0$  si y solo si  $\mu(L) = 0$ .

Definimos la *dilatación*  $K(L)$  de  $L$  por

$$K(L) := \frac{1 + |\mu|}{1 - |\mu|} = \frac{|a| + |b|}{|a| - |b|},$$

y la *dilatación compleja* de  $L$  como el coeficiente de Beltrami  $\mu(L)$ .

Siguiendo las definiciones en [3], tenemos entonces que  $L$  es una aplicación (lineal) *quasi-conforme* sobre el plano complejo. Además, es un hecho conocido en la literatura de aplicaciones quasi-conformes que si  $\phi$  es quasi-conforme y  $f$  es una función holomorfa, entonces

$$g = \phi \circ f \circ \phi^{-1},$$

es una función holomorfa en los dominios de definición correspondientes.

### 5.3. Conjugación

A lo largo de esta última sección, para  $\lambda$  en el semi-plano superior  $\mathbb{H}$ , denotamos por  $\Lambda := [1, \lambda]$ .

Ahora bien, sea  $f \in \mathcal{E}(\Lambda)$ , y para  $\mu \in \mathbb{D}$  tomamos  $\phi \in QC(\widehat{\mathbb{C}})$ , dado por

$$\phi(z) = \frac{z + \mu\bar{z}}{1 + \mu}.$$

Tenemos así que  $\phi$  fija 0, 1 e  $\infty$ . Estamos interesados en estudiar el conjunto de funciones

$$g(z) = (\phi \circ f \circ \phi^{-1})(z), \quad f \in \mathcal{E}(\Lambda).$$

En particular, nos interesa dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Es  $\phi(\Lambda) = \Lambda'$  una retícula?
- En caso afirmativo, ¿ $g \in \mathcal{E}(\Lambda')$ ?
- ¿Qué propiedades tiene  $g$  con respecto a  $f$  como función elíptica?

**Lema 5.1.** *Sea  $\Lambda = [1, \tau]$ , con  $\tau \in \mathbb{H}$ , una retícula. Entonces  $\phi(\Lambda) = \Lambda'$  es una retícula con  $\Lambda' = [1, \tau'] = \phi(\tau)$ .*

*Demostración.* Para verificar que  $\Lambda'$  es efectivamente una retícula, debemos probar que las dos propiedades se cumplen.

- i.  $\Lambda'$  es un grupo aditivo.
- ii.  $\exists k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 0$  tal que  $|\lambda| \geq k$  para todo  $\lambda \in \Lambda' - \{0\}$ .

Dado  $\Lambda = [1, \tau]$ , definimos  $\lambda_1 = \phi(1) = 1$  y  $\lambda_2 = \phi(\tau) = \frac{\tau + \mu\bar{\tau}}{1 + \mu}$ . Así, dada la linealidad de  $\phi$ , vemos que

$$\Lambda' = [1, \tau'] = \{n + m\tau' : n, m \in \mathbb{Z}, \tau' = \phi(\tau)\}.$$

Lo que prueba que  $\Lambda'$  es de hecho un grupo aditivo.

Sea  $h(n, m) = |\lambda|^2 = (n - \tau_y m)^2 + m^2 \tau_x^2$ , donde  $\tau' = \tau_x + i\tau_y$ . Calculando los puntos críticos, vemos que  $(n_0, m_0)$  es punto crítico, si y solo si  $n_0 = m_0 = 0$ , lo que implica que  $\lambda \equiv 0$ , o bien,  $n_0 = m_0 \tau_x$ . Permitiendo solo que  $n, m \in \mathbb{Z}$ , vemos que  $h(n, m)$  tiene un mínimo con respecto a  $\mathbb{Z}$ , lo que implica que  $\Lambda'$  tiene un mínimo distinto de cero. Se sigue que  $\Lambda'$  es efectivamente una retícula.

Veamos ahora que  $\phi(\Lambda)$  es de hecho una retícula doble. Para ello, no es difícil ver que, para que  $\Lambda'$  sea una retícula simple, basta que  $\tau' \in \mathbb{R}$ . Si este fuera el caso, tendríamos que:

$$r = \frac{\tau + \mu\bar{\tau}}{1 + \mu}, \quad \phi(\tau) = r \in \mathbb{R},$$

despejando  $\mu$  tenemos

$$\mu = \frac{\tau - r}{r - \bar{\tau}},$$

lo que implica que

$$|\mu| = \left| \frac{\tau - r}{r - \bar{\tau}} \right| = 1,$$

lo que contradice la elección de  $\mu$ . Luego  $\Lambda'$  es una retícula doble.

Veamos que  $\phi(\tau) = \tau' \in \mathbb{H}$ . Sabemos que  $\text{Im}(\tau') = \frac{1}{2i}(\tau' - \bar{\tau}')$ , entonces

$$\begin{aligned} \tau' - \bar{\tau}' &= \frac{\tau + \mu\bar{\tau}}{1 + \mu} - \overline{\left( \frac{\tau + \mu\bar{\tau}}{1 + \mu} \right)} = \frac{(\tau + \mu\bar{\tau})(1 + \bar{\mu}) - (\bar{\tau} + \bar{\mu}\tau)(1 + \mu)}{|1 + \mu|^2} \\ &= \frac{\tau + \bar{\mu}\tau + \mu\bar{\tau} + |\mu|^2\bar{\tau} - (\bar{\tau} + \bar{\tau}\mu + \bar{\mu}\tau + |\mu|^2\tau)}{|1 + \mu|^2} = \frac{(1 - |\mu|^2)(\tau - \bar{\tau})}{|1 + \mu|^2} \\ 2i\text{Im}(\tau') &= \frac{1 - |\mu|^2}{|1 + \mu|^2} 2i \text{Im}(\tau) \end{aligned}$$

Luego,  $\text{Im}(\tau') = \frac{1 - |\mu|^2}{2i}(\tau' - \bar{\tau}') = \frac{1 - |\mu|^2}{|1 + \mu|^2} \text{Im}(\tau) > 0$ . □

**Lema 5.2.** Sean  $\Lambda = [1, \tau]$  y  $f \in \mathcal{E}(\Lambda)$ . Si

$$g(z) = (\phi \circ f \circ \phi^{-1})(z),$$

entonces  $g \in \mathcal{E}(\Lambda')$ , con  $\tau' = \phi(\tau)$ .

*Demostración.* Tenemos que  $\phi$  es una aplicación lineal, por lo que su inverso,  $\phi^{-1}$ , debe también ser una aplicación lineal. Así, calculando la composición:

$$\begin{aligned} g(z+1) &= (\phi \circ f \circ \phi^{-1})(z+1) = (\phi \circ f)(\phi^{-1}(z) + \phi^{-1}(1)) = (\phi \circ f)(\phi^{-1}(z) + 1) \\ &= \phi(f(\phi^{-1}(z))) = (\phi \circ f \circ \phi^{-1})(z) = g(z). \end{aligned}$$

De igual forma

$$\begin{aligned} g(z+\tau') &= (\phi \circ f \circ \phi^{-1})(z+\tau') = (\phi \circ f)(\phi^{-1}(z) + \phi^{-1}(\tau')) = (\phi \circ f)(\phi^{-1}(z) + \tau) \\ &= (\phi \circ f)(\phi^{-1}(z)) = \phi(f(\phi^{-1}(z))) = g(z). \end{aligned}$$

Por lo que  $g$  es periódica con respecto a  $\Lambda'$ .  $\square$

#### 5.4. Propiedades de la retícula $\phi(\Lambda) = \Lambda'$ vía $\phi$

Antes de considerar las propiedades que tiene  $g$  como función elíptica, analizaremos qué propiedades tiene  $\Lambda'$  como imagen bajo  $\phi$  de la retícula  $\Lambda$ . Dado que  $\Lambda' = [1, \tau']$ , basta analizar las propiedades de  $\tau'$ , con

$$\tau' = \frac{\tau + \mu\bar{\tau}}{1 + \mu}.$$

Tenemos así la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{D} \times B &\rightarrow \mathbb{H} \\ (\mu, \tau) &\mapsto \frac{\tau + \mu\bar{\tau}}{1 + \mu}. \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos en principio, una aplicación de dos variables complejas, difícil de visualizar geométricamente. Una forma de reducir el problema, es analizar la manera en que cambia una retícula dada bajo una pequeña perturbación con respecto al origen del disco unitario  $\mathbb{D}$ . Por lo que, fijando una retícula  $\Lambda_0 = [1, \tau_0]$ , restringimos nuestra aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{D} \times \{\tau_0\} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (\mu, \tau_0) &\mapsto \frac{\tau_0 + \mu\bar{\tau}_0}{1 + \mu}. \end{aligned}$$

Análogamente, despejando  $\mu$  de nuestra aplicación original  $\tau' = \frac{\tau + \mu\bar{\tau}}{1 + \mu}$ , podemos obtener el *parámetro de la deformación* entre dos retículas, representadas por  $\tau$  y  $\tau'$ , dado por

$$\mu = -\frac{\tau' - \tau}{\tau' - \bar{\tau}}.$$

De nuevo, tenemos una aplicación de dos variables complejas. Considerando la misma restricción anterior, podemos fijar un *punto base*  $\tau_0$ , obteniendo así

$$\mu_{\tau_0} = \mu_{\tau_0}(\tau') = \frac{\tau_0 - \tau'}{\tau' - \overline{\tau_0}}.$$

Nótese que  $\mu_{\tau_0}(\tau') \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  y que esta aplicación lleva el eje real en el círculo unitario, ya que si  $r \in \mathbb{R}$ , entonces

$$|\mu_{\tau_0}(r)| = \left| \frac{\tau_0 - r}{r - \overline{\tau_0}} \right| = 1$$

y como  $\mu_{\tau_0}(\tau_0) = 0$ , entonces la aplicación es un isomorfismo conforme entre el semi-plano superior  $\mathbb{H}$  y el disco unitario  $\mathbb{D}$ .

De esta manera, dados dos puntos  $\tau_0, \tau' \in \mathbb{H}$ , es posible encontrar una trayectoria en  $\mathbb{D}$  (que parte del origen) que genera una trayectoria que conecta a  $\tau_0$  con  $\tau'$ .

Si traducimos esto a nuestro objeto de estudio, las funciones elípticas, dada  $f \in \mathcal{E}(\Lambda_0)$  y una trayectoria  $t \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{D}$  con  $\gamma(0) = 0$ , entonces, para cada  $\mu_t = \gamma(t)$ , la expresión

$$g_t(z) = (\phi_{\mu_t} \circ f \circ \phi_{\mu_t}^{-1})(z), \quad \text{con} \quad \phi_{\mu_t}(z) = \frac{z + \mu_t \bar{z}}{1 + \mu_t},$$

representa una familia de funciones elípticas, que son deformaciones quasi-conformes de la función  $f$ , y además cada  $g_t \in \mathcal{E}(\Lambda_t)$ .

### 5.5. El caso $f = \wp$

Sean  $\Lambda = [1, \tau]$  una retícula y  $f = \wp_\Lambda$  la función de Weierstrass asociada. Queremos analizar el conjunto

$$\mathcal{G}_\wp = \left\{ g = \phi \circ \wp_\Lambda \circ \phi^{-1} : \phi \in QC_K(\widehat{\mathbb{C}}) \text{ de tipo lineal} \right\}$$

donde cada  $\phi$  es normalizada de tal forma que fija 0, 1 e  $\infty$ .

Dado que  $\phi$  es un homeomorfismo que fija 0 e  $\infty$ , es claro que los ceros y polos de  $g$  son las imágenes de los ceros y polos (respectivamente) de  $\wp_\Lambda$  bajo  $\phi$ . Y además, el orden se preserva. Por lo que  $g$  es también de orden 2. También, se puede probar que  $g$  es una función par:

$$\begin{aligned} g(-z) &= (\phi \circ f \circ \phi^{-1})(-z) = (\phi \circ f)(-\phi^{-1}(z)) \\ &= (\phi \circ f)(\phi^{-1}(z)) = \phi(f(\phi^{-1}(z))) = g(z). \end{aligned}$$



Figura 2: Se muestran los planos dinámicos con base en los parámetros de la Proposición 4.1. IZQUIERDA: El plano dinámico de la función  $\wp_\Lambda$ . CENTRO: El plano dinámico de la función  $\wp_\Lambda^2 + c$ . DERECHA: Plano dinámico de la conjugación  $g = \phi \circ \wp_\Lambda \circ \phi^{-1}$ , con  $\phi$  quasi-conforme.

Por otro lado, sabemos que los polos de  $\wp_\Lambda$  son justamente los puntos de la retícula  $\Lambda$ . Por lo que, los polos de  $g$  son los puntos de la retícula  $\Lambda' = \phi(\Lambda)$ . Ahora bien, sea  $w_0$  un cero de  $\wp_\tau$  y  $z_0 = \phi(w_0)$ , tenemos

$$(\phi \circ \wp_\Lambda \circ \phi^{-1})(z_0) = (\phi \circ \wp_\Lambda)(w_0) = \phi(0) = 0,$$

es decir, si  $\Pi(\wp_\Lambda) = \{\wp_\Lambda^{-1}(0)\}$  denota el conjunto de ceros de la función  $\wp_\Lambda$ , entonces  $\phi(\Pi(\Lambda))$  es el conjunto de ceros de la función  $g$ . No es difícil ver que la implicación es en las dos direcciones.

De esta manera, dada una retícula arbitraria  $\Lambda'$  (no necesariamente real, ni rectangular, ni cuadrada), podemos encontrar una función elíptica  $g \in \mathcal{E}(\Lambda')$  con la dinámica prescrita en cada uno de los resultados de la sección anterior.

La Figura 2 muestra los tres casos asociados a la Proposición 4.1.

## Referencias

- [1] I. N. Baker, J. Kotus, y L. Yinian, “Iterates of meromorphic functions. I,” *Ergodic Theory Dynam. Systems*, vol. 11, no. 2, pp. 241–248, 1991, doi: 10.1017/S014338570000612X.
- [2] W. Bergweiler, “Iteration of meromorphic functions,” *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, vol. 29, no. 2, pp. 151–188, 1993, doi: 10.1090/S0273-0979-1993-00432-4.
- [3] B. Branner y N. Fagella, *Quasiconformal surgery in holomorphic dynamics*, ser. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2014, vol. 141.
- [4] P. Du Val, *Elliptic functions and elliptic curves*, ser. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, London-New York, 1973, vol. No. 9.
- [5] A. E. Erëmenko y M. Y. Lyubich, “Dynamical properties of some classes of entire functions,” *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, vol. 42, no. 4, pp. 989–1020, 1992, doi: 10.5802/aif.1318.
- [6] J. Hawkins, “Smooth Julia sets of elliptic functions for square rhombic lattices,” 2006, vol. 30, no. 1, pp. 265–278, spring Topology and Dynamical Systems Conference.
- [7] J. Hawkins y L. Koss, “Ergodic properties and Julia sets of Weierstrass elliptic functions,” *Monatsh. Math.*, vol. 137, no. 4, pp. 273–300, 2002, doi: 10.1007/s00605-002-0504-1.
- [8] J. Hawkins y L. Koss, “Parametrized dynamics of the Weierstrass elliptic function,” *Conform. Geom. Dyn.*, vol. 8, pp. 1–35, 2004, doi: 10.1090/S1088-4173-04-00103-1.
- [9] J. Hawkins y L. Koss, “Connectivity properties of Julia sets of Weierstrass elliptic functions,” *Topology Appl.*, vol. 152, no. 1-2, pp. 107–137, 2005, doi: 10.1016/j.topol.2004.08.018.
- [10] J. Hawkins, L. Koss, y J. Kotus, “Elliptic functions with critical orbits approaching infinity,” *J. Difference Equ. Appl.*, vol. 16, no. 5-6, pp. 613–630, 2010, doi: 10.1080/10236190903203895.
- [11] J. Hawkins y M. Moreno Rocha, “Dynamics and Julia set of iterated elliptic functions,” *New York J. Math.*, vol. 24, pp. 947–979, 2018.
- [12] G. A. Jones y D. Singerman, *Complex functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987, doi: 10.1017/CBO9781139171915.
- [13] L. Koss, “Examples of parametrized families of elliptic functions with empty Fatou sets,” *New York J. Math.*, vol. 20, pp. 607–625, 2014.
- [14] L. Koss y K. Roy, “Dynamics of vertical real rhombic Weierstrass elliptic functions,” *Involv.*, vol. 10, no. 3, pp. 361–378, 2017, doi: 10.2140/involv.2017.10.361.
- [15] J. Kotus, “Elliptic functions with critical points eventually mapped onto infinity,” *Monatsh. Math.*, vol. 149, no. 2, pp. 103–117, 2006, doi: 10.1007/s00605-005-0373-5.

- [16] J. Kotus y M. Urbański, “Hausdorff dimension and Hausdorff measures of Julia sets of elliptic functions,” *Bull. London Math. Soc.*, vol. 35, no. 2, pp. 269–275, 2003, doi: 10.1112/S0024609302001686.
- [17] J. Kotus y M. Urbański, “Fractal measures and ergodic theory of transcendental meromorphic functions,” in *Transcendental dynamics and complex analysis*, ser. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, vol. 348, pp. 251–316, doi: 10.1017/CBO9780511735233.013.
- [18] J. Milnor, “On lattès maps,” in *Dynamics on the Riemann sphere*. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 9–43, doi: 10.4171/011-1/1.
- [19] M. Moreno Rocha y P. Pérez Lucas, “A class of even elliptic functions with no Herman rings,” *Topology Proc.*, vol. 48, pp. 151–162, 2016.



# Una nota sobre cocientes finito-dimensionales y el problema de continuidad automática para álgebras de convolución torcida

FELIPE I. FLORES<sup>1,✉</sup> 

<sup>1</sup> Department of Mathematics, University of Virginia, 114 Kerchof Hall, 141 Cabell Dr, Charlottesville, Virginia, United States.

*hmy3tf@virginia.edu*<sup>✉</sup>

## RESUMEN

En esta nota probaremos que el álgebra de convolución torcida  $L^1_{\alpha,\omega}(G, \mathfrak{A})$  asociada a una acción torcida de un grupo localmente compacto  $G$  en una  $C^*$ -álgebra  $\mathfrak{A}$  tiene la siguiente propiedad: Todo cociente por un ideal cerrado, bilátero y de codimensión finita produce un álgebra semisimple. Luego utilizamos esta propiedad, junto con resultados de H. Dales y G. Willis, para extender resultados previos del autor y producir grandes clases de ejemplos de álgebras con propiedades de continuidad automática.

**Palabras clave:** Continuidad automática, semisimplicidad, ideal cofinito, bimódulo, acción torcida, álgebra de convolución.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 43A20, 47L65, 46H40

Publicado: 14 de octubre de 2025

Aceptado: 9 de septiembre de 2025

Recibido: 16 de octubre de 2024



©2025 F. I. Flores. Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

# A note on finite-dimensional quotients and the problem of automatic continuity for twisted convolution algebras

FELIPE I. FLORES<sup>1,✉</sup> 

<sup>1</sup> Department of Mathematics, University of Virginia, 114 Kerchof Hall, 141 Cabell Dr, Charlottesville, Virginia, United States.

*hmy3tf@virginia.edu*<sup>✉</sup>

## ABSTRACT

In this note, we will show that the twisted convolution algebra  $L^1_{\alpha,\omega}(G, \mathfrak{A})$  associated with a twisted action of a locally compact group  $G$  on a  $C^*$ -algebra  $\mathfrak{A}$  has the following property: Every quotient by a closed two-sided ideal of finite codimension produces a semisimple algebra. Afterward, we use this property, together with results by H. Dales and G. Willis, to extend previous results by the author and to produce large classes of examples of algebras with automatic continuity properties.

**Keywords and Phrases:** Automatic continuity, semisimplicity, cofinite ideal, bimodule, twisted action, convolution algebra.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 43A20, 47L65, 46H40

Published: 14 October, 2025

Accepted: 09 September, 2025

Received: 16 October, 2024



©2025 Felipe I. Flores. This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

## Introducción

Mucho del progreso del estudio de la continuidad automática en álgebras de Banach ha ocurrido en relación con el estudio de las álgebras de grupo, ámbito predilecto del análisis armónico abstracto. Ejemplos de este fenómeno se pueden encontrar en el famoso libro de Dales [3] o en el estudio [2].

En esta nota estudiaremos la continuidad de operadores de entrelazamiento, un objetivo que ya ha sido llevado a cabo en el contexto de álgebras de grupo por Willis [12], Dales y Willis [4] y Runde [11], entre otros. Versiones particulares de este problema también han suscitado interés. Por ejemplo, podemos mencionar los trabajos de Jewell [8] y Willis [13] sobre continuidad automática para derivaciones, o el trabajo de Runde [10] sobre continuidad automática para homomorfismos.

El propósito de esta nota es extender resultados anteriores sobre el problema de continuidad automática para  $^*$ -álgebras de Banach dadas por convolución (generalizada, torcida) de funciones de tipo  $L^1$  sobre grupos. De hecho, buscamos mejorar los resultados de [5] de dos formas diferentes, pero relacionadas. Una de estas formas involucra relajar la condición de generación compacta, fundamental para los resultados de ese artículo, mientras que la otra se basa en hacer el álgebra de coeficientes finito-dimensional. Esto permite, por supuesto, grandes generalizaciones y nuevos ejemplos de fenómenos de continuidad automática.

Nuestro enfoque se basa en el estudio de la semisimplicidad para los cocientes mediante ideales finito-codimensionales (también llamados cofinitos), cerrados y bilaterales. Esta propiedad está sorprendentemente conectada con la teoría de la continuidad automática, como lo ejemplifican los resultados en [11], y especialmente en [4]. De hecho, nuestro enfoque hará uso explícito de algunos de los teoremas en estos artículos, atribuidos a Willis (Teorema 2.4) y Dales-Willis (Teorema 2.7). Estos teoremas, combinados con los resultados de [5] y el resultado que obtendremos sobre semisimplicidad, producen los nuevos ejemplos de continuidad automática.

A continuación describimos la organización del artículo: En la Sección 1 introducimos lo que llamamos álgebras de convolución torcida y demostramos que sus cocientes de dimensión finita son semisimples. Esto concluye con el Teorema 1.5 y su demostración. En la Sección 2 recordamos conceptos básicos de continuidad automática y luego procedemos a combinar los resultados mencionados anteriormente con los teoremas de Willis y de Dales-Willis para obtener nuestros resultados en continuidad automática, concluyendo el artículo.

### 1. Semisimplicidad de los cocientes finito-dimensionales

Una *acción torcida* es una 4-tupla  $(G, \alpha, \omega, \mathfrak{A})$ , donde  $G$  es un grupo localmente compacto,  $\mathfrak{A}$  un  $C^*$ -álgebra y tenemos las aplicaciones continuas  $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{A})$ ,  $\omega : G \times G \rightarrow \mathcal{U}\mathcal{M}(\mathfrak{A})$ , tales que  $\omega$  y  $G \ni x \mapsto \alpha_x(a) \in \mathfrak{A}$  satisfacen

- (i)  $\alpha_x(\omega(y, z))\omega(x, yz) = \omega(x, y)\omega(xy, z),$
- (ii)  $\alpha_x(\alpha_y(a))\omega(x, y) = \omega(x, y)\alpha_{xy}(a),$
- (iii)  $\omega(x, e) = \omega(e, y) = 1, \alpha_e = \text{id}_{\mathfrak{A}},$

para todos los  $x, y, z \in G$  y  $a \in \mathfrak{A}$ . Aquí  $e$  denota la identidad en  $G$ .

Dada una tupla de este tipo, se puede formar el álgebra de convolución torcida  $L_{\alpha, \omega}^1(G, \mathfrak{A})$ , que consta de todas las funciones Bochner-integrables  $\Phi : G \rightarrow \mathfrak{A}$  y está dotada del producto de convolución:

$$\Phi * \Psi(x) = \int_G \Phi(y)\alpha_y[\Psi(y^{-1}x)]\omega(y, y^{-1}x)dy,$$

mientras que la involución está dada por

$$\Phi^*(x) = \Delta(x^{-1})\omega(x, x^{-1})^*\alpha_x[\Phi(x^{-1})^*].$$

Con estas operaciones,  $L_{\alpha, \omega}^1(G, \mathfrak{A})$  es una \*-álgebra de Banach bajo la norma

$$\|\Phi\|_{L_{\alpha, \omega}^1(G, \mathfrak{A})} = \int_G \|\Phi(x)\|_{\mathfrak{A}} dx.$$

En estas integrales  $dx$  denota la medida de Haar en  $G$ , mientras que  $\Delta$  denota la función modular asociada a  $dx$ . En el caso en que  $\omega \equiv 1$ , denotamos al álgebra resultante como  $L_{\alpha}^1(G, \mathfrak{A})$ . Por otra parte, en el caso en que  $\mathfrak{A} = \mathbb{C}$  y  $\alpha \equiv \text{id}_{\mathbb{C}}$ , el álgebra resultante se denominará por  $L_{\omega}^1(G)$  y la llamaremos álgebra de grupo torcida.

El objetivo de este capítulo es demostrar que los ideales cofinitos y cerrados de  $L_{\alpha, \omega}^1(G, \mathfrak{A})$  producen cocientes semisimples y, para ello, necesitamos introducir una clase especial de multiplicadores. Es conveniente entonces recordar la definición del álgebra de multiplicadores de un álgebra de Banach.

En lo que sigue, si  $\mathcal{X}$  es un espacio de Banach, entonces  $\mathbb{B}(\mathcal{X})$  denotará el conjunto de operadores acotados  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ , mientras que  $\text{GL}(\mathcal{X}) \subset \mathbb{B}(\mathcal{X})$  denotará el grupo de operadores acotados que son invertibles.

**Definición 1.1.** *Sea  $\mathfrak{B}$  un álgebra de Banach. Un multiplicador de  $\mathfrak{B}$  es un par  $m = (\lambda, \mu)$ , donde  $\lambda, \mu \in \mathbb{B}(\mathfrak{B})$  son tales que*

$$a\lambda(b) = \mu(a)b, \quad \lambda(ab) = \lambda(a)b \quad y \quad \mu(ab) = a\mu(b),$$

para todo  $a, b \in \mathfrak{B}$ .

*El conjunto de todos los multiplicadores de  $\mathfrak{B}$  se llama el álgebra de multiplicadores de  $\mathfrak{B}$  y la denotamos por  $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$ .*

Recordemos que el producto de multiplicadores viene dado por la siguiente fórmula:

$$(\lambda, \mu)(\lambda', \mu') = (\lambda \circ \lambda', \mu' \circ \mu).$$

Además, la norma natural en  $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$  está dada por  $\|(\lambda, \mu)\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{B})} = \max\{\|\lambda\|, \|\mu\|\}$ . Si  $\mathfrak{B}$  es una  $*$ -álgebra de Banach, entonces el álgebra de multiplicadores también tiene una involución natural,  $(\lambda, \mu)^* = (\lambda^*, \mu^*)$ , que verifica

$$\lambda^*(a) = \mu(a^*)^* \quad y \quad \mu^*(a) = \lambda(a^*)^*, \quad \text{para todo } a \in \mathfrak{B}.$$

Si  $\mathfrak{B}$  es involutiva, entonces utilizamos  $\mathcal{U}\mathcal{M}(\mathfrak{B})$  para denotar al grupo unitario de  $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$ .

Nótese que  $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$  siempre es unital y además contiene una copia de  $\mathfrak{B}$ , dada por los multiplicadores  $(L_b, R_b)$ ,  $b \in \mathfrak{B}$ . Estos multiplicadores vienen, naturalmente, definidos por

$$R_b(a) = ab \quad y \quad L_b(a) = ba, \quad \text{para todo } a \in \mathfrak{B}.$$

Lo interesante de esta inclusión es que, asumiendo la existencia de identidades aproximadas contractivas, toda representación no-degenerada de  $\mathfrak{B}$  se extiende naturalmente a una representación de  $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$ . Es un hecho bien conocido que  $L_{\alpha, \omega}^1(\mathsf{G}, \mathfrak{A})$  siempre tiene una identidad aproximada contractiva, por lo que el siguiente lema será de importancia para nosotros.

**Lema 1.2.** *Sea  $\mathfrak{B}$  un álgebra de Banach,  $\mathcal{X}$  un espacio de Banach y sea  $\pi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{X})$  una representación contractiva. Asuma además que las siguientes son ciertas:*

- (i)  $\mathfrak{B}$  tiene una identidad aproximada contractiva.
- (ii) La representación  $\pi$  es no-degenerada, es decir,  $\overline{\text{span}}\{\pi(b)\xi \mid b \in \mathfrak{B}, \xi \in \mathcal{X}\} = \mathcal{X}$ .

Entonces existe una única representación unital y contractiva  $\tilde{\pi} : \mathcal{M}(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{X})$ , tal que  $\tilde{\pi} \circ \iota_{\mathfrak{B}} = \pi$ .

Dada una acción torcida  $(\mathsf{G}, \alpha, \omega, \mathfrak{A})$ , y para  $a \in \mathcal{M}(\mathfrak{A})$ ,  $y \in \mathsf{G}$ , consideramos el multiplicador  $m_{a,y} = (\lambda_{a,y}, \mu_{a,y})$  de  $L_{\alpha, \omega}^1(\mathsf{G}, \mathfrak{A})$  que viene dado por

$$\begin{aligned} \lambda_{a,y}(\Phi)(x) &= a\alpha_y(\Phi(y^{-1}x))\omega(y, y^{-1}x), \\ \mu_{a,y}(\Phi)(x) &= \Delta(y^{-1})\Phi(xy^{-1})\alpha_{xy^{-1}}(a)\omega(xy^{-1}, y). \end{aligned}$$

También fijamos la siguiente notación

$$\Gamma_{\mathsf{G}, \mathfrak{A}} = \{m_{u,y} \mid u \in \mathcal{U}\mathcal{M}(\mathfrak{A}), y \in \mathsf{G}\}.$$

En el siguiente lema, recopilaremos algunos hechos bien conocidos y fáciles de probar, pero útiles para el desarrollo de nuestro resultado.

**Lema 1.3.** *Las siguientes aseveraciones son verdaderas.*

- (i)  $\Gamma_{G,\mathfrak{A}}$  es un grupo.
- (ii) Todo  $m_{u,y} \in \Gamma_{G,\mathfrak{A}}$  es unitario y tiene norma 1.
- (iii) Todo multiplicador de la forma  $m_{a,y}$  puede ser escrito como una combinación lineal de 4 elementos en  $\Gamma_{G,\mathfrak{A}}$ .
- (iv) El adjunto de  $m_{a,y}$  satisface la formula

$$m_{a,y}^* = m_{\omega(y^{-1},y)^*\alpha_{y^{-1}}(a^*),y^{-1}}, \quad (1.1)$$

para todo  $a \in \mathcal{M}(\mathfrak{A})$ ,  $y \in G$ .

A continuación, procedemos a demostrar el resultado principal de la sección. Nuestra demostración está basada en el hecho de que las representaciones de grupos compactos son similares a representaciones unitarias. El hecho relevante es el siguiente (véase [9, Theorem 0.1]).

**Lema 1.4.** *Sea  $\mathcal{X}$  un espacio de Hilbert de dimensión finita y  $V \subset \mathrm{GL}(\mathcal{X})$  un subgrupo tal que  $\sup_{v \in V} \|v\|_{\mathbb{B}(\mathcal{H})} < \infty$ . Entonces existe una transformación lineal positiva e invertible  $T \in \mathrm{GL}(\mathcal{X})$  tal que  $TvT^{-1} \in \mathcal{U}(\mathcal{X})$ , para todo  $v \in V$ .*

**Teorema 1.5.** *Sea  $(G, \alpha, \omega, \mathfrak{A})$  una acción torcida. Si  $I \subset \mathfrak{B} = L^1_{\alpha, \omega}(G, \mathfrak{A})$  es un ideal bilateral, cerrado y de codimensión finita, entonces  $I$  es automáticamente auto-adjunto y el álgebra cociente  $\mathfrak{B}/I$  es semisimple.*

*Demostración.* Dado que  $I$  es cerrado y de codimensión finita,  $\mathcal{X} = \mathfrak{B}/I$  es un espacio de Banach de dimensión finita. Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  cualquier producto interno, por ser de dimensión finita,  $\mathcal{X}$  es un espacio de Hilbert con respecto a este producto interno.

Denotamos por  $\pi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{X})$ , la representación inducida en el cociente, es decir,

$$\pi(\Phi)(\Psi + I) = \Phi * \Psi + I,$$

para todo  $\Phi, \Psi \in \mathfrak{B}$ . Esta representación es contractiva y no degenerada, por lo que, debido al Lema 1.2 y abusando de la notación,  $\pi$  se extiende a  $\mathcal{M}(\mathfrak{B})$  y, por ende, los operadores  $\pi(m_{a,y}) \in \mathbb{B}(\mathcal{X})$  están bien definidos y son uniformemente acotados. De hecho, no es difícil notar que cumplen la identidad

$$\pi(m_{a,y})(\Psi + I) = m_{a,y}(\Psi) + I, \quad \text{para todo } \Psi \in \mathfrak{B}.$$

Por este motivo, uno observa que

$$\pi(\Phi)(\Psi + I) = \int_{\mathbb{G}} \pi(m_{\Phi(y),y})(\Psi + I) dy = \int_{\mathbb{G}} m_{\Phi(y),y}(\Psi) dy + I. \quad (1.2)$$

Ahora bien, notamos que  $V = \{\pi(m)\}_{m \in \Gamma_{\mathbb{G}, \mathfrak{A}}}$  satisface todas las condiciones del Lema 1.4 y, por ende, debe existir un operador positivo e invertible  $T \in \text{GL}(\mathcal{X})$  tal que  $T\pi(m)T^{-1} \in \mathcal{U}(\mathcal{X})$ , para todo  $m \in \Gamma_{\mathbb{G}, \mathfrak{A}}$ .

Definimos entonces la representación  $\pi' : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{B}(\mathcal{X})$  dada por  $\pi'(\Phi) = T\pi(\Phi)T^{-1}$  y probaremos ahora que es una \*-representación y que  $\text{Ker } \pi' = I$ , con lo cual se seguirá que  $\mathfrak{B}/I$  es \*-isomorfa a  $\pi'(\mathfrak{B})$ , que es una  $C^*$ -álgebra, y por lo tanto habremos demostrado que  $\mathfrak{B}/I$  es semisimple.

En efecto, nótese que  $\text{Ker } \pi' = \text{Ker } \pi$ . Ahora bien, sea  $\Phi \in \text{Ker } \pi$  y sea  $\Psi_j \in \mathfrak{B}$  alguna identidad aproximada acotada de  $\mathfrak{B}$ . Notamos que

$$I = \lim_j \pi(\Phi)(\Psi_j + I) = \lim_j \Phi * \Psi_j + I = \Phi + I,$$

por lo cual  $\Phi \in I$ . Esto prueba que  $\text{Ker } \pi' = I$ .

Veamos ahora que  $\pi'$  es una \*-representación. En efecto, si  $m \in \Gamma_{\mathbb{G}, \mathfrak{A}}$  y  $\xi, \eta \in \mathcal{X}$ , entonces uno tiene

$$\langle \pi'(m)\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \pi'(m)^*\eta \rangle = \langle \xi, \pi'(m)^{-1}\eta \rangle = \langle \xi, \pi'(m^{-1})\eta \rangle = \langle \xi, \pi'(m^*)\eta \rangle.$$

Pero, recordando que todo  $m_{a,y}$  se puede escribir como una combinación lineal de 4 elementos en  $\Gamma_{\mathbb{G}, \mathfrak{A}}$  (punto (iii) del Lema 1.3), vemos que

$$\pi'(m_{a,y})^* = \pi'(m_{a,y}^*), \quad \text{para todo } a \in \mathcal{M}(\mathfrak{A}), y \in \mathbb{G}.$$

Y, en consecuencia, para  $\Phi \in \mathfrak{B}, \xi \in \mathcal{X}$ , y utilizando la igualdad (1.2), uno observa que

$$\begin{aligned} \pi'(\Phi^*)\xi &= T\pi(\Phi^*)T^{-1}\xi = T \int_{\mathbb{G}} \pi(m_{\Phi^*(y),y})T^{-1}\xi dy \\ &= T \int_{\mathbb{G}} \Delta(y^{-1})\pi(m_{\omega(y,y^{-1})^*\alpha_y(\Phi(y^{-1})^*),y})T^{-1}\xi dy \\ &= T \int_{\mathbb{G}} \pi(m_{\omega(y^{-1},y)^*\alpha_{y^{-1}}(\Phi(y)^*),y^{-1}})T^{-1}\xi dy \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \int_{\mathbb{G}} T\pi(m_{\Phi(y),y}^*)T^{-1}\xi dy \\ &= \int_{\mathbb{G}} \pi'(m_{\Phi(y),y})^*\xi dy = \pi'(\Phi)^*\xi, \end{aligned}$$

con lo que se termina la demostración.  $\square$

## 2. Aplicaciones al problema de continuidad automática

Sea  $\mathfrak{B}$  un álgebra de Banach. Un espacio de Banach  $\mathcal{X}$  que también es un  $\mathfrak{B}$ -bimódulo se llama  *$\mathfrak{B}$ -bimódulo de Banach* si las funciones

$$\mathfrak{B} \times \mathcal{X} \ni (b, \xi) \mapsto b\xi \in \mathcal{X} \quad \text{y} \quad \mathcal{X} \times \mathfrak{B} \ni (\xi, b) \mapsto \xi b \in \mathcal{X}$$

son continuas conjuntamente.

**Definición 2.1.** *Sea  $\mathfrak{B}$  un álgebra de Banach y sean  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$   $\mathfrak{B}$ -bimódulos de Banach. Una función lineal  $\theta : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$  se denomina operador de  $\mathfrak{B}$ -entrelazamiento si para cada  $b \in \mathfrak{B}$ , las funciones*

$$\mathcal{X}_1 \ni \xi \mapsto \theta(b\xi) - b\theta(\xi) \in \mathcal{X}_2 \quad \text{y} \quad \mathcal{X}_1 \ni \xi \mapsto \theta(\xi b) - \theta(\xi)b \in \mathcal{X}_2$$

son continuas.

**Ejemplo 2.2.** (i) *Todo homomorfismo de  $\mathfrak{B}$ -bimódulos entre  $\mathfrak{B}$ -bimódulos de Banach es un operador de  $\mathfrak{B}$ -entrelazamiento.*

(ii) *Sea  $\mathcal{X}$  un  $\mathfrak{B}$ -bimódulo de Banach. Una derivación es una función lineal  $D : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{X}$  que satisface*

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

*Toda derivación es un operador de  $\mathfrak{B}$ -entrelazamiento.*

El problema de continuidad automática consiste en entender qué tipo de condiciones garantizan que todo operador de  $\mathfrak{B}$ -entrelazamiento sobre el álgebra de Banach  $\mathfrak{B}$  es necesariamente continuo. Una herramienta fundamental para atacar este problema es el llamado ideal de continuidad, que introducimos a continuación.

**Definición 2.3.** *Sea  $\mathfrak{B}$  un álgebra de Banach y  $\theta : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$  un operador de  $\mathfrak{B}$ -entrelazamiento entre  $\mathfrak{B}$ -bimódulos de Banach. Entonces*

$$\mathcal{I}(\theta) = \{b \in \mathfrak{B} \mid \mathcal{X}_1 \ni \xi \mapsto \theta(b\xi) \in \mathcal{X}_2 \text{ y } \mathcal{X}_1 \ni \xi \mapsto \theta(\xi b) \in \mathcal{X}_2 \text{ son funciones continuas}\}$$

es el ideal de continuidad de  $\theta$ .

Nótese que  $\mathcal{I}(\theta)$  es cerrado, ya que  $\mathcal{X}_2$  es un  $\mathfrak{B}$ -bimódulo de Banach. El siguiente teorema se debe a Willis [12, Lemma 4.3.5]. Véase también [11, pág. 498].

**Teorema 2.4** (Willis). *Sea  $\mathfrak{B}$  un álgebra de Banach,  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$   $\mathfrak{B}$ -bimódulos de Banach y  $\theta : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$  un operador de  $\mathfrak{B}$ -entrelazamiento. Suponga que existe una familia dirigida  $\{\mathfrak{B}_i\}_i$  de subálgebras de Banach de  $\mathfrak{B}$  tales que*

- (i)  $\mathfrak{B} = \overline{\bigcup_i \mathfrak{B}_i}$  y
- (ii) para cada índice  $i$ , el álgebra  $\mathfrak{B}_i/\mathfrak{B}_i \cap \mathcal{I}(\theta)$  es semisimple y finito-dimensional.

Entonces  $\mathcal{I}(\theta)$  es de codimensión finita en  $\mathfrak{B}$ .

La principal aplicación de este resultado es levantar la hipótesis de generación compacta de  $\mathbf{G}$  de algunos de los resultados obtenidos en [5]. Nos gustaría destacar que dicha restricción fue de importancia fundamental en ese trabajo, ya que permitió garantizar la existencia de funciones de peso con propiedades notables (ver [5, Lemma 3.4]).

**Proposición 2.5.** *Sea  $(\mathbf{G}, \alpha, \omega, \mathfrak{A})$  una acción torcida, denotemos por  $\mathfrak{B} = L^1_{\alpha, \omega}(\mathbf{G}, \mathfrak{A})$  y supongamos que  $\theta : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$  es un operador de  $\mathfrak{B}$ -entrelazamiento entre los  $\mathfrak{B}$ -bimódulos de Banach  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$  con la propiedad de que para todos los subgrupos abiertos y compactamente generados  $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ , el ideal  $\mathcal{I}(\theta) \cap L^1_{\alpha, \omega}(\mathbf{H}, \mathfrak{A})$  tiene codimensión finita en  $L^1_{\alpha, \omega}(\mathbf{H}, \mathfrak{A})$ . Entonces  $\mathcal{I}(\theta)$  tiene codimensión finita en  $\mathfrak{B}$ .*

*Demostración.* Observamos que  $\mathcal{I}(\theta) \cap L^1_{\alpha, \omega}(\mathbf{H}, \mathfrak{A})$  coincide con el ideal de continuidad de  $\theta$  cuando este se considera como un operador de  $L^1_{\alpha, \omega}(\mathbf{H}, \mathfrak{A})$ -entrelazamiento y, por lo tanto, es cerrado. Ahora, consideramos la familia  $\{\mathbf{H}_i\}_i$  de subgrupos abiertos, generados de manera compacta de  $\mathbf{G}$ , ordenados por inclusión y observamos que la familia  $\mathfrak{B}_i = L^1_{\alpha, \omega}(\mathbf{H}_i, \mathfrak{A})$  es una familia dirigida de subálgebras de  $\mathfrak{B}$  tales que  $\mathfrak{B} = \overline{\bigcup_i \mathfrak{B}_i}$ . Esto último se sigue, por ejemplo, del hecho de que  $\bigcup_i \mathfrak{B}_i$  contiene todas las funciones continuas de soporte compacto.

Nótese que  $\mathfrak{B}_i/\mathfrak{B}_i \cap \mathcal{I}(\theta)$  es finito-dimensional por suposición y semisimple por el Teorema 1.5. Entonces, el resultado se sigue de aplicar el Teorema 2.4.  $\square$

En particular, ahora podemos proporcionar los siguientes ejemplos de continuidad automática, ya para grupos que no precisan ser compactamente generados.

**Corolario 2.6.** *Sea  $\mathbf{G}$  un grupo localmente compacto y nilpotente. Sea  $\mathcal{X}$  un  $\mathfrak{B}$ -bimódulo de Banach y  $\theta : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{X}$  un operador de  $\mathfrak{B}$ -entrelazamiento. Entonces  $\theta$  es automáticamente continuo cuando  $\mathfrak{B}$  es una de las siguientes:*

- (i) Álgebras de grupos torcidas  $L^1_{\omega}(\mathbf{G})$ , asociadas con un 2-cociclo  $\omega : \mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}$ .
- (ii) Álgebras de convolución  $\ell^1_{\alpha}(\mathbf{G}, \mathfrak{A})$ , donde  $(\mathbf{G}, \mathfrak{A}, \alpha)$  es un sistema  $C^*$ -dinámico con  $\mathfrak{A}$  una  $C^*$ -álgebra unital y promediable (=nuclear).

*Demostración.* Combinando la Proposición 2.5 con [5, Corollary 4.21], sabemos que  $\mathcal{I}(\theta) \subset \mathfrak{B}$  es un ideal cofinito y cerrado. Además, en ambos casos el álgebra  $\mathfrak{B}$  tiene la siguiente propiedad: todo ideal bilateral cerrado y cofinito  $I \subset \mathfrak{B}$  tiene una identidad aproximada izquierda de norma acotada.

Esta propiedad que acabamos de mencionar es probada directamente en el primer caso [5, Theorem A.3] y se sigue de la combinación de [6, Proposition VII.2.31] con el hecho de que  $\ell_\alpha^1(\mathbb{G}, \mathfrak{A})$  es promediable [7, Proposition IV.4.2] en el segundo.

Dicho esto, podemos repetir parte del argumento en [5, Theorem 3.6] para concluir la demostración. En efecto, debido al teorema de factorización de Cohen-Hewitt [1, Corollary 11.12], para cada secuencia  $\{b_n\} \subset \mathcal{I}(\theta)$  que converge a cero, existen  $c, d_n \in \mathcal{I}(\theta)$  que factorizan a  $b_n$ :

$$b_n = cd_n \quad \text{y} \quad \lim_n d_n = 0.$$

Como la función  $\mathfrak{B} \ni d \mapsto \theta(cd)$  es continua por la definición de  $\mathcal{I}(\theta)$ , tenemos

$$\lim_n \theta(b_n) = \lim_n \theta(cd_n) = 0$$

y, por lo tanto, la restricción de  $\theta$  a  $\mathcal{I}(\theta)$  es continua. Dado que  $\mathcal{I}(\theta)$  tiene codimensión finita,  $\theta$  es de hecho continua en todo  $\mathfrak{B}$ .  $\square$

Ahora nos limitaremos al estudio de (algunos) operadores de entrelazamiento con imágenes de dimensión finita, lo que nos dará más flexibilidad en las hipótesis impuestas sobre la acción torcida. Dales y Willis demostraron el siguiente teorema en [4, Theorem 2.5] y será nuestra principal motivación para lo que sigue.

**Teorema 2.7** (Dales-Willis). *Sea  $\mathfrak{B}$  un álgebra de Banach tal que  $\mathfrak{B}/I$  es semisimple para cada ideal bilateral cerrado y cofinito  $I \subset \mathfrak{B}$ . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) *Cada homomorfismo de  $\mathfrak{B}$  con imagen finito-dimensional es continuo.*
- (ii) *Cada derivación en un  $\mathfrak{B}$ -bimódulo de Banach de dimensión finita es continua.*
- (iii) *Cada ideal bilateral cofinito de  $\mathfrak{B}$  es cerrado.*
- (iv)  *$I^2$  es cerrado y cofinito, para cada ideal bilateral cerrado y cofinito  $I \subset \mathfrak{B}$ .*

Por lo tanto, una aplicación del Teorema 1.5 produce la siguiente proposición.

**Proposición 2.8.** *Sea  $(\mathbb{G}, \alpha, \omega, \mathfrak{A})$  una acción torcida. Entonces, todas las condiciones en el Teorema 2.7 son equivalentes para  $L_{\alpha, \omega}^1(\mathbb{G}, \mathfrak{A})$ .*

En particular, obtenemos muchas clases de ejemplos para este fenómeno de dimensión finita. Los recopilamos en el siguiente corolario. Como veremos, en este contexto se pueden extender en gran medida los resultados del artículo [5] (*cf.* [5, Corollary 4.21]).

**Corolario 2.9.** *Sea  $\mathfrak{B}$  una de las siguientes álgebras:*

- (i)  $L^1_\omega(\mathbb{G})$ , para un grupo promediable  $\mathbb{G}$  y un 2-cociclo  $\omega : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C}$ .
- (ii)  $\ell^1_\alpha(\mathbb{G}, \mathfrak{A})$ , para una acción (no torcida)  $(\mathbb{G}, \alpha, \mathfrak{A})$  donde  $\mathbb{G}$  es discreto y promediable y  $\mathfrak{A}$  es una  $C^*$ -álgebra promediable (=nuclear).

*Entonces  $\mathfrak{B}$  satisface todas las condiciones del Teorema 2.7.*

*Demostración.* Verificamos la condición (iv) del Teorema 2.7. Tal como en la demostración del Corolario 2.6, vemos que todo ideal bilateral cerrado y cofinito  $I \subset \mathfrak{B}$  tiene una identidad aproximada izquierda de norma acotada. En este caso,  $I = I^2$  también se deduce del teorema de factorización de Cohen-Hewitt.  $\square$

## Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por el proyecto DMS-2144739 de la NSF. El autor agradece encarecidamente al profesor Ben Hayes por todas las interesantes discusiones que giraron en torno a este tópico. El autor también está agradecido con Diego Jauré, Moria Labraña y los evaluadores por sus útiles comentarios sobre versiones anteriores del artículo.

## Referencias

- [1] F. F. Bonsall y J. Duncan, *Complete normed algebras*, ser. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973, vol. 80.
- [2] H. G. Dales, “Automatic continuity: a survey,” *Bull. London Math. Soc.*, vol. 10, no. 2, pp. 129–183, 1978, doi: 10.1112/blms/10.2.129.
- [3] H. G. Dales, *Banach algebras and automatic continuity*, ser. London Mathematical Society Monographs. New Series. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000, vol. 24, Oxford Science Publications.
- [4] H. G. Dales y G. A. Willis, “Cofinite ideals in Banach algebras, and finite-dimensional representations of group algebras,” in *Radical Banach algebras and automatic continuity (Long Beach, Calif., 1981)*, ser. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin-New York, 1983, vol. 975, pp. 397–407.
- [5] F. I. Flores, “On the continuity of intertwining operators over generalized convolution algebras,” *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 542, no. 1, 2025, Art. ID 128753, doi: 10.1016/j.jmaa.2024.128753.
- [6] A. Y. Helemskii, *The homology of Banach and topological algebras*, ser. Mathematics and its Applications (Soviet Series). Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989, vol. 41, doi: 10.1007/978-94-009-2354-6.
- [7] K. K. Jensen, “Foundations of an equivariant cohomology theory for Banach algebras. II,” *Adv. Math.*, vol. 147, no. 2, pp. 173–259, 1999, doi: 10.1006/aima.1999.1838.
- [8] N. P. Jewell, “Continuity of module and higher derivations,” *Pacific J. Math.*, vol. 68, no. 1, pp. 91–98, 1977.
- [9] G. Pisier, “Are unitarizable groups amenable?” in *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects*, ser. Progr. Math. Birkhäuser, Basel, 2005, vol. 248, pp. 323–362, doi: 10.1007/3-7643-7447-0\_8.
- [10] V. Runde, “Homomorphisms from  $L^1(G)$  for  $G \in [FIA]^- \cup [\text{Moore}]$ ,” *J. Funct. Anal.*, vol. 122, no. 1, pp. 25–51, 1994, doi: 10.1006/jfan.1994.1060.
- [11] V. Runde, “Intertwining operators over  $L^1(G)$  for  $G \in [\text{PG}] \cap [\text{SIN}]$ ,” *Math. Z.*, vol. 221, no. 3, pp. 495–506, 1996, doi: 10.1007/PL00004255.
- [12] G. A. Willis, “Derivations from group algebras, factorization in cofinite ideals and topologies on  $B(X)$ ,” Ph.D. dissertation, Newcastle upon Tyne, 1980.

- [13] G. Willis, “The continuity of derivations from group algebras: factorizable and connected groups,” *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, vol. 52, no. 2, pp. 185–204, 1992.



## Deformaciones de variedades abelianas con un grupo de automorfismos

U. GUERRERO-VALADEZ<sup>1</sup> 

H. TORRES-LÓPEZ<sup>2</sup> 

A. G. ZAMORA<sup>3,✉</sup> 

<sup>1</sup> *U. A. Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas, Calzada Solidaridad entronque Paseo a la Bufa, C.P. 98000, Zacatecas, Zac. México.*  
*uriel.gua52@gmail.com*

<sup>2</sup> *Secihti - U. A. Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas, Calzada Solidaridad entronque Paseo a la Bufa, C.P. 98000, Zacatecas, Zac. México.*  
*hugo@cimat.mx*

<sup>3</sup> *U. A. Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas, Calzada Solidaridad entronque Paseo a la Bufa, C.P. 98000, Zacatecas, Zac. México.*  
*alexiszamora@uaz.edu.mx*

### RESUMEN

Dada una variedad abeliana polarizada con un grupo de automorfismos  $G$ , demostramos que el functor de moduli local asociado es pro-representable; el álgebra que lo pro-representa es formalmente suave y calculamos la dimensión de esta álgebra en función de la acción analítica del grupo. Presentamos los cálculos explícitos del caso de la acción del grupo simétrico  $S_3$  sobre los factores del producto  $E \times E \times E$  de una curva elíptica.

**Palabras clave:** Moduli de variedades abelianas polarizadas, grupos de automorfismos, deformaciones locales.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 14B12, 14D15, 14D22, 14K04, 14K10.

Publicado: 15 de octubre de 2025

Aceptado: 22 de septiembre de 2025

Recibido: 30 de noviembre de 2024



©2025 U. Guerrero-Valadez *et al.* Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

## Deformations of abelian varieties with an automorphism group

U. GUERRERO-VALADEZ<sup>1</sup> 

H. TORRES-LÓPEZ<sup>2</sup> 

A. G. ZAMORA<sup>3,✉</sup> 

<sup>1</sup> *U. A. Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas, Calzada Solidaridad entronque Paseo a la Bufa, C.P. 98000, Zacatecas, Zac. México.  
uriel.gua52@gmail.com*

<sup>2</sup> *Secihti - U. A. Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas, Calzada Solidaridad entronque Paseo a la Bufa, C.P. 98000, Zacatecas, Zac. México.  
hugo@cimat.mx*

<sup>3</sup> *U. A. Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas, Calzada Solidaridad entronque Paseo a la Bufa, C.P. 98000, Zacatecas, Zac. México.  
alexiszamora@uaz.edu.mx*

### ABSTRACT

Given a polarized abelian variety with an automorphism group  $G$ , we prove that the associated local moduli functor is pro-representable, the algebra that pro-represents it is formally smooth, and compute the dimension of this algebra as a function of the analytic action of the group. We present the explicit computations in the case of the action of the symmetric group  $S_3$  on the factors of the product  $E \times E \times E$  of an elliptic curve.

**Keywords and Phrases:** Moduli of polarized abelian varieties, automorphism group, local deformations.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 14B12, 14D15, 14D22, 14K04, 14K10.

Published: 15 October, 2025

Accepted: 22 September, 2025

Received: 30 November, 2024



©2025 U. Guerrero-Valadez *et al.* This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

## 1. Introducción

El objetivo del presente artículo es demostrar la existencia del moduli local de variedades abelianas polarizadas que admiten un grupo de automorfismos distinto a  $\{\pm 1\}$ . Es bien sabido que estas variedades coinciden con el locus singular del espacio de moduli  $\mathcal{A}_g$ , que parametriza variedades abelianas con un tipo de polarización fija (véase, por ejemplo, [20]).

En [8, 10] los autores trataron este problema en el caso particular en que el grupo de automorfismo considerado es  $\mathbb{Z}_p$ , con  $p$  un número primo. Esto era suficiente para su objetivo principal: el estudio de las componentes irreducibles del lugar singular de  $\mathcal{A}_g$  y las posibles inclusiones entre estas componentes. Ahora tratamos el problema para un grupo arbitrario  $G$ .

Hemos intentado mantener la discusión en un contexto tan general como sea posible. De este modo, trabajamos sobre un campo  $k$  algebraicamente cerrado, pero hasta donde sea posible evitamos cualquier hipótesis sobre la característica. Del mismo modo, no suponemos que la polarización de las variedades abelianas  $X$  consideradas sea principal y de hecho el teorema de pro-representabilidad es demostrado para casi-polarizaciones (el divisor asociado al morfismo  $X \rightarrow X^t$  no es necesariamente amplio).

El método utilizado es la teoría formal de deformaciones locales. La teoría de deformaciones fue creada en el contexto analítico por Kodaira y Spencer ([13]) y adaptada al caso algebraico por Grothendieck y su escuela (véase, por ejemplo, [11, exposición VI]). Esta teoría, altamente abstracta, requería algunas simplificaciones para aplicaciones prácticas. Una de estas simplificaciones fundamentales fue desarrollada por Schlessinger ([22]) quien demostró su famoso criterio de pro-representabilidad (véase Teorema 2.6 en la sección 2).

Afortunadamente, en la actualidad existen tratamientos sistemáticos sobre la teoría algebraica de deformaciones, como [6, 12] o [23]. Este artículo está fuertemente basado en [8, 10] y los trabajos pioneros de Frans Oort ([19, 20]).

Los resultados de [8] y [10] han sido utilizados para estudiar algunas propiedades del lugar singular de  $\mathcal{A}_g$ . Por ejemplo, en [9] para dar una reinterpretación de los resultados de [3] y en [2] para el estudio del número de polarizaciones principales de una variedad abeliana con grupo de automorfismos no trivial.

Fundamentar de un modo preciso y tan general como sea posible la existencia del moduli local de variedades abelianas polarizadas con automorfismos ayudará a obtener resultados más profundos sobre los puntos singulares del moduli de variedades abelianas polarizadas. Este estudio debe ser continuado con la comprobación de que este moduli formal es algebrizable.

La combinación de estos resultados permitirá seguramente arrojar una nueva luz sobre los ejemplos y problemas tratados en estudios más recientes como los presentados en [5, 14, 15, 21] y [24].

La motivación principal de los autores es aún la determinación completa de las componentes irreducibles del lugar singular de  $\mathcal{A}_g$ .

En la sección 2 introducimos los conceptos básicos de la teoría local de deformaciones y los funtores de deformación asociados a variedades abelianas y variedades abelianas polarizadas. En la sección 3 demostramos el teorema de pro-representabilidad y damos una fórmula explícita para calcular la dimensión del moduli local. El artículo termina con los cálculos de dimensión en el ejemplo del producto de curvas elípticas  $E \times E \times E$ , donde el grupo simétrico  $S_3$  actúa por permutación de los factores.

Las referencias básicas para los fundamentos de la teoría de variedades abelianas son [4] y [18].

Queremos agradecer a los árbitros anónimos que ayudaron, con sus comentarios, a mejorar la presentación de este artículo.

## 2. Preliminares

### 2.1. Funtores de deformación local

Sea  $k$  un campo algebraicamente cerrado; denotamos por  $Art/k$  la categoría de  $k$ -álgebras artinianas locales  $R$ , con campo residual  $k$ .

**Definición 2.1** (Funtor de deformación, [6, Definición 6.1.4]). *Sea  $D : Art/k \rightarrow Sets$  un funtor. Decimos que  $D$  es de deformación si  $D$  es covariante y  $D(k)$  es un conjunto con un solo elemento.*

Recordemos que dada cualquier categoría  $\mathcal{C}$  y  $X \in \mathcal{C}$ , podemos definir un funtor covariante:

$$h_X : \mathcal{C} \rightarrow Sets,$$

mediante:

- (i) para cada  $Y \in \mathcal{C}$ ,  $h_X(Y) = Mor(X, Y)$
- (ii) a cada morfismo  $\varphi_0 : Y \rightarrow Z$  en  $\mathcal{C}$ , asociamos el morfismo

$$h_X(\varphi_0) : Mor(X, Y) \rightarrow Mor(X, Z)$$

$$\phi \mapsto \varphi_0 \circ \phi$$

Un funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow Sets$ ,  $F$  se dice representable si existe un objeto  $X \in \mathcal{C}$  tal que para todo  $Y \in \mathcal{C}$ :

$$F(Y) = h_X(Y).$$

Sea  $CLoc/k$  la categoría de  $k$ -álgebras noetherianas locales completas  $R$  con campo residual  $k$ , notemos que  $R/m_R^n \in Art/k$  para cada  $n \geq 1$ .

**Definición 2.2** ([19, página 227]). *Un functor de deformación  $D$  se dice pro-representable si existe  $R \in CLoc/k$  tal que  $D$  es isomorfo a  $h_R$ . Diremos entonces que  $R$  pro-representa a  $D$ .*

Demostrar que un functor de deformaciones es pro-representable puede parecer a primera vista una tarea difícil. La idea para atacar este problema es comenzar con  $D(k)$  y a partir de ahí tratar de “levantar” el functor a  $D(R)$ , donde  $R \in Art/k$  tiene un ideal máximo  $m_R^n \neq 0$ , con  $n$  cada vez más grande.

Para esto son fundamentales los siguientes conceptos.

**Definición 2.3** ([19, página 229]). *Un epimorfismo  $\pi : R \rightarrow R'$  en  $Art/k$  se dice pequeño, si  $I := Ker(\pi)$  satisface  $I \cdot m_R = 0$ .*

**Definición 2.4** ([19, página 228]). *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con objeto final  $\emptyset$  y productos fibrados. Un functor covariante  $F : \mathcal{C} \rightarrow Sets$  es llamado exacto por la izquierda si*

- (i)  $F(\emptyset) = \{pt\}$ ,
- (ii)  $F$  conmuta con productos fibrados, esto es, el morfismo natural

$$F(X \times_Y Z) \xrightarrow{\sim} F(X) \times_{F(Y)} F(Z)$$

es biyectivo.

**Definición 2.5** ([19, página 229]). *Un functor  $F : Art/k \rightarrow Sets$  se dice formalmente suave si para todo epimorfismo  $\pi : R \rightarrow R' \rightarrow 0$  en  $Art/k$ ,  $F(\pi) : F(R) \rightarrow F(R')$  es sobreyectivo.*

La teoría de funtores pro-representables fue desarrollada inicialmente por A. Grothendieck en [11]. En 1968 Schlessinger ([22]) estableció un criterio que permite verificar efectivamente que un functor es pro-representable (véase también [19, Theorem 2.1.1]).

**Teorema 2.6** (Criterio de Schlessinger). *Un functor covariante  $F : Art/k \rightarrow Sets$  es pro-representable si y sólo si  $F$  es exacto por la izquierda y*

$$\dim_k(F(k[\epsilon])) < \infty.$$

*Además, es suficiente verificar la exactitud por la izquierda para morfismos  $R_1 \rightarrow R_2 \leftarrow R_3$  en  $Art/k$ , cuando la primera flecha es un epimorfismo pequeño. Si  $F$  es pro-representable por  $\mathcal{O} \in CLoc/k$ , es formalmente suave, y  $\dim_k(F(k[\epsilon])) = m$ , entonces existe un isomorfismo*

$$\mathcal{O} \cong k[[t_1, \dots, t_m]].$$

## 2.2. Funtores de deformación asociados a variedades abelianas

En esta sección presentamos un breve resumen del artículo [19]. Todas las definiciones y enunciados pueden ser encontrados en esta fuente.

**Definición 2.7.** *Sea  $X_0$  una variedad abeliana sobre  $k$ . El funtor de moduli local de  $X_0$ :*

$$M : Art/k \rightarrow Sets,$$

se define como:

$$M(R) := \left\{ \begin{array}{l} \text{clases de equivalencia } (X, \varphi) \\ \left| \begin{array}{l} X \text{ es un esquema abeliano } /R, \\ \varphi : X \otimes_R k \xrightarrow{\sim} X_0 \end{array} \right. \end{array} \right\},$$

módulo la relación de equivalencia  $(X, \varphi) \sim (X', \varphi')$  si existe un morfismo

$$\begin{array}{ccc} \Phi : X & \xrightarrow{\cong} & X' \\ & \searrow & \swarrow \\ & Spec R & \end{array}$$

tal que  $\Phi \otimes_R k = id$ .

Si  $R \rightarrow R'$  es un morfismo en  $Art/k$ ,  $M(R) \rightarrow M(R')$  se define por cambio de base.

Oort, siguiendo argumentos de Grothendieck, mostró que  $M$  es un funtor pro-representable.

**Teorema 2.8** ([19, Teorema 2.2.1]). *El funtor  $M$  es pro-representable por  $\mathcal{O} = k[[t_{i,j}]]_{1 \leq i,j \leq g}$ , donde  $g = \dim(X_0)$ .*

El siguiente paso es estudiar variedades abelianas polarizadas (o casi-polarizadas).

Sea  $L$  un haz lineal sobre un esquema abeliano  $\pi : X \rightarrow S$ , y sea  $\mu : X \times_S X \rightarrow X$  la multiplicación de grupo. Como  $\text{Pic}(X/S)$  es un moduli fino, el haz

$$\mu^*(L) \otimes p_1^*(L) \otimes p_2^*(L)$$

sobre  $X \times_S X$  define un homomorfismo

$$\Lambda(L) : X \rightarrow \text{Pic}^0(X/S) = X^t.$$

**Definición 2.9.** Sea  $R \in \text{Art}/k$  y  $\pi : X \rightarrow \text{Spec } R$  un esquema abeliano. Un homomorfismo  $\lambda : X \rightarrow X^t$  es llamado casi polarización si existe un haz lineal  $L \in \text{Pic}(X)$  tal que  $\Lambda(L) = \lambda$ . Si además  $L$  es relativamente amplio con respecto a  $\pi$ , decimos que  $\lambda$  es una polarización. A una pareja  $(X, \lambda)$  con  $\lambda$  una (casi)polarización se le llama variedad abeliana (casi)polarizada.

También escribimos  $(X, L)$  en lugar de  $(X, \lambda)$  si  $\lambda$  es la (casi)polarización definida por  $L$  o incluso si  $L = \mathcal{O}_X(\Theta)$ , escribimos  $(X, \Theta)$  en lugar de  $(X, \lambda)$ . En el caso  $R = k$  decimos que la pareja  $(X, \lambda)$  es una variedad abeliana (casi)polarizada. Abreviamos diciendo que la pareja  $(X, \lambda)$  es un e.a.c.p. (esquema abeliano casi polarizado) o e.a.p. (esquema abeliano polarizado) y del mismo modo para variedades abelianas (v.a.c.p. o v.a.p.)

**Definición 2.10.** Sea  $(X_0, \Theta_0)$  una v.a.c.p. y  $\Lambda(\Theta) = \lambda_{\Theta_0} \in \text{Hom}(X_0, X_0^t)$  la casi polarización asociada. El funtor de moduli local de  $(X_0, \Theta_0)$

$$P : \text{Art}/k \rightarrow \text{Sets}$$

se define como:

$$P(R) := \left\{ \begin{array}{l} \text{clases de equivalencia } (X, \varphi, \Theta) \\ \left| \begin{array}{l} X \text{ es un e.a.c.p. } /R, \\ \varphi : X \otimes_R k \xrightarrow{\sim} X_0, \\ \lambda_{\Theta} \otimes_R k = \lambda_{\Theta_0} \end{array} \right. \end{array} \right\},$$

donde  $(X, \varphi, \Theta) \sim (X', \varphi', \Theta')$  si  $(X, \varphi) \sim (X', \varphi')$  como elementos de  $M(R)$  (vea Definición 2.7) y el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & X' \\ \lambda_{\Theta} \downarrow & & \downarrow \lambda_{\Theta'} \\ X^t & \xleftarrow[\Phi^t]{} & X'^t \end{array}$$

comuta. Si  $R \rightarrow R'$  es un morfismo en  $\text{Art}/k$ ,  $P(R) \rightarrow P(R')$  se define por cambio de base y levantamiento (“pull-back”) del divisor asociado a la casi-polarización.

Claramente existe un morfismo de olvido:

$$P \rightarrow M.$$

Sin embargo, no es claro que sea inyectivo, esto es, que  $P$  sea un subfuntor de  $M$ . Esta propiedad es importante, pues tenemos:

**Lema 2.11.** Sean  $P \subset M$  funtores pro-representables,  $M$  pro-representado por  $\mathcal{O}$ , entonces existe un ideal  $\alpha \subset \mathcal{O}$  tal que  $P$  es pro-representado por  $\mathcal{O}/\alpha$ .

El mecanismo apropiado para demostrar que  $P$  es un subfuntor de  $M$  es el lema de rigidez.

**Lema 2.12** (Lema de rigidez, [17, Corolario 6.2]). *Sea  $S$  un esquema,  $X$  un  $S$ -esquema y  $G$  un grupo esquema sobre  $S$ . Dado un diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & G \\ p \downarrow & \nearrow g & \\ S, & & \end{array}$$

*supongamos que  $p$  es plano y propio, y que  $\forall s \in S$ ,  $H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) \cong \kappa(s)$ . Si existe  $s \in S$ , tal que  $f_s = g_s$ , entonces existe una sección  $\eta: S \rightarrow G$  tal que*

$$f = (\eta \circ p) \cdot (g).$$

Utilizando el lema de rigidez y el criterio de Schlessinger (Teorema 2.6), Oort demostró en [19, Teorema 2.3.3, página 242] que  $P$  es un subfunctor pro-representable de  $M$ .

**Teorema 2.13.** *Si  $(X_0, \lambda_0)$  es una v.a.c.p. de dimensión  $g$ , entonces*

*(i) el functor  $P$  es un subfunctor de  $M$ ,*

*(ii)  $P$  es pro-representable; y si  $\lambda_0$  es una polarización separable y principal entonces  $P$  es pro-representado por:*

$$\mathcal{O}_P = k[[t_{ij}]]_{1 \leq i \leq j \leq g}$$

**Observación 2.14.** 1) Recordemos que una polarización se llama principal si el morfismo  $\lambda_0: X_0 \rightarrow X_0^t$  es un isomorfismo.

2) Si  $\lambda_0$  es separable y principal tenemos, en concordancia con el Lema 2.11:

$$\mathcal{O}_P = \mathcal{O}/\langle t_{ij} - t_{ji} \rangle,$$

donde  $\mathcal{O} = k[[t_{ij}]]_{1 \leq i,j \leq g}$  es la  $k$ -álgebra completa que pro-representa a  $M$ .

### 3. El functor $P_G$

En esta sección adaptamos las definiciones y construcciones de la sección anterior al caso en que la variedad abeliana  $X_0$  admite un grupo de automorfismo no trivial como variedad (casi)polarizada.

**Definición 3.1.** Sea  $(X_0, \Theta_0)$  una variedad abeliana casi-polarizada y  $G_0$  un subgrupo de  $\text{Aut}(X_0, \Theta_0)$ . Definimos el functor de deformación

$$P_{G_0} : \text{Art}/k \rightarrow \text{Sets}$$

de la siguiente manera:

$$P_{G_0}(R) := \left\{ \begin{array}{l} \text{clases de equivalencia } (X, \varphi, \Theta, G) \\ \left| \begin{array}{l} X \text{ es un e.a.c.p. } /R, \\ \varphi : X \otimes_R k \xrightarrow{\sim} X_0 \\ \lambda_\Theta \otimes_R k = \lambda_{\Theta_0}, G \leq \text{Aut}(X, \Theta) \\ G \otimes_R k = G_0 \end{array} \right. \end{array} \right\},$$

donde  $G \otimes_R k := \{\alpha \otimes_R k \mid \alpha \in G\}$  y  $(X, \varphi, \Theta, G) \sim (X', \varphi', \Theta', G')$  si  $(X, \varphi, \Theta) \sim (X', \varphi', \Theta')$  como elementos de  $P(R)$  (vea Definición 2.10) y  $\Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1} \in G'$ , para todo  $\alpha \in G$ .

Si  $\varphi : R \rightarrow R'$  es un morfismo en  $\text{Art}/k$ , entonces  $P_{G_0}(\varphi) : P_{G_0}(R) \rightarrow P_{G_0}(R')$  envía  $(X, \varphi, \Theta, G)$  a  $(X \otimes_R R', \varphi', \Theta \otimes_R R', G \otimes_R R')$ , donde  $G \otimes_R R' := \{\alpha \otimes_R R' \mid \alpha \in G\}$  y  $\varphi'$  es la composición  $(X \otimes_R R') \otimes_{R'} k \xrightarrow{\varphi'} X \otimes_A k \cong X_0$ .

Con esta definición  $P_{G_0}$  resulta ser un functor de deformación y tenemos:

**Lema 3.2.**  $P_{G_0}$  es un subfunctor del functor  $P$  introducido en la Definición 2.10.

*Demostración.* Debemos ver que si

$$(X, \varphi, \Theta) \sim (X', \varphi', \Theta'),$$

entonces  $(X, \varphi, \Theta, G) \sim (X', \varphi', \Theta', G')$ . Sabemos que existe un isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \Phi : X & \xrightarrow{\cong} & X' \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Spec } R & \end{array}$$

que satisface las condiciones mencionadas en la definición de  $P$  (Definición 2.10). Así, basta comprobar que  $\Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1} \in G'$ , para todo  $\alpha \in G$ .

De la definición de  $P_{G_0}(R)$ , se sigue que  $G \otimes_R k = G_0 = G' \otimes_R k$ . Sea  $\alpha \in G$ , tenemos:

$$(\Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1}) \otimes_R k = \Phi \otimes_R k \circ \alpha \otimes_R k \circ \Phi^{-1} \otimes_R k = id \circ \alpha_0 \circ id = \alpha' \otimes_R k,$$

donde  $\alpha_0 \in G_0$ , y  $\alpha'$  es algún elemento en  $G'$ . Finalmente, por el lema de rigidez (vea Lema 2.12)

tenemos que

$$\Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1} = \alpha'.$$

□

El objetivo principal de este artículo es demostrar que  $P_{G_0}$  es un funtor pro-representable; para esto necesitamos utilizar varios resultados básicos de la teoría de deformaciones.

La idea principal de la teoría de deformaciones es, dado un epimorfismo pequeño

$$0 \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow R' \rightarrow 0$$

en la categoría  $Art/k$  y un diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X' & & , \\ \downarrow & & \\ \text{Spec } R' & \longrightarrow & \text{Spec } R \end{array}$$

determinar bajo qué condiciones existe  $X \rightarrow \text{Spec } R$  tal que  $X \otimes_R R' \simeq X'$ . Tal  $X$  se denomina, indistintamente, *deformación* o *levantamiento*.

De este modo, definimos:

$$\mathbb{L}(X'; R \rightarrow R') := \left\{ \begin{array}{l} \text{clases de equivalencia } (X, \phi') \\ \left| \begin{array}{l} X \text{ es suave}/S, \\ \phi' : X \otimes_S S' \xrightarrow{\sim} X' \end{array} \right. \end{array} \right\},$$

el conjunto de clases de equivalencia de levantamientos de  $X' \rightarrow S'$  a  $S$ , donde  $S = \text{Spec } R$  y  $S' = \text{Spec } R'$ .

En el caso afín, es decir, cuando  $X = \text{Spec } B$  y  $X' = \text{Spec } B'$ , el problema de existencia de otro levantamiento  $B_1 \rightarrow B'$  se traduce en completar el diagrama de  $k$ -álgebras:

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B' \\ \downarrow & \nearrow & \\ B_1 & & . \end{array}$$

Si la variedad afín  $X$  es no singular, siempre es posible encontrar tales levantamientos. Aún más, la diferencia de dos levantamientos es un elemento de  $\text{Der}_k(B', B) \otimes I$  (véase, por ejemplo, [16, capítulo 9], [12, capítulo 1.4], y [23, capítulo 1.1]). Esta es la razón por la cual en teoría de deformaciones el haz tangente  $\mathcal{T}_{X'}$  juega un papel esencial.

Al pasar al caso no afín debemos amalgamar (“gluing” en inglés) las diferentes deformaciones afines y es así como aparece, de manera natural,  $H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes I$ .

Al formalizar estas ideas obtenemos:

**Proposición 3.3.** *i) Si  $\mathbb{L} \neq \emptyset$ , entonces existe una biyección*

$$\mathbb{L}(X', R \rightarrow R') \simeq H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes I.$$

*ii) Un  $S'$ -automorfismo  $\rho' : X' \rightarrow X'$ , satisface que  $\rho_0 := \rho' \otimes k$  se levanta a un  $S$ -automorfismo  $\rho : X \rightarrow X$  si y sólo si al considerar la clase  $\eta \in H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes I$  determinada por  $(X \rightarrow S) \in \mathbb{L}(X', R' \rightarrow R)$  y el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes I & & \\ \downarrow d\rho_0 & & \\ H^1(X_0, \rho_0^* \mathcal{T}_{X_0}) \otimes I & \xleftarrow{\rho_0^*} & H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes I \end{array}$$

*se verifica que:*

$$d\rho_0(\eta) = \rho_0^*(\eta).$$

*iii) Sin tomar en cuenta la estructura de grupo de las variedades abelianas, existe una biyección:*

$$M(\pi)^{-1}(X', \varphi) \xrightarrow{\kappa} \mathbb{L}(X', R \rightarrow R'),$$

*para todo  $(X', \varphi) \in M(R')$ , donde  $M$  es el functor de la Definición 2.7.*

**Observación 3.4.** *1) En el inciso ii) de la Proposición 3.3, abusamos ligeramente de la notación al escribir, por ejemplo,  $d\rho_0$  en lugar de  $d\rho_0 \otimes id$ . Esta notación se mantendrá en lo que resta del artículo.*

- 2) La biyección del inciso iii) de la Proposición 3.3 es mucho más natural. Simplemente hay que recordar las definiciones involucradas.*
- 3) En la práctica la condición en el inciso ii) se verifica de la siguiente manera: si denotamos por  $\rho_0$  la representación analítica del automorfismo, entonces la condición de levantamiento se traduce en:*

$$T\rho_0 = (\rho_0^t)^{-1}T,$$

*con  $T = (t_{ij})_{1 \leq i \leq j}$  (véase la discusión que sigue a [20, Proposición 3.1]).*

La Proposición 3.3 es un paso previo para comprobar que el functor  $P_{G_0}$  satisface las condiciones de Schlessinger. La demostración se puede encontrar en [19, Lema 2.2.3, Proposiciones 2.2.5 y 2.2.6], y la del inciso ii) en [20, Proposición 3.1].

**Lema 3.5.** *Sea*

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\chi} & R \\ \downarrow \rho & & \downarrow \pi \\ T & \xrightarrow{\mu} & R' \end{array} \quad (3.1)$$

un diagrama cartesiano en la categoría  $\text{Art}/k$ , con  $\pi$  un epimorfismo pequeño. Sea  $((Y, \psi_0), (X, \varphi_0)) \in M(T) \times_{M(R')} M(R)$ , con  $(X', \varphi'_0) = \pi(X, \varphi_0)$ . Sea  $\alpha_Y$  un  $\text{Spec } T$ -automorfismo de  $Y$  y  $\alpha_X$  un  $\text{Spec } R$ -automorfismo de  $X$ , tal que  $\alpha_Y \otimes_T R' = \alpha_X \otimes_R R'$ . Sea  $(Z, \psi'_0)$  un levantamiento  $(Y, \psi_0)$  de  $T$  a  $Q$ , entonces existe  $\alpha_Z$ , un  $\text{Spec } Q$ -automorfismo de  $Z$  tal que  $\alpha_Z \otimes_Q T = \alpha_Y$ .

*Demostración.* Definimos  $I := \text{Ker}(\pi)$ ,  $J := \text{Ker}(\rho)$  y  $\alpha_0 := \alpha_Y \otimes_T k$ . Notemos que

$$\alpha_0 = (\alpha_Y \otimes_T R') \otimes_{R'} k = (\alpha_X \otimes_R R') \otimes_{R'} k = \alpha_X \otimes_R k.$$

Como  $\pi$  es un epimorfismo pequeño y el diagrama (3.1) es cartesiano, concluimos que  $\rho$  es un epimorfismo pequeño y que  $\chi$  induce un isomorfismo  $\chi : J \rightarrow I$ . Tenemos el siguiente diagrama comutativo (vea [19, página 237]):

$$\begin{array}{ccc} H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes_k J & \xrightarrow{\chi \cong} & H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes_k I \\ \cong \downarrow \iota_Z & & \downarrow \iota_{\chi(Z)} \\ \mathbb{L}(Y; Q \rightarrow T) & \longrightarrow & \mathbb{L}(X'; R \rightarrow R') \\ \downarrow \kappa^{-1} & & \downarrow \kappa^{-1} \\ M(Q) & \xrightarrow{\chi} & M(R), \end{array} \quad (3.2)$$

donde la flecha horizontal del medio está dada por cambio de base;  $\chi$  es  $M\chi$  y  $(Z, \psi'_0)$  es un levantamiento  $(Y, \psi_0)$  de  $T$  a  $Q$  (tal levantamiento existe, en virtud de [19], último párrafo de la página 236). De [19] sabemos que  $\chi(Z, \psi'_0) = (X, \varphi_0)$ .

Si denotamos la clase de levantamiento correspondiente a

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } R' & \longrightarrow & \text{Spec } R \end{array}$$

como  $\eta \in H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes_k I$  y la correspondiente a

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } T & \longrightarrow & \text{Spec } Q \end{array}$$

como  $\xi \in H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \otimes_k J$  (Proposición 3.3 i)), entonces por el diagrama (3.2) se deduce que  $\chi(\xi) = \eta$ . Notemos que  $\alpha_X$  es un levantamiento de  $\alpha_X \otimes_R R'$  y por Proposición 3.3 ii), sabemos que esto sucede si y sólo si

$$d\alpha_0(\eta) = \alpha_0^*(\eta).$$

Consideremos ahora el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} H^1(X_0, \Theta_{X_0}) \otimes J & \xrightarrow{d\alpha_0} & H^1(X_0, \alpha_0^* \Theta_{X_0}) \otimes J & \xleftarrow{\alpha_0^*} & H^1(X_0, \Theta_{X_0}) \otimes J \\ \cong \downarrow \chi & & \cong \downarrow \chi & & \cong \downarrow \chi \\ H^1(X_0, \Theta_{X_0}) \otimes I & \xrightarrow{d\alpha_0} & H^1(X_0, \alpha_0^* \Theta_{X_0}) \otimes I & \xleftarrow{\alpha_0^*} & H^1(X_0, \Theta_{X_0}) \otimes I \end{array} \quad (3.3)$$

De aquí se sigue que  $d\alpha_0(\xi) = \alpha_0^*(\xi)$ , y así obtenemos un levantamiento  $\alpha_Z$  de  $\alpha_Y$ .  $\square$

**Teorema 3.6.** *El functor  $P_{G_0}$  introducido en la Definición 3.1 es pro-representable.*

*Demuestra.* Usaremos la notación del Lema 3.5. Por el criterio de Schlessinger (Teorema 2.6) y el hecho de que  $P_{G_0}$  es un subfunctor de  $P$  (Lema 3.2), se sigue que  $P_{G_0}$  es pro-representable si la función

$$P_{G_0}(Q) \rightarrow P_{G_0}(T) \times_{P_{G_0}(R')} P_{G_0}(R)$$

es sobreyectiva. Esta función es la que se obtiene de aplicar  $P_{G_0}$  al diagrama cartesiano (3.1) y considerando la propiedad universal del producto cartesiano. Sea

$$((Y, \psi_0, \Theta_Y, G_Y), (X, \varphi_0, \Theta_X, G_X)) \in P_{G_0}(T) \times_{P_{G_0}(R')} P_{G_0}(R)$$

y

$$(X', \varphi'_0, \Theta_{X'}, G_{X'}) = P_{G_0}(\pi)(X, \varphi_0, \Theta_X, G_X).$$

Notemos que, en particular

$$((Y, \psi_0, \Theta_Y), (X, \varphi_0, \Theta_X)) \in P(T) \times_{P(R')} P(R).$$

Por Teorema 2.13 y el criterio de Schlessinger, Teorema 2.6, existe una pre-imagen  $(Z, \psi'_0, \Theta_Z) \in P(Q)$  de  $((Y, \psi_0, \Theta_Y), (X, \varphi_0, \Theta_X))$  bajo la aplicación

$$P(Q) \rightarrow P(T) \times_{P(R')} P(R).$$

En particular, tenemos que  $M\chi(Z, \psi'_0) = (X, \varphi_0)$ .

Sea  $\alpha_Y \in G_Y$  como  $G_Y \otimes_T R' = G_{X'} = G_X \otimes_R R'$ , existe un  $\alpha_X \in G_X$  tal que

$$\alpha_Y \otimes_T R' = \alpha_X \otimes_R R'.$$

Notemos que  $\alpha_X$  es único por el lema de rigidez.

Por el Lema 3.5 existe  $\alpha_Z : Z \rightarrow Z$  que es levantamiento de  $\alpha_Y$ . Además, por el lema de rigidez y [19, Lema 2.2.2, página 231] este resulta ser un automorfismo de  $Z$  como variedad abeliana casi-polarizada (una vez más este  $\alpha_Z$  es único por el lema de rigidez).

Concluimos que para todo  $\alpha_Y \in G_Y$  existe un único  $\alpha_Z$  tal que

$$\alpha_Z \otimes_Q T = \alpha_Y.$$

Definamos  $G_Z$  como el conjunto formado por los  $\alpha_Z$ . Veamos que  $G_Z$  es un grupo. Sean  $g, h \in G_Z$ , como el cambio de base es un funtor,

$$gh^{-1} \otimes_Q T = (g \otimes_Q T)(h \otimes_Q T)^{-1} \in G_Y,$$

entonces existe  $\beta \in G_Z$  tal que  $gh^{-1} \otimes_Q T = \beta \otimes_Q T$ , así por el lema de rigidez  $gh^{-1} = \beta \in G_Z$ .

Concluimos que  $G_Z$  es un subgrupo de  $\text{Aut}(Z)$  y  $G_Z \otimes_Q T = G_Y$ , lo que significa que

$$P_{G_0}\rho(Z, \psi'_0, \Theta_Z, G_Z) = (Y, \psi_0, \Theta_Y, G_Y).$$

Tenemos que

$$(G_Z \otimes_Q R) \otimes_R R' = (G_Z \otimes_Q T) \otimes_T R' = G_Y \otimes_T R' = G_{X'} = G_X \otimes_R R'.$$

Entonces, por el lema de rigidez,  $G_Z \otimes_Q R = G_X$ , lo que demuestra que

$$P_{G_0}\chi(Z, \psi'_0, \Theta_Z, G_Z) = (X, \varphi_0, \Theta_X, G_X).$$

□

Recordemos que un funtor  $F : \text{Art}/k \rightarrow \text{Sets}$  se dice *formalmente suave* si para cualquier epimorfismo  $\pi : R \rightarrow R'$  en  $\text{Art}/k$  la función

$$F(\pi) : F(R) \rightarrow F(R')$$

es sobreyectiva (Definición 2.5).

**Teorema 3.7.** *Sea  $(X_0, \Theta_0)$  una variedad abeliana polarizada, tal que el morfismo asociado a la polarización  $\Theta_0$ ,  $\lambda_0 : X_0 \rightarrow X_0^t$  es separable, y sea  $G_0 \leq \text{Aut}(X_0, \Theta_0)$ , entonces*

$$P_{G_0} : \text{Art}/k \rightarrow \text{Sets}$$

*es formalmente suave.*

*Demostración.* Sea  $R \xrightarrow{\pi} R'$  un epimorfismo en  $\text{Art}/k$  y  $(X', \varphi', \Theta', G') \in P_{G_0}(R')$ . Este epimorfismo puede descomponerse en una sucesión finita de epimorfismos pequeños de la siguiente forma:

$$R = R_0 \xrightarrow{\pi_1} R_1 \xrightarrow{\pi_2} \cdots \xrightarrow{\pi_n} R_n = R'.$$

Si aplicamos  $P_{G_0}$  obtenemos:

$$P_{G_0}(R = R_0) \xrightarrow{\pi_1} P_{G_0}(R_1) \xrightarrow{\pi_2} \cdots \xrightarrow{\pi_n} P_{G_0}(R_n = R'),$$

donde abusamos de la notación y entendemos que  $P_{G_0}(\pi_i) = \pi_i$ . Definimos  $\xi_n = (X', \varphi', \Theta', G') \in P_{G_0}(R')$ . Supongamos que para todo  $i$  existe  $\xi_{i-1} \in P_{G_0}(R_{i-1})$  tal que  $\pi_i(\xi_{i-1}) = \xi_i$ . Entonces

$$\pi(\xi_0) = \pi_n \circ \cdots \circ \pi_1(\xi_0) = \xi_n.$$

Así, es suficiente demostrar que todo epimorfismo pequeño  $I \rightarrow R \xrightarrow{\pi} R' \rightarrow 0$  en  $\text{Art}/k$ ,  $(X', \varphi', \Theta', G')$  tiene un levantamiento.

Sea  $\lambda' : X' \rightarrow X'^t$ , el morfismo inducido por  $\Theta'$ . Sabemos que  $P_{G_0}$  es un subfunctor de  $P$  y por tanto de  $M$ , y que  $(X', \varphi') \in M(R')$ . Como  $\lambda_{\Theta_0} : X_0 \rightarrow X_0^t$  es separable,  $P$  es formalmente suave por [19, Teorema 2.4.1]. Por lo tanto, existe  $(X, \varphi, \Theta) \in P(R)$  que levanta a  $(X', \varphi', \Theta')$ . En particular:

$$\pi(X, \varphi) = (X', \varphi') \in M(R').$$

Por la Proposición 3.3 iii) tenemos la siguiente biyección

$$\pi^{-1}(X', \varphi') \xrightarrow{\kappa} \mathbb{L}(X', R \rightarrow R').$$

Definamos  $(X, \psi) := \kappa(X, \varphi) \in \mathbb{L}(X', R \rightarrow R')$ . Como  $\mathbb{L}(X', R \rightarrow R') \neq \emptyset$ , por Proposición 3.3 ii),  $(X, \psi)$  induce la siguiente biyección

$$H^1(X_0, \mathcal{T}X_0) \otimes_k I \xrightarrow{\ell_X} \mathbb{L}(X', R \rightarrow R').$$

Definamos  $(X_1, \psi_1) := \ell_X(0)$ . Por [19, página 245], tenemos:

$$\delta_{X_1}(\Theta') = \delta_X(\Theta') + f \otimes id_I(\ell_X^{-1}(X_1, \psi_1)) = 0,$$

sea  $L_1$  el levantamiento de  $\Theta'$ , definamos  $(X_1, \varphi_1) = \kappa^{-1}(X_1, \psi_1)$ . Concluimos que  $(X', \varphi', \Theta')$  levanta a  $(X_1, \varphi_1, L_1)$ .

Notemos que para todo  $\alpha \in G_0$ ,

$$d\alpha(0) = \alpha^*(0),$$

así, existe  $G_1 \leq Aut(X_1, L_1)$  (automorfismos de variedad abeliana polarizada), tal que  $G_1 \otimes_R R' = G'$ . Se concluye que

$$P_{G_0}(\pi)(X_1, \varphi_1, L_1, G_1) = (X', \varphi', \Theta', G'). \quad \square$$

Recordemos que una variedad abeliana polarizada  $(X_0, \Theta_0)$  es principalmente polarizada si  $h^0(X_0, \Theta_0) = 1$ , o equivalentemente el morfismo  $\lambda_0$  inducido por  $\Theta_0$  es un isomorfismo (a partir de ahora se denotará como v.a.p.p.). Sea  $G_0 \leq Aut(X_0, \Theta_0)$  y denotemos por  $V = T_0 X$  el espacio tangente de  $X$  en el 0.

**Teorema 3.8.** *Sea  $(X_0, \Theta_0)$  una variedad abeliana polarizada, tal que  $\lambda_0 : X_0 \rightarrow X_0^t$  es separable y sea  $G_0 \leq Aut(X_0, \Theta_0)$ , entonces:*

i)  *$P_{G_0}$  es pro-representado por  $k[[t_1, \dots, t_m]]$ , donde  $m := \dim_k P_{G_0}(k[\epsilon])$ .*

ii) *Si además  $(X_0, \Theta_0)$  es principalmente polarizada, entonces*

$$m = \dim_k (\text{Sym}^2 T_0 X)^{G_0},$$

donde  $G_0$  actúa sobre  $\text{Sym}^2 T_0 X$  con la acción inducida por la representación analítica.

*Demostración.* La parte i) es consecuencia inmediata de los Teoremas 3.7 y 2.6.

Para la parte ii) comenzamos con la siguiente observación: como por hipótesis  $(X_0, \Theta_0)$  es principalmente polarizada, tenemos un isomorfismo de espacios vectoriales  $d\lambda_0 : V \rightarrow V^t$ . De este modo obtenemos:

$$V \otimes V \simeq V \otimes V^t \simeq \text{End}(V, V).$$

Así, podemos definir  $\Sigma \subset V \otimes V^t$ , como:

$$\Sigma := (id \otimes d\lambda_0)(\text{Sym}^2 V).$$

Si fijamos una base  $e_i$  de  $V$ , la correspondiente base  $d\lambda_0(e_i)$  de  $V^t$  y su base dual en  $V$ , entonces los elementos de  $\Sigma$  se corresponden en  $\text{End}(V, V)$  con matrices simétricas.

Oort demostró en [19, página 237] que

$$M(k[\epsilon]) \cong H^1(X_0, \mathcal{T}_{X_0}) \cong V \otimes V^t,$$

y que  $P(k[\epsilon]) = \Sigma \subseteq V \otimes V^t$ . De este modo,  $\eta \in \Sigma$  satisface que  $\eta \in P_{G_0}(k[\epsilon])$  si y sólo si podemos levantar  $G_0$  a  $k[\epsilon]$ . Por la Proposición 3.3 ii) esto sucede si y sólo si:

$$\forall \rho \in G_0, \quad \eta d\rho = (d\rho^t)^{-1} \eta.$$

Es decir,

$$\eta = d\rho^t \eta d\rho,$$

o equivalentemente,  $\eta \in (\Sigma)^{G_0}$ . Así concluimos que:

$$P_{G_0}(k[\epsilon]) = (\text{Sym}^2 V)^{G_0}.$$

□

Una vez establecido el Teorema 3.8, podemos calcular fórmulas explícitas para la dimensión del álgebra que pro-representa a  $P_{G_0}$ .

**Corolario 3.9.** *Si  $\text{char}(k) = 0$ , entonces  $P_{G_0}$  es pro-representado por  $k[[t_1, \dots, t_m]]$ , con*

$$m = \frac{1}{|G_0|} \sum_{g \in G_0} \chi_{\text{Sym}^2 V}(g) = \frac{1}{|G_0|} \sum_{g \in G_0} \frac{\chi_V^2(g) + \chi_V(g^2)}{2},$$

donde  $\chi_V$  y  $\chi_{\text{Sym}^2 V}$  son, respectivamente, los caracteres de las representaciones  $V$  y  $\text{Sym}^2 V$ .

*Demostración.* Consideremos una representación  $G_0 \rightarrow GL(V)$ .

Utilizando la Proposición 2.8 de [7] y que  $\text{char}(k) = 0$  obtenemos

$$\dim(V^{G_0}) = \frac{1}{|G_0|} \sum_{g \in G_0} \chi_V(g).$$

Como  $\text{char}(k) = 0$  y  $k$  es algebraicamente cerrado,  $g : V \rightarrow V$  admite una forma canónica de Jordan y todo  $g : V \rightarrow V$  es diagonalizable. Por esta razón podemos replicar la demostración de la Proposición 2.1 de [7] para deducir que

$$\chi_{\text{Sym}^2 V}(g) = \frac{\chi_V^2(g) + \chi_V(g^2)}{2}.$$

□

**Ejemplo 3.10.** *Sea  $E$  una curva elíptica suave. Consideremos la variedad abeliana  $X = E \times E \times E$ . Consideremos la acción del grupo simétrico  $S_3$  sobre  $X$  que permuta los factores. Denotemos  $\beta =$*

(123) y  $\alpha = (12)$ . La representación analítica de  $\beta$  es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

y la de  $\alpha$  es:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de  $\beta$  es  $P_\beta(\lambda) = \det(\beta - \lambda id) = 1 - \lambda^3$ , sus valores principales son  $1, \xi$  y  $\xi^2$ , donde  $\xi$  es una 3-raíz primitiva de la unidad; y sus vectores principales son  $v_1 := (1, 1, 1)$ ,  $v_2 := (1, \xi^2, \xi)$ , y  $v_3 := (1, \xi, \xi^2)$ . Como  $\alpha\beta^2 = \beta\alpha$ , tenemos que  $\alpha(v_1) = v_1$ ,  $\alpha(v_2) = \xi^2 v_3$  y  $\alpha(v_3) = \xi v_2$ .

Así, si fijamos en  $T_0 X$  la base que diagonaliza a  $\beta$ , tenemos que en esta base,  $\beta = \text{diag}(1, \xi, \xi^2)$  y

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi \\ 0 & \xi^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea  $T = (t_{ij})_{1 \leq i \leq j}$ . Las condiciones de levantamiento de la Proposición 3.3 ii) (Observación 3.4 iii) se traducen en:

$$T\beta = \beta^{-1}T, \quad T\alpha = \alpha^t T,$$

donde usamos que  $\beta^t = \beta$  y  $\alpha^{-1} = \alpha$ .

Estas dos ecuaciones dan como resultado:

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{23} \\ 0 & t_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Así obtenemos que  $\dim_k P_{S_3}(k[\epsilon]) = 2$ . Por supuesto, esta dimensión también puede ser calculada usando el Corolario 3.9.

De este modo, en el moduli local para esta acción existen más variedades que las inducidas por la deformación de la curva  $E$ .

Un árbitro anónimo ha sugerido una posible conexión entre este ejemplo y el concepto de trialidad (véase por ejemplo, [1]). Trataremos de explorar esta sugerencia en el futuro.

## Referencias

- [1] A. Antón-Sancho, “Triality and automorphisms of principal bundles moduli spaces,” *Adv. Geom.*, vol. 24, no. 3, pp. 421–435, 2024, doi: 10.1515/advgeom-2024-0013.
- [2] R. Auffarth, A. Carocca, y R. Rodríguez, “Counting polarizations on abelian varieties with group action,” 2024, *arXiv:2412.01676*.
- [3] H. Bennama y J. Bertin, “Remarques sur les variétés abéliennes avec un automorphisme d’ordre premier,” *Manuscripta Math.*, vol. 94, no. 4, pp. 409–425, 1997, doi: 10.1007/BF02677863.
- [4] C. Birkenhake y H. Lange, *Complex abelian varieties*, 2nd ed., ser. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 2004, vol. 302, doi: 10.1007/978-3-662-06307-1.
- [5] A. Carocca, S. Reyes-Carocca, y R. E. Rodríguez, “Abelian varieties and Riemann surfaces with generalized quaternion group action,” *J. Pure Appl. Algebra*, vol. 227, no. 11, 2023, Art. ID 107398, doi: 10.1016/j.jpaa.2023.107398.
- [6] B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S. L. Kleiman, N. Nitsure, y A. Vistoli, *Fundamental algebraic geometry*, ser. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005, vol. 123, doi: 10.1090/surv/123.
- [7] W. Fulton y J. Harris, *Representation theory*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991, vol. 129, doi: 10.1007/978-1-4612-0979-9.
- [8] V. Gonzalez-Aguilera, J. M. Muñoz Porras, y A. G. Zamora, “On the irreducible components of the singular locus of  $A_g$ ,” *J. Algebra*, vol. 240, no. 1, pp. 230–250, 2001, doi: 10.1006/jabr.2000.8707.
- [9] V. González-Aguilera, J. M. Muñoz Porras, y A. G. Zamora, “On the 0-dimensional irreducible components of the singular locus of  $\mathcal{A}_g$ ,” *Arch. Math. (Basel)*, vol. 84, no. 4, pp. 298–303, 2005, doi: 10.1007/s00013-004-1193-x.
- [10] V. González-Aguilera, J. M. Muñoz-Porras, y A. G. Zamora, “On the irreducible components of the singular locus of  $A_g$ . II,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 140, no. 2, pp. 479–492, 2012, doi: 10.1090/S0002-9939-2011-10933-X.
- [11] A. Grothendieck y J. P. Murre, *The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme*, ser. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, vol. 208.

- [12] R. Hartshorne, *Deformation theory*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2010, vol. 257, doi: 10.1007/978-1-4419-1596-2.
- [13] K. Kodaira y D. C. Spencer, “On deformations of complex analytic structures. I, II,” *Ann. of Math. (2)*, vol. 67, pp. 328–466, 1958, doi: 10.2307/1970009.
- [14] H. Lange, R. E. Rodríguez, y A. M. Rojas, “Polarizations on abelian subvarieties of principally polarized abelian varieties with dihedral group actions,” *Math. Z.*, vol. 276, no. 1-2, pp. 397–420, 2014, doi: 10.1007/s00209-013-1206-1.
- [15] D. Lee y C. Ray, “Automorphisms of abelian varieties and principal polarizations,” *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, vol. 71, no. 1, pp. 483–494, 2022, doi: 10.1007/s12215-020-00590-7.
- [16] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, ser. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1986, vol. 8.
- [17] D. Mumford, J. Fogarty, y F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, 3rd ed., ser. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2)*. Springer-Verlag, Berlin, 1994, vol. 34.
- [18] D. Mumford, *Abelian varieties*, ser. Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Oxford University Press, London, 1970, vol. 5.
- [19] F. Oort, “Finite group schemes, local moduli for abelian varieties, and lifting problems,” *Compositio Math.*, vol. 23, pp. 265–296, 1971.
- [20] F. Oort, “Singularities of coarse moduli schemes,” in *Séminaire d’Algèbre Paul Dubreil, 29ème année (Paris, 1975–1976)*, ser. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin-New York, 1977, vol. 586, pp. 61–76.
- [21] S. Reyes-Carocca y R. E. Rodríguez, “On the connectedness of the singular locus of the moduli space of principally polarized abelian varieties,” *Mosc. Math. J.*, vol. 18, no. 3, pp. 473–489, 2018, doi: 10.17323/1609-4514-2018-18-3-473-489.
- [22] M. Schlessinger, “Functors of Artin rings,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 130, pp. 208–222, 1968, doi: 10.2307/1994967.
- [23] E. Sernesi, *Deformations of algebraic schemes*, ser. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 2006, vol. 334.
- [24] T. K. Srivastava, “Lifting automorphisms on Abelian varieties as derived autoequivalences,” *Arch. Math. (Basel)*, vol. 116, no. 5, pp. 515–527, 2021, doi: 10.1007/s00013-020-01564-y.

# Análisis matemático de un problema inverso para un sistema de reacción-difusión originado en epidemiología

ANÍBAL CORONEL<sup>1,✉</sup> 

FERNANDO HUANCAS<sup>2</sup> 

ESPERANZA LOZADA<sup>1</sup> 

JORGE TORRES<sup>1</sup> 

<sup>1</sup> *GMA, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ciencias, Universidad del Bío-Bío, Campus Fernando May, Chillán, Chile.*  
*acoronel@ubiobio.cl✉*  
*elozada@ubiobio.cl*  
*jotorres@ubiobio.cl*

<sup>2</sup> *Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Naturales, Matemáticas y del Medio Ambiente, Universidad Tecnológica Metropolitana, Las Palmeras 3360, Ñuñoa-Santiago 7750000, Chile.*  
*fhuancas@utem.cl*

## RESUMEN

En este artículo centramos nuestro interés en el estudio de un problema inverso que surge en el modelamiento matemático de la transmisión de enfermedades infectocontagiosas. El modelo matemático viene dado por un problema con condiciones iniciales y en la frontera para un sistema de difusión-reacción. Mientras tanto, el problema inverso consiste en la determinación de las tasas de transmisión y de recuperación de la enfermedad, a partir de la medición observada de la solución del problema directo en un tiempo fijo. Las incógnitas del problema inverso aparecen en el modelo como coeficientes del término de reacción. Formulamos el problema inverso como un problema de optimización para un funcional de costo adecuado. Luego, se deduce la existencia de soluciones del problema inverso probando la existencia de un minimizador para el funcional de costo. Establecemos la unicidad del problema de identificación. La unicidad es una consecuencia de la condición necesaria de optimalidad de primer orden y una estabilidad de las incógnitas del problema inverso con respecto a las observaciones. Además se realiza una aproximación numérica y simulaciones para el problema inverso.

**Palabras clave:** Problema de identificación, problema de control, SIS, problema inverso.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 35B45, 35Q35, 76B03, 76D03.

Publicado: 15 de octubre de 2025

Aceptado: 29 de septiembre de 2025

Recibido: 30 de noviembre de 2024



©2025 A. Coronel *et al.* Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

# Mathematical analysis of an inverse problem for a reaction-diffusion system originated in epidemiology

ANÍBAL CORONEL<sup>1,✉</sup> 

FERNANDO HUANCAS<sup>2</sup> 

ESPERANZA LOZADA<sup>1</sup> 

JORGE TORRES<sup>1</sup> 

<sup>1</sup> *GMA, Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ciencias, Universidad del Bío-Bío, Campus Fernando May, Chillán, Chile.*

*acoronel@ubiobio.cl*

*elozada@ubiobio.cl*

*jotorres@ubiobio.cl*

<sup>2</sup> *Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Naturales, Matemáticas y del Medio Ambiente, Universidad Tecnológica Metropolitana, Las Palmeras 3360, Ñuñoa-Santiago 7750000, Chile.*

*fhuancas@utem.cl*

## ABSTRACT

In this article we focus our interest on the study of an inverse problem arising in the mathematical modeling of disease transmission. The mathematical model is given by an initial boundary value problem for a reaction diffusion system. Meanwhile, the inverse problem consists in the determination of the disease and recovery transmission rates from observed measurement of the direct problem solution at some fixed time. The unknowns of the inverse problem are coefficients of the reaction term. We formulate the inverse problem as an optimization problem for an appropriate cost functional. Then, the existence of solutions of the inverse problem is deduced by proving the existence of a minimizer for the cost functional. We establish the uniqueness of identification problem. The uniqueness is a consequence of the first order necessary optimality condition and a stability of the inverse problem unknowns with respect to the observations. Moreover, we develop a numerical approximation and simulations of the inverse problem.

**Keywords and Phrases:** Identification problem, control problem, SIS, inverse problem.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 35B45, 35Q35, 76B03, 76D03.

Published: 15 October, 2025

Accepted: 29 September, 2025

Received: 30 November, 2024



©2025 A. Coronel *et al.* This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

## 1. Introducción

El modelamiento matemático de la transmisión de enfermedades infectocontagiosas es un área de investigación activa de la biología matemática [1, 2, 4, 5, 16, 18, 19, 22, 26, 29, 31, 34, 35]. Particularmente para la aplicación de sistemas de reacción-difusión a sistemas originados en ecología y epidemiología señalamos los siguientes trabajos [6, 7, 17, 37]. En la actualidad, se utilizan varios enfoques para construir los modelos matemáticos en epidemiología matemática. A pesar de los diferentes tipos de tales modelos, y de manera análoga a los sistemas bioquímicos, podemos distinguir cinco pasos comunes en los procesos de modelamiento [9]: recopilación y análisis de datos e información experimentales sobre la enfermedad específica; selección de la teoría matemática que se utilizará en la formulación del modelo; el análisis matemático del buen planteamiento del modelo; la calibración o identificación de parámetros del modelo; y la validación y el refinamiento del modelo. Además, observamos que el modelamiento es un proceso cíclico en lugar de lineal: todas las suposiciones hechas en los pasos anteriores se reconsideran y refinan una vez finalizado el proceso de modelamiento. Podemos mejorar el modelo introduciendo nuevas hipótesis, diseñar nuevos experimentos, realizar predicciones y profundizar el análisis de cada paso. Así, en particular, nos interesa el análisis de calibración o identificación de parámetros del modelo. Para ser más precisos, el objetivo de este artículo es proporcionar un marco para resolver el problema inverso que surge en el paso de la calibración del modelo asumiendo que el modelo matemático es un problema con condiciones iniciales y en la frontera para un sistema de reacción-difusión.

Precisemos el modelo matemático o problema directo. Consideramos que el proceso de la enfermedad infecciosa se desarrolla en un dominio acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ) y que su dinámica se describe mediante un modelo de reacción-difusión SIS, donde la densidad de población de individuos susceptibles e infectados en el momento  $t$  y la ubicación  $\mathbf{x}$  están dados por  $S(\mathbf{x}, t)$  y por  $I(\mathbf{x}, t)$ , respectivamente. Se considera que la matriz de difusión es igual a la identidad. Suponemos que el proceso de infección se da por la interacción de individuos susceptibles e infectados el cual es modelado en el punto  $\mathbf{x}$  y tiempo  $t$  por la “ley potencial”  $\beta(\mathbf{x})S^m(\mathbf{x}, t)I^n(\mathbf{x}, t)$ , donde  $\beta$  es la tasa de transmisión de enfermedades y  $m, n \in ]0, 1[$  son algunos parámetros dados (fijos). El proceso de recuperación está representado por  $\gamma(\mathbf{x})I(\mathbf{x}, t)$  con  $\gamma$  la tasa de recuperación de la enfermedad. Por lo tanto, el problema directo se define de la siguiente manera: Dado el conjunto de funciones  $\{\beta, \gamma, S_0, I_0\}$  encuentre las funciones  $S$  y  $I$  que satisfagan el siguiente problema con condiciones iniciales y valores en la frontera

$$S_t - \Delta S = -\beta(\mathbf{x})S^m I^n + \gamma(\mathbf{x})I, \quad \text{en } Q_T := \Omega \times [0, T], \quad (1.1)$$

$$I_t - \Delta I = \beta(\mathbf{x})S^m I^n - \gamma(\mathbf{x})I, \quad \text{en } Q_T, \quad (1.2)$$

$$\nabla S \cdot \mathbf{n} = \nabla I \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma := \partial\Omega \times [0, T], \quad (1.3)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}), \quad \text{en } \Omega, \quad (1.4)$$

$$I(\mathbf{x}, 0) = I_0(\mathbf{x}), \quad \text{en } \Omega, \quad (1.5)$$

donde  $\partial\Omega$  es la la frontera de  $\Omega$  y  $\mathbf{n}$  es el vector unitario exterior a  $\partial\Omega$ . Las condiciones de contorno (1.3) y las funciones  $S_0$  y  $I_0$  modelan las condiciones iniciales. La suposición que  $\beta$  y  $\gamma$  son funciones que dependen de la posición espacial es utilizada en diversos trabajos, por ejemplo en [7,36,37]. Desde el punto de vista biológico es más natural asumir que estos coeficientes dependen de la variable temporal, tal como es considerado para el modelo de ecuaciones diferenciales ordinarias estocásticas originado en la dinámica de la influeza en [28]. Sin embargo, en el mejor de nuestro conocimiento no es aún utilizado en los modelos de reacción-difusión.

El problema inverso consiste en la determinación de las funciones de tasa  $\beta$  y  $\gamma$  en el modelo SIS (1.1)-(1.5), a partir de medidas observadas tanto de  $S$  como de  $I$  en tiempo  $t = T$ ; las cuales están dadas por las funciones  $S^{obs}$  e  $I^{obs}$ , definidas sobre  $\Omega$ , respectivamente. Entonces, podemos definir el problema inverso de la siguiente manera: Dado el conjunto de funciones  $\{S_0, I_0, S^{obs}, I^{obs}\}$  definidas en  $\Omega$ , encontrar las funciones  $\beta$  y  $\gamma$ , tales que las funciones  $S$  e  $I$  sean solución del problema (1.1)-(1.5) y satisfacen la condición final de sobreespecificación  $S(\mathbf{x}, T) = S^{obs}(\mathbf{x})$ ,  $I(\mathbf{x}, T) = I^{obs}(\mathbf{x})$  para  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Se observa que la igualdad se satisface solo en el caso que  $(S^{obs}, I^{obs})$  sean alcanzables para algún  $(\beta, \gamma)$ , siendo más esperable el caso en el cual  $(S, I)(\cdot, T)$  es lo más cercano posible a  $(S^{obs}, I^{obs})$ . De hecho, para precisar el análisis del problema inverso, consideramos una reformulación operativa, como el siguiente problema de optimización

$$\inf J(\beta, \gamma) \quad \text{sujeto a } (S_{\beta, \gamma}, I_{\beta, \gamma}) \text{ solución de (1.1)-(1.5)}, \quad (1.6)$$

donde

$$J(\beta, \gamma) := \frac{1}{2} \|(S, I)(\cdot, T) - (S^{obs}, I^{obs})\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{\delta}{2} \|\nabla(\beta, \gamma)\|_{L^2(\Omega)^2}^2, \quad \delta > 0, \quad (1.7)$$

es una función definida en el conjunto admisible

$$U_{ad}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega) \cap H^{\lceil d/2 \rceil + 1}(\Omega)^2, \quad (1.8)$$

$$\mathcal{A}(\Omega) = \left\{ (\beta, \gamma) \in C^\alpha(\overline{\Omega})^2 : \text{Ran}(\beta) \times \text{Ran}(\gamma) \subseteq [\underline{b}, \bar{b}] \times [\underline{r}, \bar{r}] \subset (0, \infty)^2 \right\}, \quad (1.9)$$

Aquí,  $H^m(\Omega)$  y  $C^\alpha(\overline{\Omega})$  denotan los espacios estándar de Sobolev y Hölder  $W^{m,2}(\Omega)$  y  $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ , respectivamente;  $L^2(\Omega)^2 = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , definiendo similarmente los otros espacios como  $H^{\lceil d/2 \rceil + 1}(\Omega)^2$  y  $C^\alpha(\overline{\Omega})^2$ ; y  $\text{Ran}(f)$  denotan el rango de la función  $f$ . La construcción de  $U_{ad}(\Omega)$  se desarrolló recientemente en [12] y también notamos que  $U_{ad}(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega)$  cuando  $d = 1$  coincidiendo con el conjunto admisible considerado por Xiang y Liu en [36], consulte tambien [11] para un caso más general.

El resultado principal de este trabajo son las condiciones para la teoría del buen planteamiento del problema inverso. Más precisamente, probamos el siguiente teorema:

**Teorema 1.1.** Consideremos  $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+^2$  (fijo) y definamos el subconjunto del conjunto admissible

$$\mathcal{U}_{\mathbf{c}}(\Omega) = \left\{ (\beta, \gamma) \in U_{ad}(\Omega) : \|\beta\|_{L^1(\Omega)} = c_1 \text{ y } \|\gamma\|_{L^1(\Omega)} = c_2 \right\}. \quad (1.10)$$

Considere que el conjunto abierto acotado y convexo  $\Omega$  es tal que  $\partial\Omega$  es de clase  $C^1$  y las condiciones iniciales  $S_0$  y  $I_0$  son funciones que pertenecen a  $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  y satisfacen las desigualdades

$$S_0(\mathbf{x}) \geq 0, \quad I_0(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \int_{\Omega} I_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} > 0, \quad S_0(\mathbf{x}) + I_0(\mathbf{x}) \geq \phi_0 > 0, \quad (1.11)$$

sobre  $\Omega$ , para alguna constante positiva  $\phi_0$ . Además, suponga que las funciones de observación  $S^{obs}$  y  $I^{obs}$  son funciones que pertenecen a  $L^2(\Omega)$ . Entonces, existe al menos una solución de (1.6) y existen  $\Theta \in \mathbb{R}^+$  tal que la solución de (1.6) es única (salvo una constante aditiva) en  $\mathcal{U}_{\mathbf{c}}(\Omega)$  para cualquier parámetro de regularización  $\delta > \Theta$ .

En términos generales para obtener la unicidad del problema de optimización juega un rol muy relevante, desde el punto de vista analítico y numérico, el término de regularización en la función de costo definida en (1.7). En otras palabras, sin este término es esperable que se pierda la unicidad, tal como se muestra en el Ejemplo 1 presentado en la Sección 4.1. En este punto se debe observar que una regularización natural es considerar  $\|(\beta, \gamma)\|_{L^2(\Omega)^2}^2$  en vez de  $\|\nabla(\beta, \gamma)\|_{L^2(\Omega)^2}^2$ . Sin embargo esto se descarta, debido a dos dificultades: no es claro como utilizarlo para el análisis matemático y debido a que en la práctica y en presencia de casos extremos puede converger a los coeficientes de norma  $L^2$  mínima y que no necesariamente resuelve el problema inverso. Sin embargo, tal como se presenta en el Ejemplo 2 (Ver Sección 4.2) se puede definir un término de regularización que incorpore la condición que  $(\beta, \gamma) \in \mathcal{U}_{\mathbf{c}}$  con  $\mathbf{c}$  fijo, tal como lo establece el Teorema 1.1. Una discusión general sobre otras formas de regularización se puede consultar en [21].

Por otro lado, recordamos que los problemas inversos en las ecuaciones de reacción-difusión y los sistemas se han abordado en la literatura de las últimas décadas, por ejemplo [8, 14, 15, 27, 30, 32, 36]. En [8] los autores estudian la identificación de  $q(x)$  en la ecuación  $u_t = \Delta u + q(x)u$  con condición de frontera de Dirichlet y a partir de los datos de medición finales  $u(x, T)$ . Ellos prueban la existencia de soluciones y desarrollan una solución del problema inverso utilizando un problema de optimización. Los autores de [15] consideran la reacción-difusión no lineal ecuación  $u_t = \Delta u + p(x)f(u)$  con  $f$  una función no lineal y estudian la identificación de  $p$ , obteniendo algunos resultados para la existencia y la unicidad local. Ahora, en [32] los autores estudian el problema inverso para un sistema de reacción-difusión con un término de reacción lineal y obtienen la existencia y unicidad local del problema inverso. Más recientemente, en [36] los autores han estudiado el caso unidimensional del problema inverso considerado en este trabajo. Obtienen un resultado para la existencia y unicidad local de la solución asumiendo que el proceso de infección está modelado por una función de transmisión dependiente de la frecuencia en lugar de la función de ley de potencia.

Ahora, los artículos [14, 27, 30] se centran en problemas inversos en sistemas epidémicos, pero son de un tipo diferente al considerado en este trabajo. Por tanto, el Teorema 1.1 es una extensión al caso multidimensional de los resultados unidimensional obtenidos en [36].

Desde otra perspectiva, se observa que el estudio de los problemas de control óptimo similares a los estudiados en este trabajo, y suponiendo que las condiciones iniciales y los coeficientes se encuentran en espacios de funciones con menor regularidad ha sido recientemente estudiado utilizando el formalismo de Dubovitskii–Milyutin [10, 13]. En consecuencia, es esperable que los resultados de este trabajo se puedan extender a espacios de Sobolev.

El resto del artículo está organizado en tres secciones. En la sección 2 presentamos algunos resultados para la solución directa del problema, introducimos el estado adjunto y las condiciones de optimalidad necesarias, y demostramos un resultado de estabilidad. En la sección 3 presentamos la demostración del Teorema 1.1. En la sección 4 se discute la aproximación numérica y se realizan simulaciones numéricas.

## 2. Preliminares

### 2.1. Solución del problema directo

El buen planteamiento del problema directo (1.1)-(1.5) viene dado por el siguiente resultado.

**Teorema 2.1.** *Considere que  $\Omega, S_0$  y  $I_0$  satisfacen las hipótesis del Teorema 1.1. Si  $(\beta, \gamma) \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \times C^\alpha(\bar{\Omega})$ , el problema con condiciones iniciales y en la frontera (1.1)-(1.5) admite una solución clásica positiva única  $(S, I)$ , tal que  $S$  y  $I$  pertenecen a  $C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$  y también  $S$  y  $I$  son acotadas uniformemente sobre  $\bar{Q}_T$ , para cualquier  $T \in \mathbb{R}^+$ .*

La existencia y la unicidad puede ser desarrollado por la teoría de Schauder para ecuaciones parabólicas [23–25]. Hay que aclarar que la noción de solución para ecuaciones parabólicas con coeficientes y condiciones iniciales en espacios de Hölder se entiende en un sentido generalizado. En tal sentido no se necesita las condiciones de compatibilidad de las condiciones iniciales y en la frontera que son necesarias para las soluciones en un contexto de espacios de funciones regulares, para mayores detalles consultar [23]. Mientras tanto, el comportamiento positivo de la solución es una consecuencia del principio máximo. En efecto, si denotamos por  $N$  la población total, es decir,  $N(\mathbf{x}, t) = S(\mathbf{x}, t) + I(\mathbf{x}, t)$ . Entonces, del sistema (1.1)-(1.5), podemos deducir que  $N$  satisface el siguiente problema con condiciones iniciales y en la frontera

$$\begin{aligned} N_t - \Delta N &= 0, & \text{en } Q_T, \\ \nabla N \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma, \\ N(\mathbf{x}, 0) &= S_0(\mathbf{x}) + I_0(\mathbf{x}), & \text{en } \Omega. \end{aligned}$$

Por el principio máximo de ecuaciones parabólicas y la hipótesis (1.11) tenemos que  $N(\mathbf{x}, t) \geq S_0(\mathbf{x}) + I_0(\mathbf{x}) \geq \phi_0 > 0$  sobre  $Q_T$ .

**Corolario 2.2.** *Considere que  $\Omega$ ,  $S_0$  e  $I_0$  satisfacen las hipótesis del Teorema 2.1. Si  $(\beta, \alpha) \in C^\alpha(\bar{\Omega}) \times C^\alpha(\bar{\Omega})$  y  $(S, I)$  es la solución del problema con condiciones iniciales y en la frontera (1.1)-(1.5), entonces las estimaciones  $0 < \mathbb{S}_m \leq S(\mathbf{x}, t) \leq \mathbb{S}_M$ , y  $0 < \mathbb{I}_m \leq I(\mathbf{x}, t) \leq \mathbb{I}_M$ , son válidos en  $\bar{Q}_T$ , para algunas constantes estrictamente positivas  $\mathbb{S}_m, \mathbb{S}_M, \mathbb{I}_m$ , e  $\mathbb{I}_M$ .*

## 2.2. Sistema adjunto

Consideremos que  $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$  es una solución del problema de control óptimo (1.6) y  $(\bar{S}, \bar{I})$  es la correspondiente solución de (1.1)-(1.5) con  $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$  en lugar de  $(\beta, \gamma)$ . Luego introducimos las variables adjuntas  $(p_1, p_2)$ , es decir, la solución del sistema adjunto que viene dada por el siguiente problema retrógrado con valores en la frontera

$$(p_1)_t + \Delta p_1 = m\bar{\beta}(\mathbf{x})\bar{S}^{m-1}\bar{I}^n(p_1 - p_2), \quad \text{en } Q_T, \quad (2.1)$$

$$(p_2)_t + \Delta p_2 = n\bar{\beta}(\mathbf{x})\bar{S}^m\bar{I}^{n-1}(p_1 - p_2) - \bar{\gamma}(\mathbf{x})(p_1 - p_2), \quad \text{en } Q_T, \quad (2.2)$$

$$\nabla p_1 \cdot \mathbf{n} = \nabla p_2 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.3)$$

$$p_1(\mathbf{x}, T) = \bar{S}(\mathbf{x}, T) - S^{obs}(\mathbf{x}), \quad \text{en } \Omega, \quad (2.4)$$

$$p_2(\mathbf{x}, T) = \bar{I}(\mathbf{x}, T) - I^{obs}(\mathbf{x}), \quad \text{en } \Omega. \quad (2.5)$$

La existencia de soluciones generalizadas (notar que  $(S^{obs}, I^{obs}) \in L^2(\Omega)^2$ ) para el sistema (2.1)-(2.5) puede ser desarrollado por argumentos similares a un resultado similar presentados en [3]. Ahora, para nuestro propósito, necesitamos algunas estimaciones a priori dadas en el siguiente resultado.

**Lema 2.3.** *Considere que  $\Omega, S_0, I_0, S^{obs}$  y  $I^{obs}$ , satisfacen las hipótesis del Teorema 1.1. Además, considere que  $(\bar{\beta}, \bar{\gamma}) \in U_{ad}$  es una solución de (1.6), y  $(\bar{S}, \bar{I})$  es una solución de (1.1)-(1.5) con  $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$  en lugar de  $(\beta, \gamma)$ . Entonces, la solución del sistema adjunto (2.1)-(2.5) satisface las siguientes estimaciones*

$$\|(p_1, p_2)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq C, \quad \|(p_1, p_2)(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)^2} \leq C, \quad (2.6)$$

$$\|\Delta(p_1, p_2)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^2} \leq C, \quad \|(p_1, p_2)(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)^2} \leq C, \quad (2.7)$$

para  $t \in [0, T]$  y una constante positiva genérica  $C$ .

*Demostración.* En términos generales, la demostración de este teorema se realiza en dos pasos principales: primero se transforma el sistema adjunto (2.1)-(2.5) en un problema de valores iniciales y en la frontera y luego aplicando estimaciones de energía. En efecto, consideremos el cambio de

variable  $\tau = T - t$  para  $t \in [0, T]$  y también considera la notación

$$w_i(\mathbf{x}, \tau) = p_i(\mathbf{x}, T - \tau), \quad i = 1, 2, \quad S^*(\mathbf{x}, \tau) = \bar{S}(\mathbf{x}, T - \tau), \quad I^*(\mathbf{x}, \tau) = \bar{I}(\mathbf{x}, T - \tau).$$

Entonces, el sistema adjunto (2.1)-(2.5) se puede reescribir de la siguiente manera

$$(w_1)_\tau - \Delta w_1 = -m\bar{\beta}(\mathbf{x})(S^*)^{m-1}(I^*)^n(w_1 - w_2), \quad \text{en } Q_T, \quad (2.8)$$

$$(w_2)_\tau - \Delta w_2 = -n\bar{\beta}(\mathbf{x})(S^*)^m(I^*)^{n-1}(w_1 - w_2) + \bar{\gamma}(\mathbf{x})(w_1 - w_2), \quad \text{en } Q_T, \quad (2.9)$$

$$\nabla w_1 \cdot \mathbf{n} = \nabla w_2 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.10)$$

$$w_1(\mathbf{x}, 0) = \bar{S}(\mathbf{x}, T) - S^{obs}(\mathbf{x}), \quad w_2(\mathbf{x}, 0) = \bar{I}(\mathbf{x}, T) - I^{obs}(\mathbf{x}), \quad \text{en } \Omega. \quad (2.11)$$

Ahora, aplicando estimaciones de energía obtenemos para  $w_i$  las cuales conducen a las desigualdades (2.6) y (2.7).

Para probar (2.6) procedemos como sigue. Multiplicamos (2.8) por  $w_1$  y (2.9) por  $w_2$ , integramos sobre  $\Omega$  y usamos las fórmulas de Green, para obtener

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (w_1)_\tau w_1 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nabla w_1)^2 \, d\mathbf{x} &= -m \int_{\Omega} \bar{\beta}(\mathbf{x})(S^*)^{m-1}(I^*)^n w_1^2 \, d\mathbf{x} \\ &\quad + m \int_{\Omega} \bar{\beta}(\mathbf{x})(S^*)^{m-1}(I^*)^n w_1 w_2 \, d\mathbf{x}, \\ \int_{\Omega} (w_2)_\tau w_2 \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nabla w_2)^2 \, d\mathbf{x} &= - \int_{\Omega} [n\bar{\beta}(\mathbf{x})(S^*)^m(I^*)^{n-1} - \bar{\gamma}(\mathbf{x})] w_1 w_2 \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega} [n\bar{\beta}(\mathbf{x})(S^*)^m(I^*)^{n-1} - \bar{\gamma}(\mathbf{x})] w_2^2 \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

respectivamente. Luego, sumando las igualdades, aplicando la desigualdad de Cauchy, reordenando algunos términos y aplicando el Corolario 2.2, podemos deducir la siguiente estimación

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left( \|(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right) + \|\nabla(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \hat{C} \left[ \|(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right]. \quad (2.12)$$

con

$$\hat{C} = \max \left\{ \frac{3\hat{C}_1 + \hat{C}_2}{2}, \frac{\hat{C}_1 + 3\hat{C}_2}{2} \right\}, \quad \hat{C}_1 = \bar{b} m \mathbb{S}_m^{m-1} \mathbb{I}_M^n, \quad \hat{C}_2 = \bar{b} n \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_n^{n-1} + \bar{r}. \quad (2.13)$$

La notación  $\bar{b}$  y  $\bar{r}$  es definida en (1.9). Entonces, de (2.12) y la desigualdad de Gronwall, obtenemos

$$\|(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \|(w_1, w_2)(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 e^{2\hat{C}T}, \quad (2.14)$$

lo que implica la primera estimación en (2.6). Ahora, de (2.12) y (2.14), tenemos que

$$\|\nabla(w_1, w_2)(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \hat{C} e^{2\hat{C}T} \|(w_1, w_2)(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)^2}^2.$$

Así, por la definición de la norma de  $H_0^1(\Omega)$  deducimos la segunda estimación en (2.6).

La demostración de (2.7) se realiza como sigue. Por otro lado, usando el hecho de que

$$\int_{\Omega} (w_i)_{\tau} \Delta w_i \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla[(w_i)_{\tau}] \cdot \nabla w_i \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} (w_i)_{\tau} \nabla(w_i) \cdot \mathbf{n} \, dS = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|w_i(\cdot, \tau)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

para  $i = 1, 2$ . Observamos que, al multiplicar (2.8) por  $\Delta w_1$ , multiplicando (2.9) por  $\Delta w_2$ , integrando en  $\Omega$ , y sumando los resultados, deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left( \| (w_1, w_2)(\cdot, \tau) \|_{H_0^1(\Omega)^2}^2 \right) + \| \Delta(w_1, w_2)(\cdot, \tau) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\ \leq \hat{C} \left[ \epsilon \| (w_1, w_2)(\cdot, \tau) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \| \Delta(w_1, w_2)(\cdot, \tau) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right], \end{aligned}$$

con  $\hat{C}$  definido sobre (2.13) y  $\epsilon > 0$  arbitrario. Entonces, tenemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left( \| (w_1, w_2)(\cdot, \tau) \|_{H_0^1(\Omega)^2}^2 \right) + \left( 1 - \frac{\hat{C}}{4\epsilon} \right) \| \Delta(w_1, w_2)(\cdot, \tau) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \epsilon \hat{C} \| (w_1, w_2)(\cdot, \tau) \|_{L^2(\Omega)^2}^2.$$

Ahora, seleccionando  $\epsilon > \hat{C}/4$  y usando la estimación (2.14) obtenemos

$$\| \Delta(w_1, w_2)(\cdot, \tau) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \frac{4\epsilon^2 \hat{C}}{4\epsilon - \hat{C}} e^{2\hat{C}\tau} \| (w_1, w_2)(\cdot, 0) \|_{L^2(\Omega)^2}^2,$$

lo que implica la primera desigualdad en (2.7). Ahora, de (2.6) y la primera estimación en (2.7), tenemos que  $p_1$  y  $p_2$  están acotados en la norma de  $H^2(\Omega)$ . Así, según el teorema de inclusión continua  $H^2(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ , deducimos la segunda desigualdad de (2.7).  $\square$

### 2.3. Condición necesaria de optimalidad de primer orden.

**Lema 2.4.** *Sean  $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$  la solución del problema de control óptimo (1.6) y  $(\bar{S}, \bar{I})$  la solución de (1.1)-(1.5) con  $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$  en lugar de  $(\beta, \gamma)$  y  $(p_1, p_2)$  la solución del sistema adjunto (2.1)-(2.5). Entonces, la desigualdad*

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left[ \left( \hat{\beta} - \bar{\beta} \right) \bar{S}^m \bar{I}^n - \left( \hat{\gamma} - \bar{\gamma} \right) \bar{I} \right] (p_2 - p_1) \, d\mathbf{x} \, dt \\ + \delta \int_{\Omega} \left[ \nabla \bar{\beta} \nabla \left( \hat{\beta} - \bar{\beta} \right) + \nabla \bar{\gamma} \nabla \left( \hat{\gamma} - \bar{\gamma} \right) \right] \, d\mathbf{x} \geq 0, \quad (2.15) \end{aligned}$$

es válida para todo  $(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) \in U_{ad}$ .

*Demostración.* La demostración se realiza utilizando los conceptos de diferenciabilidad en espacios de Banach y la ecuación de sensibilidad. Consideremos un par arbitrario  $(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) \in U_{ad}$  e introducimos

la notación

$$(\beta^\varepsilon, \gamma^\varepsilon) = (1 - \varepsilon)(\bar{\beta}, \bar{\gamma}) + \varepsilon(\hat{\beta}, \hat{\gamma}) \in U_{ad},$$

$$\begin{aligned} J_\varepsilon = J(\beta^\varepsilon, \gamma^\varepsilon) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( |S^\varepsilon(\mathbf{x}, t) - S^{obs}(\mathbf{x})|^2 + |I^\varepsilon(\mathbf{x}, t) - I^{obs}(\mathbf{x})|^2 \right) d\mathbf{x} \\ &\quad + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} \left( |\nabla \beta^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 + |\nabla \gamma^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 \right) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

donde  $(S^\varepsilon, I^\varepsilon)$  es la solución de (1.1)-(1.5) con  $(\beta^\varepsilon, \gamma^\varepsilon)$  en lugar de  $(\beta, \gamma)$ . Ahora, usando la hipótesis de que  $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$  es una solución óptima de (1.6) y tomando la derivada de Frechet de  $J_\varepsilon$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dJ_\varepsilon}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{\Omega} \left( |S^\varepsilon(\mathbf{x}, t) - S^{obs}(\mathbf{x})| \frac{\partial S^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + |I^\varepsilon(\mathbf{x}, t) - I^{obs}(\mathbf{x})| \frac{\partial I^\varepsilon}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) d\mathbf{x} \\ &\quad + \delta \int_{\Omega} \left[ \nabla \bar{\beta} \nabla (\hat{\beta} - \bar{\beta}) + \nabla \bar{\gamma} \nabla (\hat{\gamma} - \bar{\gamma}) \right] d\mathbf{x} \geq 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde  $\partial_\varepsilon S^\varepsilon$  y  $\partial_\varepsilon I^\varepsilon$  para  $\varepsilon = 0$  se calculan analizando las sensibilidades de las soluciones para (1.1)-(1.5) con respecto a las perturbaciones de  $(\beta, \gamma)$ .

De la definición de  $(S^\varepsilon, I^\varepsilon)$  y  $(\bar{S}, \bar{I})$  tenemos

$$(S^\varepsilon)_t - \Delta S^\varepsilon = -\beta^\varepsilon(\mathbf{x})(S^\varepsilon)^m(I^\varepsilon)^n + \gamma^\varepsilon(\mathbf{x})I^\varepsilon, \quad \text{en } Q_T, \quad (2.17)$$

$$(I^\varepsilon)_t - \Delta I^\varepsilon = \beta^\varepsilon(\mathbf{x})(S^\varepsilon)^m(I^\varepsilon)^n - \gamma^\varepsilon(\mathbf{x})I^\varepsilon, \quad \text{en } Q_T, \quad (2.18)$$

$$\nabla S^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = \nabla I^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.19)$$

$$S^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}), \quad I^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = I_0(\mathbf{x}), \quad \text{en } \Omega, \quad (2.20)$$

y

$$(\bar{S})_t - \Delta \bar{S} = -\bar{\beta}(\mathbf{x})(\bar{S})^m(\bar{I})^n + \bar{\gamma}(\mathbf{x})\bar{I}, \quad \text{en } Q_T, \quad (2.21)$$

$$(\bar{I})_t - \Delta \bar{I} = \bar{\beta}(\mathbf{x})(\bar{S})^m(\bar{I})^n - \bar{\gamma}(\mathbf{x})\bar{I}, \quad \text{en } Q_T, \quad (2.22)$$

$$\nabla \bar{S} \cdot \mathbf{n} = \nabla \bar{I} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.23)$$

$$\bar{S}(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}), \quad \bar{I}(\mathbf{x}, 0) = I_0(\mathbf{x}), \quad \text{en } \Omega. \quad (2.24)$$

Restando el sistema (2.21)-(2.24) del sistema (2.17)-(2.20), dividiendo por  $\varepsilon$  y usando la notación  $(z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon) = \varepsilon^{-1} (S^\varepsilon - \bar{S}, I^\varepsilon - \bar{I})$ , deducimos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} (z_1^\varepsilon)_t - \Delta z_1^\varepsilon &= -\beta^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{[(S^\varepsilon)^m - (\bar{S})^m]}{S^\varepsilon - \bar{S}} (I^\varepsilon)^n z_1^\varepsilon - \beta^\varepsilon(\mathbf{x}) (\bar{S})^m \frac{[(I^\varepsilon)^n - (\bar{I})^n]}{I^\varepsilon - \bar{I}} z_2^\varepsilon \\ &\quad - (\hat{\beta} - \bar{\beta})(\bar{S})^m(\bar{I})^n + \gamma^\varepsilon(\mathbf{x}) z_2^\varepsilon + (\hat{\gamma} - \bar{\gamma})\bar{I}, \end{aligned} \quad \text{en } Q_T, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} (z_2^\varepsilon)_t - \Delta z_2^\varepsilon &= \beta^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{[(S^\varepsilon)^m - (\bar{S})^m]}{S^\varepsilon - \bar{S}} (I^\varepsilon)^n z_1^\varepsilon + \beta^\varepsilon(\mathbf{x}) (\bar{S})^m \frac{[(I^\varepsilon)^n - (\bar{I})^n]}{I^\varepsilon - \bar{I}} z_2^\varepsilon \\ &\quad + (\hat{\beta} - \bar{\beta})(\bar{S})^m(\bar{I})^n - \gamma^\varepsilon(\mathbf{x}) z_2^\varepsilon - (\hat{\gamma} - \bar{\gamma})\bar{I}, \end{aligned} \quad \text{en } Q_T, \quad (2.26)$$

$$\nabla z_1^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = \nabla z_2^\varepsilon \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.27)$$

$$z_1^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = z_2^\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \text{en } \Omega. \quad (2.28)$$

Entonces, denotando por  $(z_1, z_2)$  el límite de  $(z_1^\varepsilon, z_2^\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de (2.25)-(2.28), deducimos

$$(z_1)_t - \Delta z_1 = -m\bar{\beta}(\mathbf{x})(\bar{S})^{m-1}(\bar{I})^n z_1 - n\bar{\beta}(\mathbf{x})(\bar{S})^m(\bar{I})^{n-1} z_2 - (\hat{\beta} - \bar{\beta})(\bar{S})^m(\bar{I})^n + \bar{\gamma}(\mathbf{x})z_2^\varepsilon + (\hat{\gamma} - \bar{\gamma})\bar{I}, \quad \text{en } Q_T, \quad (2.29)$$

$$(z_2)_t - \Delta z_2 = m\bar{\beta}(\mathbf{x})(\bar{S})^{m-1}(\bar{I})^n z_1 + n\bar{\beta}(\mathbf{x})(\bar{S})^m(\bar{I})^{n-1} z_2 + (\hat{\beta} - \bar{\beta})(\bar{S})^m(\bar{I})^n - \bar{\gamma}(\mathbf{x})z_1^\varepsilon - (\hat{\gamma} - \bar{\gamma})\bar{I}, \quad \text{en } Q_T, \quad (2.30)$$

$$\nabla z_1 \cdot \mathbf{n} = \nabla z_2 \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.31)$$

$$z_1(\mathbf{x}, 0) = z_2(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \text{en } \Omega. \quad (2.32)$$

Así, en (2.16) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dJ_\varepsilon}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{\Omega} \left( |S^\varepsilon(\cdot, t) - S^{obs}| z_1(\cdot, t) + |I^\varepsilon(\cdot, t) - I^{obs}| z_2(\cdot, t) \right) d\mathbf{x} \\ &\quad + \delta \int_{\Omega} \left[ \nabla \bar{\beta} \nabla (\hat{\beta} - \bar{\beta}) + \nabla \bar{\gamma} \nabla (\hat{\gamma} - \bar{\gamma}) \right] d\mathbf{x} \geq 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

cuando  $(z_1, z_2)$  es la solución de (2.29)-(2.32).

Por otro lado, de (2.1)-(2.2) y (2.29)-(2.30), deducimos

$$\frac{\partial}{\partial t}(p_1 z_1 + p_2 z_2) = p_1 \Delta z_1 + p_2 \Delta z_2 - z_1 \Delta p_1 - z_2 \Delta p_2 + (\hat{\beta} - \bar{\beta})\bar{S}^m \bar{I}^n (p_2 - p_1) - (\hat{\gamma} - \bar{\gamma})\bar{I}(p_2 - p_1),$$

lo cual implica

$$\iint_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t}(p_1 z_1 + p_2 z_2) d\mathbf{x} dt = \iint_{Q_T} \left[ (\hat{\beta} - \bar{\beta})\bar{S}^m \bar{I}^n - (\hat{\gamma} - \bar{\gamma})\bar{I} \right] (p_2 - p_1) d\mathbf{x} dt, \quad (2.34)$$

mediante integración sobre  $Q_T$ . Además, notamos que

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t}(p_1 z_1 + p_2 z_2) d\mathbf{x} dt &= \int_{\Omega} \left( p_1(\mathbf{x}, T) z_1(\mathbf{x}, T) + p_2(\mathbf{x}, T) z_2(\mathbf{x}, T) \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \left( |\bar{S}(\mathbf{x}, T) - S^{obs}(\mathbf{x})| z_1(\mathbf{x}, T) + |\bar{I}(\mathbf{x}, T) - I^{obs}(\mathbf{x})| z_2(\mathbf{x}, T) \right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Luego, de (2.34) y (2.35) deducimos que

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \left[ (\hat{\beta} - \bar{\beta})\bar{S}^m \bar{I}^n - (\hat{\gamma} - \bar{\gamma})\bar{I} \right] (p_2 - p_1) d\mathbf{x} dt \\ = \int_{\Omega} \left( |\bar{S}(\mathbf{x}, T) - S^{obs}(\mathbf{x})| z_1(\mathbf{x}, T) + |\bar{I}(\mathbf{x}, T) - I^{obs}(\mathbf{x})| z_2(\mathbf{x}, T) \right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Podemos concluir la demostración de (2.15) reemplazando (2.36) en el primer término de (2.33).  $\square$

## 2.4. Algunos resultados de estabilidad

**Lema 2.5.** *Considere que los conjuntos de funciones  $\{S, I, p_1, p_2\}$  y  $\{\hat{S}, \hat{I}, \hat{p}_1, \hat{p}_2\}$  son soluciones a los sistemas (1.1)-(1.5) y (2.1)-(2.5) con los coeficientes, condiciones iniciales y observaciones dada por  $\{\beta, \gamma, S_0, I_0, S^{obs}, I^{obs}\}$  y  $\{\hat{\beta}, \hat{\gamma}, S_0, I_0, \hat{S}^{obs}, \hat{I}^{obs}\}$ , respectivamente. Entonces, existen las constantes positivas  $\Psi_i, i = 1, 2, 3$  tales que las estimaciones*

$$\|(\hat{S} - S, \hat{I} - I)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \Psi_1 \|(\hat{\beta} - \beta, \hat{\gamma} - \gamma)\|_{L^2(\Omega)^2}^2, \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \|(\hat{p}_1 - p_1, \hat{p}_2 - p_2)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 &\leq \Psi_2 \|(\hat{\beta} - \beta, \hat{\gamma} - \gamma)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\ &\quad + \Psi_3 \|(\hat{S}^{obs} - S^{obs}, \hat{I}^{obs} - I^{obs})\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \end{aligned} \quad (2.38)$$

son válidas para cualquier  $t \in [0, T]$ .

*Demostración.* Por razones de simplicidad de la presentación, introducimos las siguientes notaciones

$$\begin{aligned} \delta S &= \hat{S} - S, & \delta p_1 &= \hat{p}_1 - p_1, & \delta \beta &= \hat{\beta} - \beta \\ \delta I &= \hat{I} - I, & \delta p_2 &= \hat{p}_2 - p_2, & \delta \gamma &= \hat{\gamma} - \gamma. \end{aligned}$$

Entonces, del sistema (1.1)-(1.5) para  $(S, I)$  y  $(\hat{S}, \hat{S})$  tenemos que  $(\delta S, \delta I)$  satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} (\delta S)_t - \Delta(\delta S) &= -\hat{\beta}(\mathbf{x}) \left[ (\hat{S})^m (\hat{I})^n - (S)^m (I)^n \right] \\ &\quad - \delta \beta(\mathbf{x}) (\hat{S})^m (\hat{I})^n + \hat{\gamma}(\mathbf{x}) \delta I + \gamma(\mathbf{x}) I, \end{aligned} \quad \text{en } Q_T, \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} (\delta I)_t - \Delta(\delta I) &= \hat{\beta}(\mathbf{x}) \left[ (\hat{S})^m (\hat{I})^n - (S)^m (I)^n \right] \\ &\quad + \delta \beta(\mathbf{x}) (\hat{S})^m (\hat{I})^n - \hat{\gamma}(\mathbf{x}) \delta I - \gamma(\mathbf{x}) I, \end{aligned} \quad \text{en } Q_T, \quad (2.40)$$

$$\nabla(\delta S) \cdot \mathbf{n} = \nabla(\delta I) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.41)$$

$$(\delta S)(\mathbf{x}, 0) = (\delta I)(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \text{en } \Omega. \quad (2.42)$$

Del mismo modo, del sistema adjunto (2.1)-(2.5), deducimos que  $(\delta p_1, \delta p_2)$  es la solución del sistema

$$\begin{aligned} (\delta p_1)_t + \Delta(\delta p_1) &= m \hat{\beta}(\mathbf{x}) (\hat{S})^{m-1} (\hat{I})^n (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \\ &\quad - m \beta(\mathbf{x}) (S)^{m-1} (I)^n (p_1 - p_2), \end{aligned} \quad \text{en } Q_T, \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} (\delta p_2)_t + \Delta(\delta p_2) &= n \hat{\beta}(\mathbf{x}) \hat{S}^m \hat{I}^{n-1} (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - \hat{\gamma}(\mathbf{x}) (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \\ &\quad - n \beta(\mathbf{x}) S^m I^{n-1} (p_1 - p_2) + \gamma(\mathbf{x}) (p_1 - p_2), \end{aligned} \quad \text{en } Q_T, \quad (2.44)$$

$$\nabla(\delta p_1) \cdot \mathbf{n} = \nabla(\delta p_2) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (2.45)$$

$$(\delta p_1)(\mathbf{x}, T) = \delta S(\mathbf{x}, T) - \left( \hat{S}^{obs}(\mathbf{x}) - S^{obs}(\mathbf{x}) \right), \quad \text{en } \Omega, \quad (2.46)$$

$$(\delta p_2)(\mathbf{x}, T) = \delta I(\mathbf{x}, T) - \left( \hat{I}^{obs}(\mathbf{x}) - I^{obs}(\mathbf{x}) \right), \quad \text{en } \Omega. \quad (2.47)$$

Luego, las pruebas de (2.37) y (2.38) se reducen a obtener estimaciones para los sistemas (2.39)-(2.42) y (2.43)-(2.47), respectivamente.

Para demostrar (2.37), testeamos las ecuaciones (2.39) y (2.40) por  $\delta S$  y  $\delta I$ , respectivamente.

Luego, sumando los resultados obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|\delta S(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta I(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \|\nabla(\delta S)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\delta I)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \int_{\Omega} |\hat{\beta}(\mathbf{x})| \left| \hat{S}^m \hat{I}^n - S^m I^n \right| |\delta S| d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta \beta(\mathbf{x})| |\hat{S}|^m |\hat{I}|^n |\delta S| d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\hat{\gamma}(\mathbf{x})| |\delta I| |\delta S| d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} |\delta \gamma(\mathbf{x})| |I| |\delta S| d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\hat{\beta}(\mathbf{x})| \left| \hat{S}^m \hat{I}^n - S^m I^n \right| |\delta I| d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta \beta(\mathbf{x})| |\hat{S}|^m |\hat{I}|^n |\delta I| d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} |\hat{\gamma}(\mathbf{x})| |\delta I|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta \gamma(\mathbf{x})| |I| |\delta I| d\mathbf{x} \\ & = \sum_{j=1}^8 I_j, \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde  $I_j$  están definidos por cada término. Ahora, usando el Corolario 2.2 para conseguir que

$$\begin{aligned} |\hat{S}^m \hat{I}^n - S^m I^n| &= |\hat{S}^m \hat{I}^n - \hat{S}^m I^n + \hat{S}^m I^n - S^m I^n| \\ &= \left| \hat{S}^m n \int_I^{\hat{I}} u^{n-1} du + I^n m \int_S^{\hat{S}} u^{m-1} du \right| \\ &\leq n |\hat{S}|^m \int_I^{\hat{I}} \mathbb{I}_m^{n-1} du + m |I|^n \int_S^{\hat{S}} \mathbb{S}_m^{m-1} du, \\ &\leq n \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_m^{n-1} |\hat{I} - I| + m \mathbb{S}_m^{m-1} \mathbb{I}_M^n |\hat{S} - S|, \end{aligned} \quad (2.49)$$

procedemos a obtener las cotas apropiados para  $I_j$ . En efecto, por la desigualdad de Cauchy y (2.49), tenemos que  $I_1$  se puede acotar de la siguiente manera

$$I_1 \leq \frac{n \bar{b}}{2} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_m^{n-1} \left( \int_{\Omega} |\delta I|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta S|^2 d\mathbf{x} \right) + m \bar{b} \mathbb{S}_m^{m-1} \mathbb{I}_M^n \int_{\Omega} |\delta S|^2 d\mathbf{x}.$$

En caso de  $I_2, I_3$  y  $I_4$ , se tiene

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{1}{2} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_M^n \left( \int_{\Omega} |\delta \beta|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta S|^2 d\mathbf{x} \right), \quad I_3 \leq \frac{\bar{r}}{2} \left( \int_{\Omega} |\delta I|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta S|^2 d\mathbf{x} \right), \\ I_4 &\leq \frac{1}{2} \mathbb{I}_M \left( \int_{\Omega} |\delta \gamma|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta S|^2 d\mathbf{x} \right). \end{aligned}$$

Del mismo modo, deducimos que

$$\begin{aligned} I_5 &\leq n \bar{b} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_M^{n-1} \int_{\Omega} |\delta I|^2 d\mathbf{x} + \frac{m \bar{b}}{2} \mathbb{S}_M^{m-1} \mathbb{I}_M^n \left( \int_{\Omega} |\delta I|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta S|^2 d\mathbf{x} \right), \\ I_6 &\leq \frac{1}{2} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_M^n \left( \int_{\Omega} |\delta \beta|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta I|^2 d\mathbf{x} \right), \\ I_7 &\leq \bar{r} \int_{\Omega} |\delta I|^2 d\mathbf{x}, \quad I_8 \leq \frac{1}{2} \mathbb{I}_M \left( \int_{\Omega} |\delta \gamma|^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} |\delta I|^2 d\mathbf{x} \right). \end{aligned}$$

Así, a partir de las estimaciones de  $I_j$  y (2.48) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \|\delta S(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta I(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) &+ 2 \left( \|\nabla(\delta S)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\delta I)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq D_1 \left( \|\delta S(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta I(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + D_2 \left( \|\delta \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta \gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

donde  $D_1 = 2\hat{C} + \mathbb{I}$  con  $\hat{C}$  definido en (2.13) y  $D_2 = \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_M^n + \mathbb{I}_M$ . Luego, aplicando la desigualdad de Gronwall, deducimos que

$$\begin{aligned} \|\delta S(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta I(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq e^{D_1 T} \left( \|\delta S_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta I_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + D_2 T \left( \|\delta \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta \gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

que implica (2.37) al utilizar (2.42).

La prueba de (2.38) se desarrolla de la siguiente manera. Podemos probar fácilmente que la identidad algebraica

$$\begin{aligned} \hat{\zeta} \hat{\mathbb{A}}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - \zeta \mathbb{A}(p_1 - p_2) &= (\hat{\zeta} - \zeta) \hat{\mathbb{A}}\hat{p}_1 + \zeta (\hat{\mathbb{A}} - \mathbb{A})\hat{p}_1 + \zeta \mathbb{A}\delta p_1 \\ &\quad - (\hat{\zeta} - \zeta) \hat{\mathbb{A}}\hat{p}_2 - \zeta (\hat{\mathbb{A}} - \mathbb{A})\hat{p}_2 - \zeta \mathbb{A}\delta p_2 \quad (2.50) \end{aligned}$$

es válida. Ahora, si  $(\hat{\zeta}, \zeta, \hat{\mathbb{A}}, \mathbb{A}) = (\hat{\beta}, \beta, m(\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n, m(S)^{m-1}(I)^n)$ , tenemos que (2.50) implica que el lado derecho de la ecuación (2.43) se puede reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} m\hat{\beta} (\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - m\beta (S)^{m-1}(I)^n(p_1 - p_2) &= m\delta\beta (\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n\hat{p}_1 + m\beta \left[ (\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n - (S)^{m-1}(I)^n \right] \hat{p}_1 \\ &\quad + m\beta (S)^{m-1}(I)^n \delta p_1 - m\delta\beta (\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n\hat{p}_2 \\ &\quad - m\beta \left[ (\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n - (S)^{m-1}(I)^{n-1} \right] \hat{p}_2 - m\beta (S)^{m-1}(I)^n \delta p_2. \quad (2.51) \end{aligned}$$

Luego, testeando (2.43) por  $\delta p_1$  y usando (2.51), obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\nabla(\delta p_1)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} m\delta\beta (\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n \hat{p}_1 \delta p_1 d\mathbf{x}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} m\beta \left[ (\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n - (S)^{m-1}(I)^n \right] \hat{p}_1 \delta p_1 d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Omega} m\beta (S)^{m-1}(I)^n (\delta p_1)^2 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} m\delta\beta (\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n \hat{p}_2 \delta p_1 d\mathbf{x} \\
& - \int_{\Omega} m\beta \left[ (\hat{S})^{m-1}(\hat{I})^n - (S)^{m-1}(I)^n \right] \hat{p}_2 \delta p_1 d\mathbf{x} - \int_{\Omega} m\beta (S)^{m-1}(I)^n \delta p_1 \delta p_2 d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Del Lema 2.3, Corolario 2.2, usando argumentos similares a (2.49), y la desigualdad de Cauchy tenemos

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \max \left\{ P_4, P_5 \right\} \left\{ m\mathbb{S}_m^{m-1} \mathbb{I}_M^n \left( \|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta\beta\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right. \\
& \quad + mn\bar{b}\mathbb{S}_m^{m-1} \mathbb{I}_M^{n-1} \left( \|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta I(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
& \quad \left. + m|m-1|\bar{b}\mathbb{S}_M^{m-2} \mathbb{I}_M^n \left( \|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta S(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right\} \\
& \quad + \frac{m\bar{b}}{2} \mathbb{S}_m^{m-1} \mathbb{I}_M^n \left( 3\|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta p_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \tag{2.52}
\end{aligned}$$

Ahora, de (2.50), seleccionando  $(\hat{\zeta}, \zeta, \hat{\mathbb{A}}, \mathbb{A}) = (\hat{\beta}, \beta, n(\hat{S})^m(\hat{I})^{n-1}, n(S)^m(I)^{n-1})$  y  $(\hat{\zeta}, \zeta, \hat{\mathbb{A}}, \mathbb{A}) = (\hat{\gamma}, \gamma, 1, 1)$ , podemos reescribir el lado derecho de la ecuación (2.44). Entonces, testeando (2.43) por  $\delta p_2$  y usando argumentos similares obtenemos una estimación similar a (2.52). Así, tenemos que existen las constantes positivas  $\tilde{E}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , tales que

$$\begin{aligned}
& -\frac{d}{dt} \left( \|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta p_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + 2 \left( \|\nabla \delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \delta p_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
& \leq \tilde{E}_1 \left( \|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta p_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
& \quad + \tilde{E}_2 \left( \|\delta S(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta I(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \tilde{E}_3 \left( \|\delta\beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta\gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
\end{aligned}$$

Aplicando la estimación (2.37) y reordenando algunos términos deducimos que

$$-\frac{d}{dt} \left( e^{\tilde{E}_1 t} \left[ \|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta p_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \right) \leq (\tilde{E}_2 \Psi_1 + \tilde{E}_3) \left( \|\delta\beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta\gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

e integrando en  $[t, T]$  tenemos que

$$\begin{aligned}
e^{\tilde{E}_1 t} \left[ \|\delta p_1(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta p_2(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] & \leq e^{\tilde{E}_1 T} \left[ \|\delta p_1(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta p_2(\cdot, T)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\
& \quad + T(\tilde{E}_2 \Psi_1 + \tilde{E}_3) e^{\tilde{C}_1 T} \left( \|\delta\beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta\gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
\end{aligned}$$

Por tanto, podemos deducir (2.38) mediante la aplicación de la condición final (2.47).  $\square$

### 3. Prueba del teorema

**Existencia.** Podemos probar la existencia considerando la estrategia estándar de una sucesión minimizadora y utilizando las inclusiones de compacidad adecuadas. En efecto, notamos claramente que  $U_{ad}(\Omega) \neq \emptyset$  y  $J(\beta, \gamma)$  están acotadas para cualquier  $(\beta, \gamma) \in U_{ad}(\Omega)$ . Entonces podemos considerar que  $\{(\beta_n, \gamma_n)\} \subset \mathcal{U}$  es una sucesión minimizadora de  $J$ . Entonces la inclusión compacta  $H^{\lfloor d/2 \rfloor + 1}(\Omega) \subset C^\alpha(\Omega)$  para  $\alpha \in ]0, 1/2]$ , implica que la sucesión de minimización  $\{(\beta_n, \gamma_n)\}$  está acotada en la topología fuerte de  $C^\alpha(\overline{\Omega}) \times C^\alpha(\overline{\Omega})$  para todos  $\alpha \in ]0, 1/2]$ , desde existe una constante positiva  $C$  (independiente de  $\beta, \gamma$  y  $n$ ) tal que

$$\|\beta_n\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} + \|\gamma_n\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq C \left( \|\beta_n\|_{H^{\lfloor d/2 \rfloor + 1}(\Omega)} + \|\gamma_n\|_{H^{\lfloor d/2 \rfloor + 1}(\Omega)} \right), \quad \forall \alpha \in ]0, 1/2].$$

Observe que el lado derecho está acotado por el hecho de que  $\beta_n, \gamma_n \in H^{\lfloor d/2 \rfloor + 1}(\Omega)$ , ver la definición de  $U_{ad}(\Omega)$  dada en (1.8). Ahora, denotemos por  $(S_n, I_n)$  la solución del problema del valor inicial y en la frontera (1.1)-(1.5) correspondiente a  $(\beta_n, \gamma_n)$ . Entonces, considerando el hecho de que  $\{(\beta_n, \gamma_n)\}$  pertenece a  $C^\alpha(\overline{\Omega}) \times C^\alpha(\overline{\Omega})$  para todo  $\alpha \in ]0, 1/2]$ , por el Teorema 2.1, tenemos que  $S_n$  y  $I_n$  pertenecen al espacio de Hölder  $C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$  y también  $\{(S_n, I_n)\}$  es una sucesión acotada en la topología fuerte de  $C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T) \times C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T)$  para todo  $\alpha \in ]0, 1/2]$ . Así, del acotamiento de la sucesión de minimización y la correspondiente secuencia  $\{(S_n, I_n)\}$ , implica que existe

$$(\bar{\beta}, \bar{\gamma}) \in \left[ C^{1/2}(\Omega) \times C^{1/2}(\Omega) \right] \cap U_{ad}(\Omega), \quad (\bar{S}, \bar{I}) \in C^{2+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{4}}(\overline{Q}_T) \times C^{2+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{4}}(\overline{Q}_T),$$

y la subsucesión nuevamente etiquetada por  $\{(\beta_n, \gamma_n)\}$  y  $\{(S_n, I_n)\}$  tal que

$$\beta_n \rightarrow \bar{\beta}, \quad \gamma_n \rightarrow \bar{\gamma} \quad \text{uniformemente sobre } C^\alpha(\Omega), \quad (3.1)$$

$$S_n \rightarrow \bar{S}, \quad I_n \rightarrow \bar{I} \quad \text{uniformemente sobre } C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T) \cap C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_T). \quad (3.2)$$

Además, podemos deducir que  $(\bar{S}, \bar{I})$  es la solución de el problema del valor límite inicial (1.1)-(1.5) correspondiente a los coeficientes  $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$ . Por tanto, según el teorema de convergencia dominado de Lebesgue, la semicontinuidad inferior de la norma  $L^2$ , y la definición de la secuencia minimizadora, tenemos que

$$J(\bar{\beta}, \bar{\gamma}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J(\beta_n, \gamma_n) = \inf_{(\beta, \gamma) \in U_{ad}(\Omega)} J(\beta, \gamma). \quad (3.3)$$

Entonces,  $(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$  es una solución de (1.6) y la prueba de existencia está concluida.

**Unicidad.** Demostramos la unicidad usando adecuadamente el resultado de estabilidad del Lema 2.5 y la condición de optimalidad necesaria del Lema 2.15. Para ser más precisos, consideremos los conjuntos de funciones  $\{S, I, p_1, p_2\}$  y  $\{\hat{S}, \hat{I}, \hat{p}_1, \hat{p}_2\}$  son soluciones a los sistemas (1.1)-(1.5) y

(2.1)-(2.5) con los datos  $\{\beta, \gamma, S^{obs}, I^{obs}\}$  y  $\{\hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{S}^{obs}, \hat{I}^{obs}\}$ , respectivamente. Del Lema 2.15 y la hipótesis que  $(\beta, \gamma)$  y  $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$  son soluciones de (1.6) tenemos que las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} \left[ (\bar{\beta} - \beta) S^m I^n - (\bar{\gamma} - \gamma) I \right] (p_2 - p_1) d\mathbf{x} dt \\ & \quad + \delta \int_{\Omega} \left[ \nabla \beta \nabla (\bar{\beta} - \beta) + \nabla \gamma \nabla (\bar{\gamma} - \gamma) \right] d\mathbf{x} \geq 0, \quad \forall (\bar{\beta}, \bar{\gamma}) \in U_{ad}, \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} \left[ (\underline{\beta} - \hat{\beta}) \hat{S}^m \hat{I}^n - (\underline{\gamma} - \hat{\gamma}) \hat{I} \right] (\hat{p}_2 - \hat{p}_1) d\mathbf{x} dt \\ & \quad + \delta \int_{\Omega} \left[ \nabla \hat{\beta} \nabla (\underline{\beta} - \hat{\beta}) + \nabla \hat{\gamma} \nabla (\underline{\gamma} - \hat{\gamma}) \right] d\mathbf{x} \geq 0, \quad \forall (\underline{\beta}, \underline{\gamma}) \in U_{ad}, \quad (3.5) \end{aligned}$$

son válidas, respectivamente. En particular, seleccionando  $(\bar{\beta}, \bar{\gamma}) = (\hat{\beta}, \hat{\gamma})$  en (3.4) y  $(\underline{\beta}, \underline{\gamma}) = (\beta, \gamma)$  en (3.5), y sumando ambas desigualdades, obtenemos

$$\begin{aligned} \delta \left[ \|\nabla(\hat{\beta} - \beta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\hat{\gamma} - \gamma)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] & \leq \iint_{Q_T} |\hat{\beta} - \beta| |\hat{S}^m \hat{I}^n (\hat{p}_2 - \hat{p}_1) - S^m I^n (p_2 - p_1)| d\mathbf{x} dt \\ & \quad + \iint_{Q_T} |\hat{\gamma} - \gamma| |\hat{I} (\hat{p}_2 - \hat{p}_1) - I (p_2 - p_1)| d\mathbf{x} dt := I_1 + I_2. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Ahora, de (2.49), (2.50), Corolario 2.2, Lema 2.3, y la desigualdad de Cauchy, observamos que

$$\begin{aligned} I_1 & \leq \iint_{Q_T} |\hat{\beta} - \beta| |\hat{S}^m \hat{I}^n - S^m I^n| |\hat{p}_1| d\mathbf{x} dt + \iint_{Q_T} |\hat{\beta} - \beta| |\hat{S}^m \hat{I}^n - S^m I^n| |\hat{p}_2| d\mathbf{x} dt \\ & \quad + \iint_{Q_T} |\hat{\beta} - \beta| |S^m I^n| |\hat{p}_1 - p_1| d\mathbf{x} dt + \iint_{Q_T} |\hat{\beta} - \beta| |S^m I^n| |\hat{p}_2 - p_2| d\mathbf{x} dt \\ & \leq \frac{n}{2} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_m^{n-1} \max \{P_4, P_5\} \left( T \|\hat{\beta} - \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\hat{I}(\cdot, t) - I(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) \\ & \quad + \frac{m}{2} \mathbb{I}_M^n \mathbb{S}_m^{m-1} \max \{P_4, P_5\} \left( T \|\hat{\beta} - \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\hat{S}(\cdot, t) - S(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) \\ & \quad + \frac{m}{2} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_M^n \left( 2T \|\hat{\beta} - \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|(\hat{p}_1 - p_1)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|(\hat{p}_2 - p_2)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} I_2 & \leq \max \{P_4, P_5\} \left( T \|\hat{\gamma} - \gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|\hat{I}(\cdot, t) - I(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) \\ & \quad + \mathbb{I}_M \left( T \|\hat{\gamma} - \gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|(\hat{p}_1 - p_1)(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right). \end{aligned}$$

De Lema 2.5 y las estimaciones de  $I_1$  y  $I_2$  en (3.6) tenemos que

$$\begin{aligned} \delta \left[ \|\nabla(\hat{\beta} - \beta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\hat{\gamma} - \gamma)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] & \leq \Upsilon_1 \left[ \|\hat{\beta} - \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\hat{\gamma} - \gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ & \quad + \Upsilon_2 \left[ \|\hat{S}^{obs} - S^{obs}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\hat{I}^{obs} - I^{obs}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right], \quad (3.7) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\Upsilon_1 &= \left[ \left( \frac{n}{2} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_M^{n-1} + \frac{m}{2} \mathbb{S}_M^{m-1} \mathbb{I}_M^n + 1 \right) (1 + \Psi_1) \max \left\{ P_4, P_5 \right\} + \left( \frac{m}{2} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_M^n + \mathbb{I}_M \right) (2 + \Psi_2) \right] T, \\ \Upsilon_2 &= \left( \frac{m}{2} \mathbb{S}_M^m \mathbb{I}_M^n + \mathbb{I}_M \right) \Psi_3 T.\end{aligned}$$

Ahora, considerando que  $(\hat{\beta}, \hat{\gamma}), (\beta, \gamma) \in \mathcal{U}_c(\Omega)$ , por la desigualdad generalizada de Poincaré, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\hat{\beta} - \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\hat{\gamma} - \gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C_{poi} \left( \|\nabla(\hat{\beta} - \beta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\hat{\gamma} - \gamma)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\hat{\beta} - \beta\|_{L^1(\Omega)}^2 + \|\hat{\gamma} - \gamma\|_{L^1(\Omega)}^2 \right) \\ &= C_{poi} \left( \|\nabla(\hat{\beta} - \beta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\hat{\gamma} - \gamma)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).\end{aligned}$$

Entonces, en (3.7) tenemos

$$(\delta - \Upsilon_2 C_{poi}) \left[ \|\nabla(\hat{\beta} - \beta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\hat{\gamma} - \gamma)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \leq \Upsilon_2 \left[ \|\hat{S}^{obs} - S^{obs}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\hat{I}^{obs} - I^{obs}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right].$$

Por lo tanto, seleccionando  $\Theta = \Upsilon_2 C_{poi}$  deducimos la unicidad hasta una constante aditiva.

#### 4. Simulaciones numéricas

En esta sección, consideramos la aproximación numérica del problema de control óptimo siguiendo las ideas detalladas en [33] (véase también [20]). La construcción de la aproximación numérica es un procedimiento que consta de los siguientes tres pasos: se desarrolla una aproximación numérica mediante un esquema IMEX de la ecuación de estado (1.1)-(1.5); se construye una aproximación numérica de la función objetivo (1.7); y, asumiendo que las funciones a identificar tienen formas específicas en términos de un número finito de parámetros desconocidos, se aproxima el problema de optimización infinito dimensional (1.6) por un problema de optimización numérica en dimensión finita, donde las incógnitas son los parámetros. Luego, se aplica un algoritmo de optimización numérica para resolver el problema de optimización en dimensión finita o forma discreta del problema de optimización. En efecto, en lo que sigue se especifica cada uno de estos pasos.

En primer lugar especificamos la discretización de (1.1)-(1.5). Consideremos que  $\Omega = ]0, 1[$ ,  $\partial\Omega = \{0, 1\}$ ,  $Q_T = (0, 1) \times [0, T]$  y  $\Gamma = \{0, 1\} \times [0, T]$ . La discretización del problema de valores iniciales y en la frontera (1.1)-(1.5) se realiza mediante un esquema semi-implícito de diferencias finitas. Comenzamos introduciendo la discretización estándar de  $Q_T$ . Seleccionamos  $M, N \in \mathbb{N}$  de modo que la discretización de  $\Omega$  esté dada por  $x_j = j\Delta x$  para  $j = 0, \dots, M$  con  $\Delta x = L/(M + 1)$ , y la discretización de  $[0, T]$  esté dada por  $t_k = k\Delta t$  para  $k = 0, \dots, N$  con  $\Delta t = 1/N$ . Además, consideramos que la aproximación de una función dada  $\Psi : \bar{Q}_T$  en  $(x_j, t_k)$  se denota por  $\Psi_j^k$ . De forma similar, la aproximación de las funciones  $\bar{\Psi} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\underline{\Psi} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  en  $x_j$  y  $t_k$  se denotan por  $\bar{\Psi}_j$  y por  $\underline{\Psi}^k$ , respectivamente. El sistema (1.1)-(1.5) se aproxima mediante el siguiente esquema

de diferencias finitas.

$$\frac{S_j^{k+1} - S_j^k}{\Delta t} - \frac{S_{j+1}^{k+1} - 2S_j^{k+1} + S_{j-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} = -\beta_j(S_j^k)^m(I_j^k)^n + \gamma_j I_j^k, \quad j = 1, \dots, M-1, \quad (4.1)$$

$$\frac{I_j^{k+1} - I_j^k}{\Delta t} - \frac{I_{j+1}^{k+1} - 2I_j^{k+1} + I_{j-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2} = \beta_j(S_j^k)^m(I_j^k)^n - \gamma_j I_j^k, \quad j = 1, \dots, M-1, \quad (4.2)$$

$$\frac{S_j^{k+1} - S_{j-1}^{k+1}}{\Delta x} = \frac{I_j^{k+1} - I_{j-1}^{k+1}}{\Delta x} = 0, \quad j \in \{0, M\}, \quad (4.3)$$

$$S_j^0 = S_0(x_j), \quad I_j^0 = I_0(x_j), \quad j = 0, \dots, M, \quad (4.4)$$

donde  $k = 0, \dots, N-1$ . Utilizamos la notación  $(S_\Delta, I_\Delta, R_\Delta)$  para la aproximación numérica de (1.1)–(1.5) obtenida por el esquema (4.1)–(4.4) con coeficientes numéricos  $(\beta_\Delta, \gamma_\Delta)$ .

La aproximación de la función costo (1.7) es denotada por  $J_\Delta$  y es definida por

$$J_\Delta(S_\Delta, I_\Delta, \beta_\Delta, \gamma_\Delta) = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=0}^M [(S_j^N - S_j^{obs})^2 + (I_j^N - I_j^{obs})^2] + \frac{\delta \Delta x}{2} \sum_{j=0}^M [(\beta'_j)^2 + (\gamma'_j)^2]. \quad (4.5)$$

Se observa que  $(S_j^{obs}, I_j^{obs})$  corresponde a una aproximación de las observaciones, las cuales en la práctica son interpolaciones de los datos observados que son obtenidos en un conjunto discreto de puntos del dominio y que no considera la discretización de  $\Omega$ .

La discretización del problema de optimización (1.6) cuando  $(\beta, \gamma)$  son formas funcionales dependientes de los parámetros se realiza como sigue. Asumimos que las funciones  $\beta$  y  $\gamma$  están parametrizadas por un número finito de parámetros denotados por  $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_\ell)$  y que el problema de control óptimo (1.6) se aproxima mediante el problema de optimización de dimensión finita.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{e} \in \mathbb{R}^\ell \text{ minimizando la función costo } \mathcal{J}_\Delta(\mathbf{e}) = J_\Delta(S_\Delta, I_\Delta, \beta_\Delta, \gamma_\Delta) \\ \text{restringida a } (S_\Delta, I_\Delta, \beta_\Delta, \gamma_\Delta) \text{ solución de (4.1)–(4.4) con } \beta \text{ y } \gamma \text{ parametrizadas por } \mathbf{e}, \text{ i.e. } \beta_\Delta = \beta_\Delta(\cdot, \mathbf{e}) \text{ y } \gamma_\Delta = \gamma_\Delta(\cdot, \mathbf{e}), \end{array} \right\} \quad (4.6)$$

En esta definición del problema de la discretización del problema de optimización observamos que  $(S_\Delta, I_\Delta)$  depende de  $\mathbf{e}$  aunque tal notación no está incluida explícitamente a fin de no recargar la notación.

En los ejemplos numéricos que se muestran en lo que sigue de la sección, la solución del problema de optimización (4.6) se realizó utilizando la función `optimiset` de Matlab. Adicionalmente, en los ejemplos numéricos se consideró el parámetro de regularización  $\delta = 1$ , y los exponentes  $(m, n) = (1/2, 1/10)$  es decir, la fuerza de infección es  $\beta(\mathbf{x})S^{1/2}I^{1/10}$ .

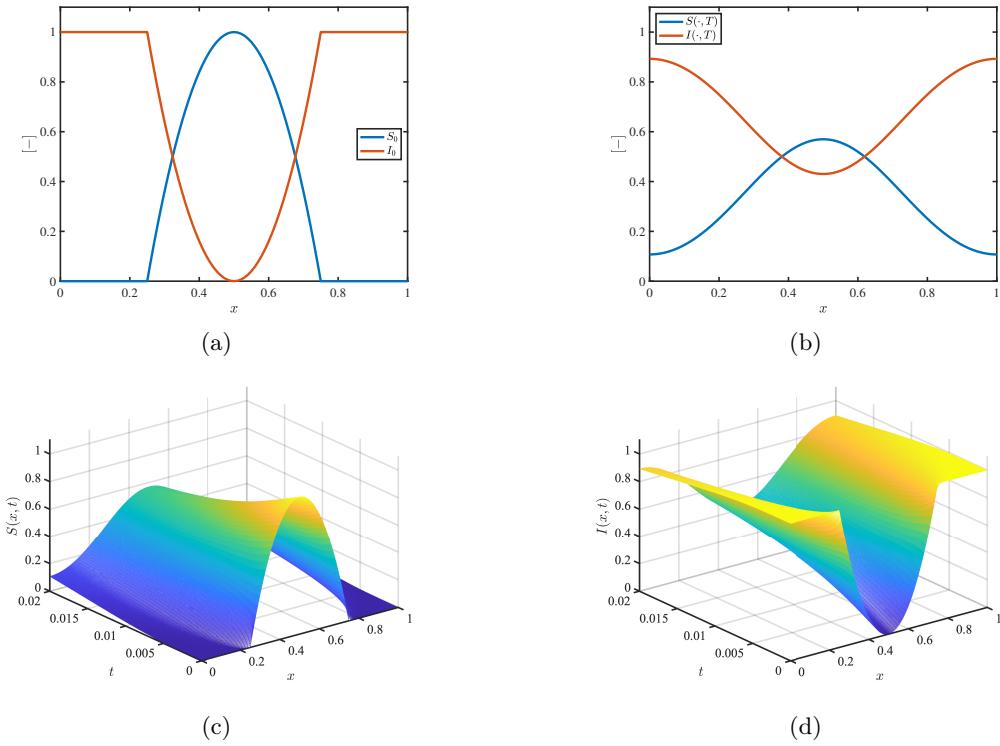


Figura 1: Simulaciones con los datos del Ejemplo 1 presentado en el subsección 4.1.

#### 4.1. Ejemplo 1: Funciones constantes $\beta$ y $\gamma$

En este ejemplo, consideramos que los coeficientes de los términos de reacción  $\beta, \gamma : \bar{\Omega} \rightarrow (0, 1)$  son funciones constantes por determinar. Más precisamente, asumimos que los parámetros a determinar por el problema de control óptimo son  $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ , tales que  $\beta(x; \mathbf{e}) = e_1$  y  $\gamma(x; \mathbf{e}) = e_2$ . Construimos los perfiles de observación desarrollando una simulación numérica del problema directo (1.1)-(1.5) con condición inicial

$$S_0(x) = \begin{cases} (1 - 4x)(4x - 3), & x \in [1/4, 3/4], \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (4.7)$$

$$I_0(x) = 1 - S_0(x), \quad (4.8)$$

mediante aplicación del esquema de diferencias finitas (4.1)–(4.4); utilizando  $\Delta t = 1,0E - 7$ ,  $\Delta x = 2,0E - 4$  y  $\mathbf{e}^{obs} = (0,7, 0,2)$ , ver Figura (1). Se observa que en este caso en la definición de  $J_\Delta$  en 4.5 el término de regularización se anula dado que  $\beta'(x) = \gamma'(x) = 0$ . La identificación numérica se desarrolla considerando  $M = 100$  y  $N = 500$  y utilizando varios puntos de inicialización para el método de optimización numérica. Por ejemplo, si suponemos que la aproximación inicial es  $\mathbf{e}^0 = (1.E - 06, 1)$  obtenemos que las funciones identificadas están definidas por los parámetros  $\mathbf{e}^\infty = (0,77964, 0,25706)$ . Otras simulaciones se realizaron, según lo documentado en la Tabla 1. En la Tabla 1 se muestra que la función  $J_\Delta$  tiene varios puntos donde la función costo toma el valor 2,752908, para una representación gráfica consultar la Figura 2. En la segunda columna se

muestran los parámetros iniciales para la solución numérica del problema de optimización (4.6). En la tercera columna los resultados de la convergencia y en la cuarta columna el valor de la función de costo en el punto de convergencia. La comparación de los perfiles observados, identificados y de aproximación inicial para dos casos de la Tabla 1 se muestran en la Figura 3. En los otros casos, las representaciones gráficas son similares.

Tabla 1: Resultados que muestran la no-unicidad del problema de identificación para el caso de  $\beta$  y  $\gamma$  no constantes (ver Figura 2).

Caso	$\mathbf{e}^0$	$\mathbf{e}^\infty$	$J_\Delta(\mathbf{e}^\infty)$
1	$(1.E - 06, 1)$	$(0,77964, 0,25706)$	2,752908
2	$(1.E - 06, 2)$	$(1,34835, 0,63480)$	2,752908
3	$(1.E - 06, 3)$	$(1,92203, 1,01875)$	2,752908
4	$(1.E - 06, 4)$	$(2,36179, 1,31490)$	2,752908
5	$(1.E - 06, 5)$	$(3,52866, 2,10784)$	2,752908
6	$(1.E - 06, 6)$	$(2,5164, 1,41940)$	2,752908

En términos generales, en el caso de funciones constantes  $\beta$  y  $\gamma$  no se tiene la unicidad debido a que en la función de costo el término de regularización se anula.

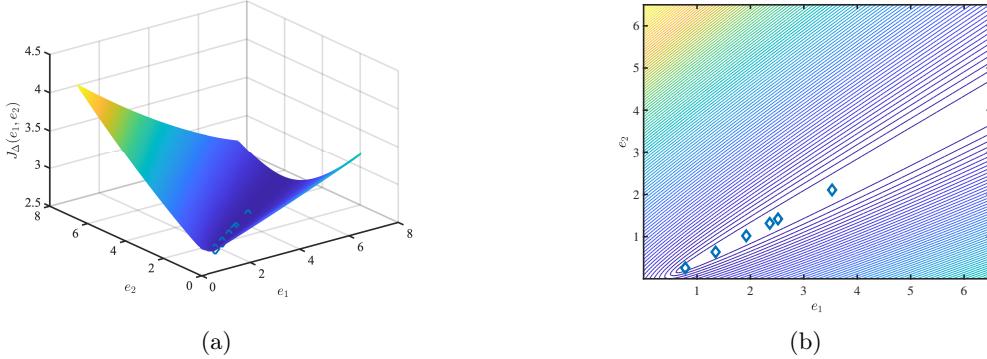


Figura 2: Gráfica de la función costo para el Ejemplo 1 presentado en el subsección 4.1 considerando  $\mathbf{e} \in (0, 8]^2$ . (a) Superficie mostrando varios mínimos para  $J_\Delta$  dada en (4.5). (b) curvas de nivel de la función costo  $J_\Delta$ . Para los valores numéricos consultar la Tabla 1.

Tabla 2: Parámetros observados y resultados de la identificación en el caso del Ejemplo 2 y que definen las funciones dadas en (4.9).

	$\mathbf{e}$	$J_\Delta(\mathbf{e}^\infty)$	$\ \beta_\Delta\ _{L1(\Omega)}$	$\ \gamma_\Delta\ _{L1(\Omega)}$
$\mathbf{e}^{obs}$	$(0,0800, 80,0000, 50,0000, 0,0800, 80,0000, 50,0000)$		0,0031	0,1109
$\mathbf{e}^{ig}$	$(0,0200, 71,0000, 41,0000, 0,0200, 71,0000, 41,000)$			
$\mathbf{e}^\infty$	$(0,0763, 79,7212, 49,7254, 0,0925, 80,6862, 48,2397)$	$1,8207E - 08$	0,0030	0,1101
$\mathbf{e}^{ig}$	$(0,0200, 73,0000, 43,0000, 0,0200, 73,0000, 43,000)$			
$\mathbf{e}^\infty$	$(0,0710, 73,0037, 43,0037, 0,0942, 73,0037, 43,0038)$	$7,3171E - 09$	0,0031	0,1101
$\mathbf{e}^{ig}$	$(0,0200, 85,0000, 55,0000, 0,0200, 85,0000, 55,000)$			
$\mathbf{e}^\infty$	$(0,0763, 79,7212, 49,7254, 0,0925, 80,6862, 48,2397)$	$1,8208E - 08$	0,0030	0,1101
$\mathbf{e}^{ig}$	$(0,0200, 88,0000, 55,0000, 0,0200, 88,0000, 58,000)$			
$\mathbf{e}^\infty$	$(0,0789, 79,7340, 49,7355, 0,0904, 80,2810, 48,9074)$	$1,1057E - 09$	0,0031	0,1101

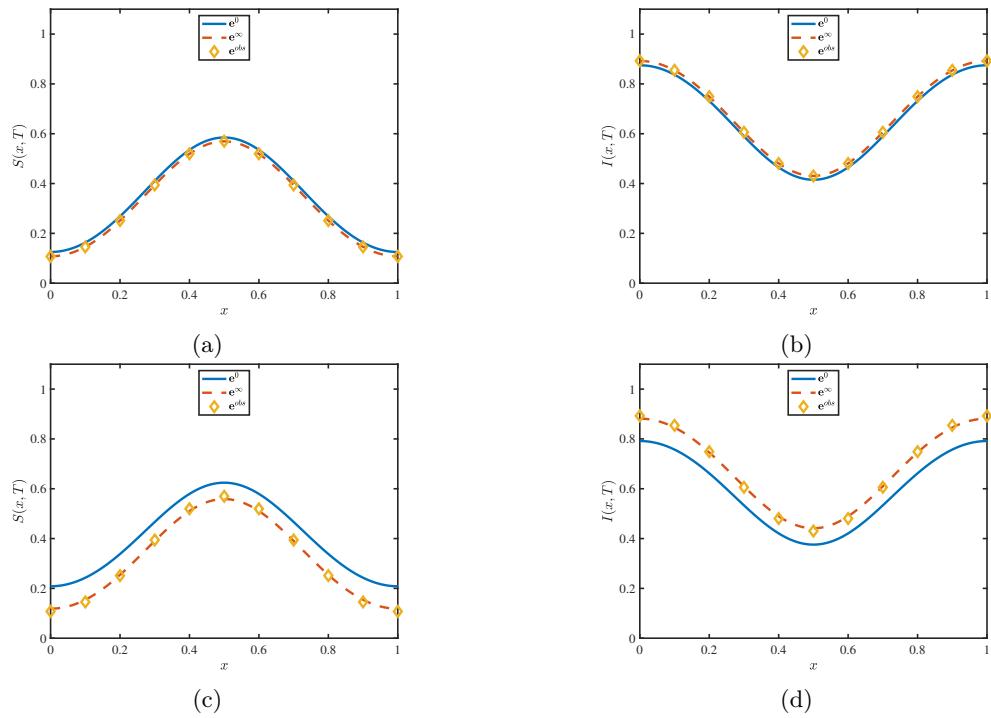


Figura 3: Comparación de los perfiles en tiempo  $T$  de la soluciones para Ejemplo 1 presentado en el subsección 4.1. (a)-(b) y (c)-(d) son los perfiles para los casos 1 y 6 presentados en la Tabla 1.

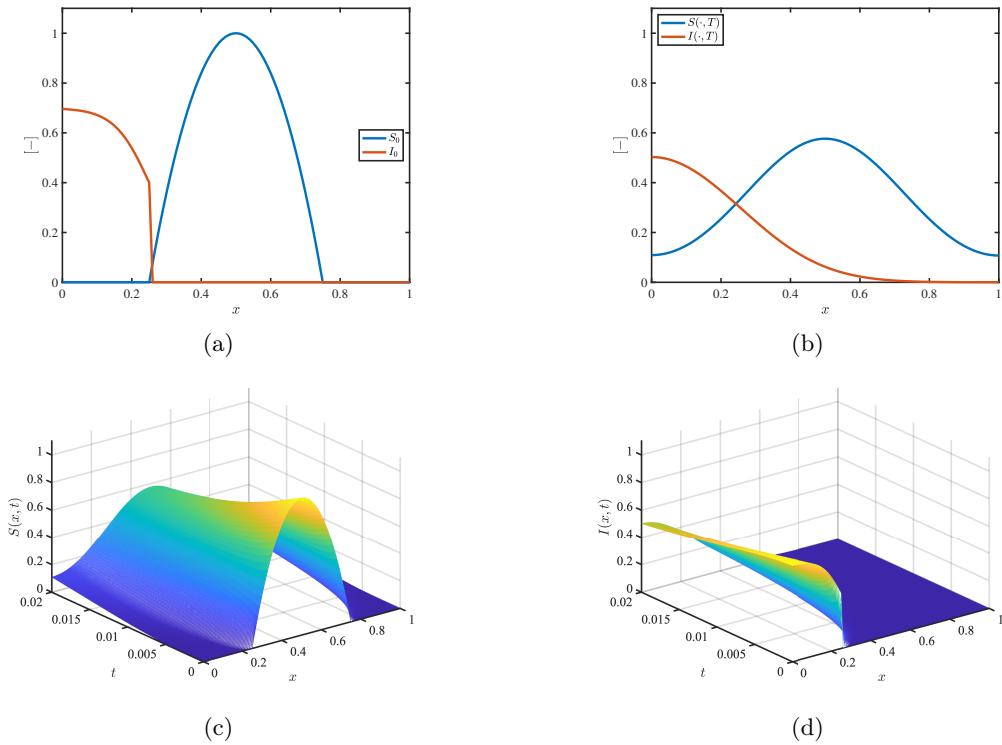


Figura 4: Simulaciones con los datos del Ejemplo 2 presentado en la subsección 4.2.

#### 4.2. Ejemplo 2: Funciones no constantes $\beta$ y $\gamma$

En este ejemplo, asumimos que las funciones  $\beta, \gamma : \bar{\Omega} \rightarrow (0, 1)$  están parametrizadas en términos de  $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_6)$  como sigue

$$\beta(x; \mathbf{e}) = e_1 \operatorname{sech}(e_2 x - e_3), \quad \gamma(x; \mathbf{e}) = 0,09 - e_4 \tanh(e_5 x - e_6). \quad (4.9)$$

Los perfiles de observación considerados son sintéticos y son construidos resolviendo las ecuaciones de estado (1.1)–(1.5) con la condición inicial para los susceptibles la función  $S_0$  definida en (4.7) y la condición inicial para los infectados dada por

$$I_0(x) = \begin{cases} 0,4 - 0,3 \tanh(10x - 2,5), & x \in [0, 1/4], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.10)$$

La solución numérica es obtenida mediante aplicación del esquema de diferencias finitas (4.1)–(4.4); utilizando  $\Delta t = 1,0E - 7$ ,  $\Delta x = 2,0E - 4$  y los parámetros dados en  $\mathbf{e}^{obs}$  en la Tabla 2 (ver Figura 4). Observamos que  $\|\beta(\cdot; \mathbf{e}^{obs})\|_{L^1(\Omega)} = 0,0031$  y  $\|\gamma(\cdot; \mathbf{e}^{obs})\|_{L^1(\Omega)} = 0,1109$ . Luego, con el fin de utilizar la hipótesis del Teorema 1.1 que permite lograr la unicidad, fijamos  $\mathbf{c} = (0,0031, 0,1109)$  y redefinimos la función costo como sigue

$$\tilde{J}_\Delta(S_\Delta, I_\Delta, \beta_\Delta, \gamma_\Delta) = J_\Delta(S_\Delta, I_\Delta, \beta_\Delta, \gamma_\Delta) + \left( \Delta x \sum_{j=0}^M |\beta_j| - 0,0031 \right)^2 + \left( \Delta x \sum_{j=0}^M |\gamma_j| - 0,1109 \right)^2,$$

donde  $J_\Delta(S_\Delta, I_\Delta, \beta_\Delta, \gamma_\Delta)$  es la función definida en (4.5). El problema de optimización se resolvió considerando  $M = 100$  y  $N = 1000$  y la función costo  $\tilde{J}_\Delta$ . Se seleccionaron distintos valores  $\mathbf{e}^{ig}$ , como estimación inicial de los parámetros, y se obtuvo que el algoritmo de optimización convergió a distintos valores  $\mathbf{e}^\infty$  para los parámetros identificados, los cuales son reportados en la Tabla 2. En esta tabla se reporta el valor de la función costo en el punto de convergencia, de donde se observa que el menor valor para la función de costo es el de la fila inferior, para el cual  $J_\Delta(\mathbf{e}^\infty) = 1,1057E - 09$ . Adicionalmente en las dos últimas columnas de la derecha se reporta el valor de  $\|\beta(\cdot; \mathbf{e}^{obs})\|_{L^1(\Omega)}$  y  $\|\gamma(\cdot; \mathbf{e}^{obs})\|_{L^1(\Omega)}$ , los cuales son aproximados a los valores fijados para  $\mathbf{c}$ . La comparación de los perfiles observados e identificados y así como los coeficientes  $\beta$  y  $\gamma$  se muestran en la Figura 5.

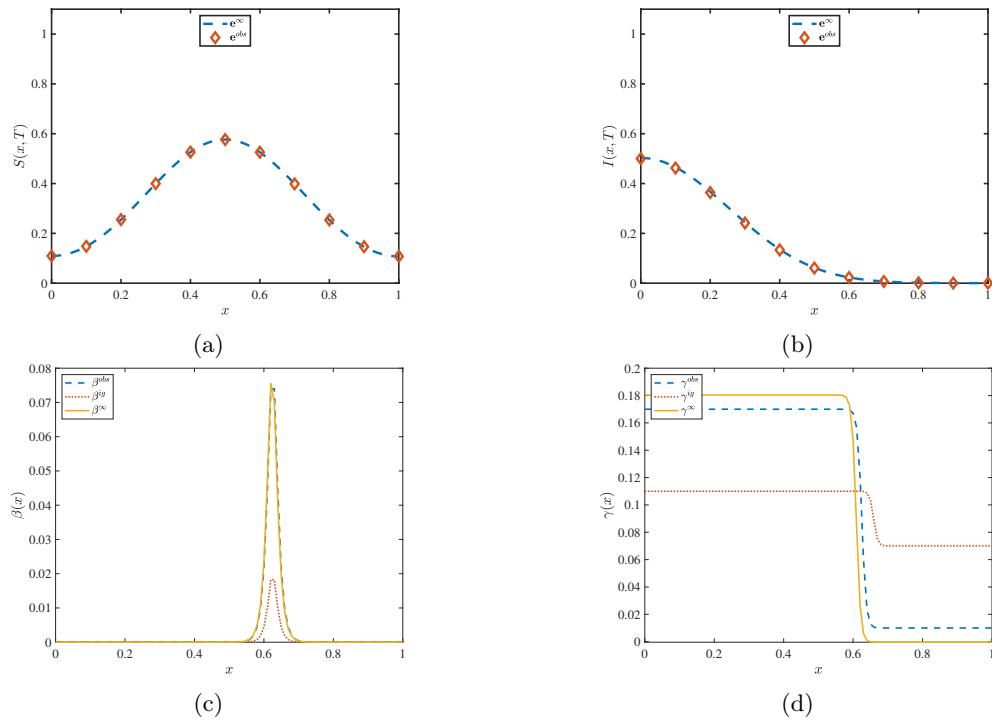


Figura 5: Comparación de los perfiles en tiempo  $T$  de la soluciones para Ejemplo 2 presentado en el subsección 4.2. Estas gráficas son construidas con los valores de la Tabla 2.

En síntesis, en el caso de funciones no constantes  $\beta$  y  $\gamma$  es esperable obtener la unicidad bajo las consideraciones del Teorema 1.1. Así mismo se observa que es esperable que se los resultados sigan siendo válidos bajo condiciones de menor regularidad de las condiciones iniciales. En efecto, para las simulaciones numéricas de este ejemplo se consideró una función discontinua como condición inicial para la población de individuos infectados.

## Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo de la Universidad del Bío-Bío (Chile) mediante los proyectos FA-PEI FP2510413 y de Investigación Regular RE2547710; la Universidad Tecnológica Metropolitana (Chile) mediante el programa “Proyecto financiado por el Concurso de Proyectos Regulares de Investigación, año 2023, código LPR23-03, Universidad Tecnológica Metropolitana”; y ANID-Chile mediante el apoyo del proyecto FONDECYT 1230560.

## Referencias

- [1] V. Akimenko, “An age-structured SIR epidemic model with fixed incubation period of infection,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 73, no. 7, pp. 1485–1504, 2017.
- [2] R. M. Anderson y R. M. May, *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*. Oxford University Press, 1991, doi: 10.1093/oso/9780198545996.001.0001.
- [3] N. C. Apreutesei, “An optimal control problem for a pest, predator, and plant system,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, vol. 13, no. 3, pp. 1391–1400, 2012, doi: 10.1016/j.nonrwa.2011.11.004.
- [4] B. Armbruster y E. Beck, “An elementary proof of convergence to the mean-field equations for an epidemic model,” *IMA J. Appl. Math.*, vol. 82, no. 1, pp. 152–157, 2017, doi: 10.1093/ima-mat/hxw010.
- [5] N. Bacaër, *A short history of mathematical population dynamics*. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011, doi: 10.1007/978-0-85729-115-8.
- [6] R. S. Cantrell y C. Cosner, *Spatial ecology via reaction-diffusion equations*, ser. Wiley Series in Mathematical and Computational Biology. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2003, doi: 10.1002/0470871296.
- [7] L. Chang, S. Gao, y Z. Wang, “Optimal control of pattern formations for an SIR reaction-diffusion epidemic model,” *J. Theoret. Biol.*, vol. 536, 2022, Art. ID 111003, doi: 10.1016/j.jtbi.2022.111003.
- [8] Q. Chen y J. Liu, “Solving an inverse parabolic problem by optimization from final measurement data,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 193, no. 1, pp. 183–203, 2006, doi: 10.1016/j.cam.2005.06.003.
- [9] I.-C. Chou y E. O. Voit, “Recent developments in parameter estimation and structure identification of biochemical and genomic systems,” *Math. Biosci.*, vol. 219, no. 2, pp. 57–83, 2009, doi: 10.1016/j.mbs.2009.03.002.
- [10] A. Coronel, F. Huancas, C. Isoton, y A. Tello, “Optimal control problem and reaction identification term for carrier-borne epidemic spread with a general infection force and diffusion,” *Electron. Res. Arch.*, vol. 33, no. 7, pp. 4435–4467, 2025, doi: 10.3934/era.2025202.
- [11] A. Coronel, F. Huancas, y M. Sepúlveda, “Identification of space distributed coefficients in an indirectly transmitted diseases model,” *Inverse Problems*, vol. 35, no. 11, 2019, Art. ID 115001.

- [12] A. Coronel, F. Huancas, y M. Sepúlveda, “A note on the existence and stability of an inverse problem for a SIS model,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 77, no. 12, pp. 3186–3194, 2019, doi: 10.1016/j.camwa.2019.01.031.
- [13] A. Coronel, F. Huancas, E. Lozada, y M. Rojas-Medar, “Results for a control problem for a sis epidemic reaction–diffusion model,” *Symmetry*, vol. 15, no. 6, 2023, Art. ID 1224, doi: 10.3390/sym15061224.
- [14] B. Dembele, A. Friedman, y A.-A. Yakubu, “Mathematical model for optimal use of sulfadoxine–pyrimethamine as a temporary malaria vaccine,” *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 72, no. 4, pp. 914–930, 2010, doi: 10.1007/s11538-009-9476-9.
- [15] Z.-C. Deng, L. Yang, J.-N. Yu, y G.-W. Luo, “An inverse problem of identifying the coefficient in a nonlinear parabolic equation,” *Nonlinear Anal.*, vol. 71, no. 12, pp. 6212–6221, 2009, doi: 10.1016/j.na.2009.06.014.
- [16] O. Diekmann y J. A. P. Heesterbeek, *Mathematical epidemiology of infectious diseases: Model building, analysis and interpretation*, ser. Wiley Series in Mathematical and Computational Biology. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2000.
- [17] L. Djebara, R. Douaifia, S. Abdelmalek, y S. Bendoukha, “Global and local asymptotic stability of an epidemic reaction-diffusion model with a nonlinear incidence,” *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 45, no. 11, pp. 6766–6790, 2022.
- [18] J. Ge, L. Lin, y L. Zhang, “A diffusive SIS epidemic model incorporating the media coverage impact in the heterogeneous environment,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, vol. 22, no. 7, pp. 2763–2776, 2017, doi: 10.3934/dcdsb.2017134.
- [19] Q. Ge, Z. Li, y Z. Teng, “Probability analysis of a stochastic SIS epidemic model,” *Stoch. Dyn.*, vol. 17, no. 6, 2017, Art. ID 1750041, doi: 10.1142/S0219493717500411.
- [20] M. D. Gunzburger, *Perspectives in flow control and optimization*, ser. Advances in Design and Control. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2003, vol. 5.
- [21] A. Kirsch, *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, 2nd ed., ser. Applied Mathematical Sciences. Springer, New York, 2011, vol. 120, doi: 10.1007/978-1-4419-8474-6.
- [22] M. Koivu-Jolma y A. Annila, “Epidemic as a natural process,” *Math. Biosci.*, vol. 299, pp. 97–102, 2018, doi: 10.1016/j.mbs.2018.03.012.

- [23] N. V. Krylov, *Lectures on elliptic and parabolic equations in Sobolev spaces*, ser. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008, vol. 96, doi: 10.1090/gsm/096.
- [24] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, y N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, ser. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1968, vol. 23.
- [25] G. M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996, doi: 10.1142/3302.
- [26] X. Lu, S. Wang, S. Liu, y J. Li, “An SEI infection model incorporating media impact,” *Math. Biosci. Eng.*, vol. 14, no. 5-6, pp. 1317–1335, 2017, doi: 10.3934/mbe.2017068.
- [27] T. T. Marinov, R. S. Marinova, J. Omojola, y M. Jackson, “Inverse problem for coefficient identification in SIR epidemic models,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 67, no. 12, pp. 2218–2227, 2014, doi: 10.1016/j.camwa.2014.02.002.
- [28] A. Mummert y O. M. Otunuga, “Parameter identification for a stochastic SEIRS epidemic model: case study influenza,” *J. Math. Biol.*, vol. 79, no. 2, pp. 705–729, 2019, doi: 10.1007/s00285-019-01374-z.
- [29] A. Nwankwo y D. Okuonghae, “Mathematical analysis of the transmission dynamics of HIV syphilis co-infection in the presence of treatment for syphilis,” *Bull. Math. Biol.*, vol. 80, no. 3, pp. 437–492, 2018, doi: 10.1007/s11538-017-0384-0.
- [30] A. Rahmoun, B. Ainseba, y D. Benmerzouk, “Optimal control applied on an HIV-1 within-host model,” *Math. Methods Appl. Sci.*, vol. 39, no. 8, pp. 2118–2135, 2016, doi: 10.1002/mma.3628.
- [31] C. M. Saad-Roy, P. van den Driessche, y A.-A. Yakubu, “A mathematical model of anthrax transmission in animal populations,” *Bull. Math. Biol.*, vol. 79, no. 2, pp. 303–324, 2017, doi: 10.1007/s11538-016-0238-1.
- [32] K. Sakthivel, S. Gnanavel, N. Barani Balan, y K. Balachandran, “Inverse problem for the reaction diffusion system by optimization method,” *Appl. Math. Model.*, vol. 35, no. 1, pp. 571–579, 2011, doi: 10.1016/j.apm.2010.07.024.
- [33] D. Uciński, *Optimal measurement methods for distributed parameter system identification*, ser. Systems and Control Series. CRC Press, Boca Raton, FL, 2005.
- [34] V. M. Veliov, “Numerical approximations in optimal control of a class of heterogeneous systems,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 70, no. 11, pp. 2652–2660, 2015, doi: 10.1016/j.camwa.2015.04.029.

- 
- [35] A. Widder y C. Kuehn, “Heterogeneous population dynamics and scaling laws near epidemic outbreaks,” *Math. Biosci. Eng.*, vol. 13, no. 5, pp. 1093–1118, 2016, doi: 10.3934/mbe.2016032.
  - [36] H. Xiang y B. Liu, “Solving the inverse problem of an SIS epidemic reaction-diffusion model by optimal control methods,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 70, no. 5, pp. 805–819, 2015, doi: 10.1016/j.camwa.2015.05.025.
  - [37] S. Zhi, H.-T. Niu, y Y. Su, “Global dynamics of a diffusive SIRS epidemic model in a spatially heterogeneous environment,” *Appl. Anal.*, vol. 104, no. 3, pp. 390–418, 2025, doi: 10.1080/00036811.2024.2367667.

C O M P E N D I O

## Ciclos límite en el plano: Contribuciones desde Chile

J. D. GARCÍA-SALDAÑA<sup>1</sup> 

S. REBOLLO-PERDOMO<sup>2,✉</sup> 

<sup>1</sup> Departamento de Matemática y Física Aplicadas, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción, Chile.

*jgarcias@ucsc.cl*

<sup>2</sup> Departamento de Matemática, Universidad del Bío-Bío, Concepción, Chile.

*srebollo@ubioobio.cl*

### RESUMEN

El objetivo de este artículo es destacar algunas contribuciones significativas realizadas desde Chile al estudio de ciclos límite en sistemas diferenciales polinomiales en el plano real, en relación con la segunda parte del problema 16 de Hilbert. Este trabajo se fundamenta en dos motivaciones principales: por una parte, algunos de los resultados analizados no han recibido la difusión que merecen; por otra, se anticipa un nuevo impulso en las próximas décadas en el estudio de los ciclos límite en sistemas diferenciales polinomiales. Los aportes presentados se sitúan dentro del panorama internacional y se examinan desafíos de investigación en este campo.

**Palabras claves:** Ciclo límite, órbita periódica, sistema diferencial, problema 16 de Hilbert.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 34C07, 34C08, 34C25, 37G15.

Publicado: 15 de octubre de 2025

Aceptado: 26 de mayo de 2025

Recibido: 30 de noviembre de 2024



©2025 J. D. García-Saldaña *et al.* Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

S U R V E Y

## Limit cycles in the plane: Contributions from Chile

J. D. GARCÍA-SALDAÑA<sup>1</sup> 

S. REBOLLO-PERDOMO<sup>2,✉</sup> 

<sup>1</sup> Departamento de Matemática y Física Aplicadas, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción, Chile.

*jgarcias@ucsc.cl*

<sup>2</sup> Departamento de Matemática, Universidad del Bío-Bío, Concepción, Chile.

*srebollo@ubiobio.cl*

### ABSTRACT

This article aims to highlight some important contributions made from Chile to the study of limit cycles of polynomial differential systems in the real plane, concerning the second half of Hilbert's sixteenth problem. This work is based on two main motivations: on the one hand, some of the results we analyze have not received the attention they deserve; and on the other hand, we expect renewed momentum in the coming decades in the study of limit cycles of polynomial differential systems. The results we present are situated within the international landscape, and we examine research challenges in this field.

**Keywords and Phrases:** Limit cycle, periodic orbit, differential system, Hilbert's sixteenth problem.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 34C07, 34C08, 34C25, 37G15.

Published: 15 October, 2025

Accepted: 26 May, 2025

Received: 30 November, 2024



©2025 J. D. García-Saldaña *et al.* This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

## 1. Introducción

Consideremos un *sistema diferencial polinomial autónomo en el plano real*, esto es, un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

donde  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  son polinomios en dos variables reales con coeficientes en  $\mathbb{R}$  y donde  $t$  es una variable independiente real, considerada usualmente como el tiempo. Recordemos que una *solución del sistema diferencial* (1) es una función

$$\phi : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \phi(t) = (x(t), y(t)),$$

que satisface (1) en todo  $(a, b)$ , esto es,

$$\frac{d}{dt}(\phi(t)) = \left( \frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t) \right) = (P(\phi(t)), Q(\phi(t))), \quad \forall t \in (a, b).$$

En tal caso, a medida que  $t$  varía,  $\phi(t) = (x(t), y(t))$  describe una curva en  $\mathbb{R}^2$  llamada *órbita del sistema diferencial* (1). Esta órbita depende de la *condición inicial*  $\phi(0) = (x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ , y al considerar todas las condiciones iniciales posibles se obtiene una colección de órbitas llamada *retrato fase del sistema diferencial*.

Dentro de las posibles soluciones que un sistema diferencial puede tener, hay dos tipos especiales: las soluciones constantes y las soluciones periódicas. La órbita definida por una solución constante es una *singularidad* del sistema diferencial y la órbita definida por una solución periódica es un *ciclo* u *órbita periódica* del sistema diferencial, la cual es homeomorfa a la circunferencia unitaria  $\mathbb{S}^1 := \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ . Cualquier sistema diferencial (1) tiene solo tres tipos de órbitas: singularidades, órbitas periódicas y órbitas homeomorfas al intervalo unitario  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ . Por lo cual, la configuración de todas las órbitas de un sistema diferencial determina una foliación (singular) de dimensión uno en  $\mathbb{R}^2$  y el retrato fase del sistema diferencial es una descripción geométrico-topológica de tal foliación.

Fue Henri Poincaré, en su trabajo seminal sobre la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales [34–37], quien descubrió la existencia de ciclos límite, un tipo especial de órbitas periódicas; ver §2 para más detalles. Este tipo de órbitas llamaron poderosamente la atención de Poincaré, por lo cual desarrolló varias herramientas para su estudio, como la ahora llamada aplicación de primer retorno de Poincaré, el teorema de la región anular, el método de parámetros pequeños, etc. Además, demostró que existen sistemas diferenciales (1) que pueden tener ciclos límite y que éstos tienen un papel esencial en la determinación del retrato fase del sistema diferencial.

Después del trabajo de Poincaré, David Hilbert presentó, en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticos de 1900, una lista de 23 problemas que consideraba fundamentales para la investigación matemática del siglo XX; ver [18]. La segunda parte del problema 16 de la lista de problemas de Hilbert plantea la siguiente pregunta:

¿Cuál es el número máximo y la posición relativa de los ciclos límite que puede presentar un sistema diferencial polinomial (1) de grado fijo?

De este modo, Hilbert anticipó que el estudio de los ciclos límite en sistemas diferenciales polinomiales en el plano sería uno de los problemas más trascendentales del siglo XX. No se equivocó: aunque este problema sigue siendo uno de los más desafiantes de su célebre lista y permanece abierto incluso para sistemas diferenciales polinomiales de grado dos, su investigación ha impulsado el desarrollo de diversas áreas fundamentales de la teoría moderna de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos, como la teoría de bifurcaciones, la teoría de formas normales y la teoría de foliaciones, entre otras; ver [20].

El interés y la relevancia de la investigación sobre los ciclos límite en sistemas diferenciales han sido tan significativos que, en 1998, Steve Smale destacó este mismo problema, pero restringido a los sistemas diferenciales polinomiales de Liénard, como uno de los problemas más desafiantes para el siglo XXI; ver [45].

Por otra parte, muchos fenómenos de las ciencias aplicadas que son modelados por sistemas diferenciales tienen movimientos periódicos, por lo cual la investigación de las órbitas periódicas, en general, y los ciclos límite, en particular, es esencial también desde el punto de vista aplicado. Por ejemplo, en biología, los ciclos límite pueden representar las fluctuaciones periódicas en poblaciones de animales, mientras que en ingeniería y física, describen comportamientos cíclicos en sistemas mecánicos o eléctricos. Resolver la segunda parte del problema 16 de Hilbert proporcionaría no solo una respuesta teórica, sino también herramientas prácticas para entender y predecir el comportamiento de sistemas dinámicos en múltiples contextos científicos.

En este trabajo, queremos destacar algunas contribuciones relevantes de matemáticos que desarrollan su investigación en Chile a la teoría de ciclos límite y su relación con la segunda parte del problema 16 de Hilbert.

## 2. El concepto de ciclo límite

El primer ejemplo concreto de un sistema diferencial exhibiendo un ciclo límite fue dado por Poincaré en [35, p. 278]. Usando nuestra notación, tal sistema es

$$\frac{dx}{dt} = x(x^2 + y^2 - 1) - y(x^2 + y^2 + 1), \quad \frac{dy}{dt} = y(x^2 + y^2 - 1) + x(x^2 + y^2 + 1).$$

Poincaré demostró que la circunferencia unitaria  $\mathbb{S}^1$  es un ciclo límite del sistema diferencial mostrando que todas las circunferencias centradas en el origen con radio positivo y diferente de 1 son curvas sin contacto para el sistema diferencial, es decir, son curvas que son atravesadas transversalmente por las órbitas del sistema diferencial. Además, el sistema tiene una única singularidad en el origen. Con esto, Poincaré construyó el retrato fase del sistema diferencial mostrado en la Figura 1 a). Notar que el retrato fase está dado en lo que hoy llamamos *disco de Poincaré*, una compactificación de  $\mathbb{R}^2$  a través de la proyección central sobre la esfera de Poincaré; ver [32, §3.10]. Esto permite describir y entender el comportamiento de las órbitas del sistema diferencial cuando las órbitas son no acotadas y “tienden a infinito”. De esta manera, el interior del disco de Poincaré se corresponde con el plano  $\mathbb{R}^2$  y su frontera representa los llamados “puntos al infinito”.

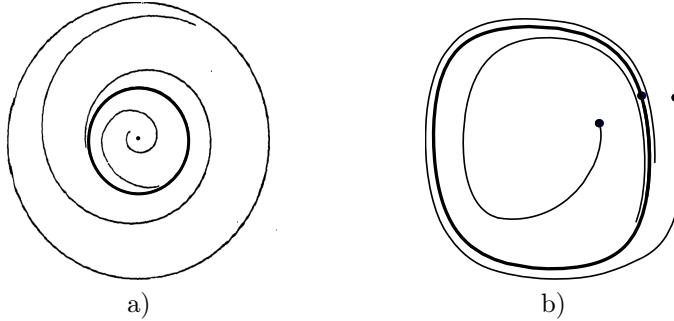


Figura 1: En a) primer ciclo límite de Poincaré [35, p. 279]. En b) comportamiento típico de las órbitas cercanas a un ciclo límite (en negrita); los puntos son condiciones iniciales.

De acuerdo con lo descrito por Poincaré, un ciclo límite es un ciclo del sistema diferencial que es asintóticamente abordado, en tiempo pasado ( $t \rightarrow -\infty$ ) o tiempo futuro ( $t \rightarrow +\infty$ ), por otras órbitas del mismo sistema diferencial pero sin llegar a él; ver Figura 1 b). De forma más precisa, un *ciclo límite* de un sistema diferencial es una órbita periódica del sistema que es topológicamente aislada en el conjunto de todas las órbitas periódicas del sistema.

### 3. Segunda parte del problema 16 de Hilbert

El objetivo principal de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, introducida y desarrollada por Poincaré, es describir los retratos fase de sistemas diferenciales autónomos. Para lograr este objetivo en el caso planar, resulta fundamental determinar la configuración de sus ciclos límite, es decir, el número y la posición relativa de los ciclos límite en cada sistema diferencial planar autónomo. En [35], Poincaré demostró que un sistema diferencial (1) sin conexiones de silla tiene solo un número finito de ciclos límite. El problema más famoso relacionado con el estudio de ciclos límite es la segunda parte del problema 16 de Hilbert, que se ha fragmentado en diferentes subproblemas y actualmente se plantea de la siguiente manera.

**Segunda parte del problema 16 de Hilbert.** Considere un sistema diferencial polinomial arbitrario

$$\frac{dx}{dt} = P_n(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q_n(x, y), \quad (2)$$

de grado  $n = \max\{\text{grado } P_n, \text{grado } Q_n\}$ .

**Parte A.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , ¿cada sistema diferencial (2) tiene un número finito,  $\mathcal{H}(P_n, Q_n)$ , de ciclos límite?

**Parte B.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , ¿existe  $\mathcal{H}(n) \in \mathbb{N}$ , que dependa solo de  $n$ , tal que  $\mathcal{H}(P_n, Q_n) \leq \mathcal{H}(n)$ ?

**Parte C.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , hallar el valor de  $\mathcal{H}(n)$  (si existe).

**Parte D.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , obtener todas las configuraciones posibles (topológicamente distintas) de ciclos límite, al variar  $P_n$  y  $Q_n$  en (2).

Si  $n = 1$ , cualquier sistema diferencial de la forma (2) es lineal y no posee ciclos límite (resultado elemental, ver [32, §1.5]). Así,  $\mathcal{H}(1) = 0$ . Para  $n \geq 2$ , la situación se complica considerablemente. De hecho, podemos afirmar que la investigación sobre este problema ha tenido una historia dramática, casi digna de una novela. A continuación mencionaremos algunos de los eventos más relevantes.

### 3.1. Hitos clave hasta 1980

En 1923, Henri Dulac afirmó que la respuesta a la Parte A era afirmativa [11]. En 1952, Nicolai Bautin demostró la existencia de sistemas diferenciales cuadráticos (sistemas (2) de grado  $n = 2$ ) con tres ciclos límite [2] y a finales de la década de 1950, Ivan Petrovski y Yevgueni Landis afirmaron que  $\mathcal{H}(2) = 3$  [33]. Sin embargo, en la década de 1960 su afirmación fue refutada [24], y en 1979 se construyeron ejemplos de sistemas diferenciales cuadráticos con cuatro ciclos límite [9, 44]. Bajo este escenario, el avance en la solución del problema sufrió un retroceso significativo.

### 3.2. Hitos clave entre 1980 y 1999

A principios de la década de 1980, Yulij Ilyashenko descubrió una falla en la prueba de Dulac [19], y en 1984 demostró que los sistemas diferenciales (2) con solo singularidades no degeneradas tienen un número finito de ciclos límite [22]. A principios de la década de 1990, tanto Ilyashenko [23] como Jean Écalle [14] afirmaron, de manera independiente, haber encontrado una prueba de la afirmación de Dulac para la Parte A. Pocos años después de la publicación de estos trabajos, Smale escribía: “estos dos artículos aún no han sido completamente asimilados por la comunidad matemática”. Hasta donde sabemos, esta afirmación sigue siendo válida hasta el día de hoy.

Con el fin de profundizar en la comprensión de la dificultad del problema, en 1994, Fredy Dumortier, Robert Roussarie y Christiane Rousseau plantearon un programa [12, 13] para resolver la Parte B

en el caso cuadrático. Sin embargo, a pesar de los esfuerzos realizados por investigadores tan destacados como los mencionados arriba, la Parte B y la Parte C del problema permanecen abiertas, incluso en el caso  $n = 2$ .

Debido a la complejidad inherente a la investigación sobre ciclos límite, se han planteado varios subproblemas. Un ejemplo de esto es la restricción de la segunda parte del problema 16 de Hilbert a la familia de sistemas de Liénard, propuesta por Smale. Otro subproblema de gran relevancia es la versión “tangencial” o “infinitesimal” de la segunda parte del problema 16 de Hilbert, que se refiere al estudio de la bifurcación de ciclos límite bajo perturbaciones de un sistema integrable que tiene un conjunto foliado por órbitas periódicas. Además, en las últimas décadas, se ha desarrollado el estudio de ciclos límite en diversas familias especiales de sistemas diferenciales polinomiales, como las de Kukles, Kolmogórov y otras; ver siguiente sección para más detalles.

## 4. Versiones de la segunda parte del problema 16 de Hilbert

### 4.1. Sistemas Hamiltonianos perturbados

Supongamos que  $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es un polinomio real de grado  $m + 1$ . Consideremos el *sistema Hamiltoniano planar*

$$\dot{x} = H_y(x, y), \quad \dot{y} = -H_x(x, y), \quad (3_0)$$

donde  $H_x(x, y) := \frac{\partial}{\partial x} H(x, y)$  y  $H_y(x, y) := \frac{\partial}{\partial y} H(x, y)$ , el cual es un sistema diferencial polinomial de grado  $m$ . Una idea clásica, debida a Poincaré y que fue continuada por L. Pontryagin, A. Andronov, Ilyashenko, V. Melnikov, etc., es estudiar el *sistema Hamiltoniano perturbado*:

$$\dot{x} = H_y(x, y) + \varepsilon B(x, y; \varepsilon), \quad \dot{y} = -H_x(x, y) - \varepsilon A(x, y; \varepsilon), \quad (3_\varepsilon)$$

donde  $A(x, y; \varepsilon)$  y  $B(x, y; \varepsilon)$  son polinomios de grado  $n$  en las variables  $x$  e  $y$ , cuyos coeficientes son funciones analíticas en  $\varepsilon$ , un parámetro real que pertenece a una vecindad del 0 suficientemente pequeña:  $\varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)$ . Aquí el problema central es saber qué tan diferente es el retrato de fase del sistema perturbado  $(3_\varepsilon)$ , para  $\varepsilon \neq 0$ , en comparación con el retrato fase del sistema no perturbado  $(3_0)$ , el cual se entiende completamente pues de la teoría clásica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias sabemos que las órbitas de este sistema Hamiltoniano están contenidas en las curvas de nivel,  $H^{-1}(c)$ , de la función  $H$ , la cual recibe el nombre de *Hamiltoniano* asociado al sistema.

El interés en estos sistemas dentro del contexto de ciclos límite radica en la siguiente idea: supongamos que la foliación definida en  $\mathbb{R}^2$  por las órbitas de  $(3_0)$  posee una familia de ciclos  $\gamma_c \subset H^{-1}(c)$ , que depende continuamente del parámetro  $c$  variando en algún intervalo  $(a, b)$ . Entonces bajo la perturbación, a veces, algunos de estos ciclos no se rompen mientras que todos sus ciclos vecinos sí lo hacen. Este tipo de ciclos que persisten bajo la perturbación dan origen a ciclos límite del sistema perturbado  $(3_\varepsilon)$ , con  $\varepsilon \neq 0$ , y representan una clase de las órbitas que más interesan en el estudio de sistemas Hamiltonianos perturbados. Esta propiedad establece una conexión entre la segunda parte del problema 16 de Hilbert y el estudio de los ciclos límite de  $(3_\varepsilon)$ . De esta manera, obtenemos el siguiente problema

**Versión infinitesimal de la segunda parte del problema 16 de Hilbert.** Hallar la cota superior  $\mathcal{H}(m, n)$ , que dependa únicamente de  $m$  y  $n$ , para el número de ciclos límite del sistema perturbado  $(3_\varepsilon)$ , con  $\varepsilon \neq 0$ , que pueden generarse a partir de ciclos de  $(3_0)$  bajo la perturbación.

De hecho, esta conexión es muy importante ya que los sistemas diferenciales  $(3_\varepsilon)$  son más manejables y han dado excelente información sobre el problema general. Por ejemplo, han permitido obtener cotas inferiores para  $\mathcal{H}(n)$  y posibles configuraciones de ciclos límite; ver [10, 21].

#### 4.2. Sistemas de Liénard

Un *sistema de Liénard polinomial (generalizado)* es un sistema diferencial planar de la forma

$$\dot{x} = y - F_n(x), \quad \dot{y} = -x - g_m(x), \quad (4)$$

donde  $F_n(x)$  y  $g_m(x)$  son polinomios de grados  $n$  y  $m$ , respectivamente, tal que  $n \geq 2$  y  $F_n(0) = 0$ . Si  $g_m(x) \equiv 0$ , entonces (4) es un *sistema de Liénard polinomial clásico*. La pregunta principal sobre estos sistemas es:

¿cuál es el número máximo,  $\mathcal{H}_{\text{Lie}}(n, m)$ , de ciclos límite de (4)?

La versión de la segunda parte del problema 16 de Hilbert que planteó Smale respecto de los sistemas de Liénard, en su lista de problemas para el siglo XXI, consiste en hallar  $\mathcal{H}_{\text{Lie}}(n, 0)$ .

#### 4.3. Sistemas de Kukles

Un *sistema de Kukles* es un sistema diferencial polinomial planar de la forma

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = Q_n(x, y), \quad (5)$$

donde  $Q_n(x, y)$  es un polinomio real de grado  $n \geq 2$  y tal que  $y$  no lo divide.

El estudio de los ciclos límite en esta familia ha sido abordado por varios autores en las últimas tres décadas, convirtiéndola en una familia relevante dentro de los sistemas diferenciales polinomiales planares. La principal pregunta sobre estos sistemas es:

¿cuál es el número máximo,  $\mathcal{H}_{\text{Kuk}}(n)$ , de ciclos límite de (5)?

#### 4.4. Sistemas de Kolmogórov

Un *sistema de Kolmogórov polinomial planar* es un sistema diferencial de la forma

$$\dot{x} = x P_{n-1}(x, y), \quad \dot{y} = y Q_{n-1}(x, y), \quad (6)$$

donde  $P_{n-1}(x, y)$  y  $Q_{n-1}(x, y)$  son polinomios reales de grado  $n - 1$ , con  $n \geq 2$ .

Al igual que en las familias anteriores, la pregunta principal es:

¿cuál es el número máximo,  $\mathcal{H}_{\text{Kol}}(n)$ , de ciclos límite de (6)?

### 5. Contribuciones desde Chile

A pesar de los desafíos que presenta la resolución de la segunda parte del problema 16 de Hilbert, investigadores de universidades chilenas han realizado contribuciones valiosas que han enriquecido el estudio de este complejo problema. Estos avances, fruto de un esfuerzo colectivo y continuo, han permitido ampliar la comprensión de los ciclos límite en sistemas diferenciales polinomiales. A continuación, se destacan algunos de los logros más relevantes en este ámbito.

#### 5.1. Aportes entre 1980 y 1999

Con la aparición, en 1979-80, de ejemplos de sistemas cuadráticos con cuatro ciclos límite, se reforzó aún más la sospecha de que la demostración de Dulac de 1923, que afirmaba la finitud del número de ciclos límite, era incorrecta.

Por esas fechas, Rodrigo Bamón partió de la Universidad de Chile para continuar su doctorado en el Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) en Brasil, bajo la dirección de Jorge Sotomayor, quien, según las palabras de Bamón<sup>1</sup> consideraba errónea la prueba de Dulac. Bamón se sintió atraído (nunca mejor dicho) por los ciclos límite y, hacia su tercer año de doctorado, decidió intentar ofrecer una nueva demostración de la finitud de los ciclos límite en sistemas diferenciales cuadráticos. Cabe destacar que, para entonces, ya se reconocía ampliamente que la prueba de Dulac

---

<sup>1</sup>Un especial agradecimiento a Rodrigo Bamón por la enriquecedora conversación en la que compartió su valiosa experiencia y perspectiva del problema en esa época.

no estaba completa, aunque el error evidente en su demostración, identificado por Ilyashenko, no fue publicado hasta 1985.

El problema de la finitud del número de ciclos límite en sistemas diferenciales en el plano real se reduce a probar la no acumulación de ciclos límite en los llamados *ciclos singulares* (acotados y no acotados). A esto se le pasó a llamar el *Problema de Dulac*.

Bamón cuenta que clasificó todos los ciclos singulares de sistemas diferenciales cuadráticos en el plano y probó que todos ellos, salvo dos, no podían ser acumulados por ciclos límite. Esto fue su tesis doctoral (1983). Para uno de estos ciclos singulares sabía como probar que no era acumulado por ciclos límite, sin embargo, no lo incluyó en su tesis. Para el otro ciclo singular (hiperbólico acotado) no tenía idea de como probar que no era acumulado por ciclos límite, hasta que en el verano de 1985, en el IMPA, escuchó una charla de Robert Moussu sobre un reciente trabajo de Ilyashenko donde mostraba que todo ciclo singular hiperbólico, de cualquier sistema diferencial polinomial en el plano, no podía ser acumulado por ciclos límite [22]. Bamón se dio cuenta que usando este resultado de Ilyashenko y su propia tesis resolvía el Problema de Dulac para sistemas diferenciales cuadráticos, en otras palabras, completaba la prueba de la finitud del número de ciclos límite para sistemas diferenciales cuadráticos. Bamón contó con el apoyo del IMPA para que concluyera su trabajo y para publicarlo en 1986 en la prestigiosa revista *Publications Mathématiques de l'IHÉS*. Rodrigo Bamón mostraba al mundo su aporte a la segunda parte del problema 16 de Hilbert:

**Teorema 5.1** (Bamón [1]). *Cada sistema diferencial cuadrático en  $\mathbb{R}^2$  tiene un número finito de ciclos límite.*

Moussu conoció el resultado de Bamón durante su estancia en el IMPA y cuando regresó a Francia expuso en el prestigioso *Seminaire Bourbaki* sobre “Le Problème de la finitude du nombre de cycles limites [d’après R. Bamón et Yu. S. Il’yasenko]”. Este hecho reflejó el considerable interés que el resultado de Bamón suscitó en su momento.

Con sus resultados, Bamón generó un creciente interés por los ciclos límite entre diversos investigadores en sistemas dinámicos, tanto en Santiago como en otras regiones. Así, a finales de la década de 1980 y a principios de la década de 1990, se publicaron varios trabajos sobre ciclos límite de sistemas diferenciales polinomiales planares. Sin pretender ser exhaustivos, a continuación se mencionaron algunos de estos estudios.

Myrna Wallace, de la Universidad de Concepción, Jorge Billeke, de la Universidad de Santiago de Chile, y Hernán Burgos, de la Universidad de la Frontera, realizaron una serie de trabajos sobre sistemas de Liénard polinomiales, tanto clásicos como generalizados [3–6]. Uno de esos trabajos trata sobre sistemas de Liénard clásicos perturbados, es decir, sistemas de la forma  $(3_\varepsilon)$  que son de Liénard. Concretamente, en [5] (1992), consideran el sistema de Liénard perturbado:

$$\dot{x} = y - \varepsilon(a_1x + a_2z^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5), \quad \dot{y} = -x. \quad (7_\varepsilon)$$

Aquí, el Hamiltoniano asociado al sistema no perturbado es  $H(x, y) = (x^2 + y^2)/2$  y al sistema no perturbado  $(7_0)$ , se le conoce como el *centro lineal* o el *oscilador armónico*.

Sistemas de Liénard polinomiales de grado arbitrario, provenientes de perturbaciones del centro lineal, ya habían sido estudiados en 1977 por Alcides Lins-Neto, Wellington de Melo y Charles C. Pugh [25]. Sus resultados prueban que existen sistemas  $(7_\varepsilon)$  con dos ciclos límite. Wallace, Billeke y Burgos realizaron un estudio detallado en el disco de Poincaré de  $(7_\varepsilon)$  y uno de sus resultados principales en [5] se puede enunciar como:

**Teorema 5.2.** *Cada sistema de Liénard  $(7_\varepsilon)$  tiene a lo más dos ciclos límite.*

Con este resultado se completaba el estudio del número máximo de ciclos límite para sistemas de Liénard polinomiales perturbados de grado cinco.

Por aquella misma época, Ana María Urbina, Mario y Guillermo León de la Barra así como Moisés Cañas, todos ellos de la Universidad Técnica Federico Santa María de Valparaíso, realizaron varios trabajos en sistemas diferenciales polinomiales planares. En particular, entre 1991 y 1992 estudiaron los sistemas de Liénard generalizados

$$\dot{x} = y - (a_m x^m + \dots + a_N x^N), \quad \dot{y} = -x^{2n-1}, \quad (8)$$

donde  $m \geq 2$  y  $N \geq m$ , y también el sistema de Liénard perturbado

$$\dot{x} = 2y - \varepsilon(a_2 x^2 + \dots + a_N x^N), \quad \dot{y} = -4x^3, \quad (9_\varepsilon)$$

cuyo Hamiltoniano asociado al sistema no perturbado es  $H(x, y) = y^2 + x^4$ .

El sistema (8) fue estudiado en [47] y representó una generalización del trabajo de Lins-Neto, de Melo y Pugh, de 1977. El sistema  $(9_\varepsilon)$  se estudió en [46], usando el enfoque de integrales Abelianas, ver siguiente subsección y [10]. Los resultados principales de cada uno de estos trabajos los podemos enunciar de la siguiente forma:

**Teorema 5.3.** *Supongamos  $s \in \mathbb{N}$ .*

- *Si  $n = 2s$ , y  $N \geq 2s + 3$ , entonces  $\mathcal{H}_{Lie}(N, 2s) \geq \left[\frac{N-1}{2}\right] - s$ .*
- *Si  $n = 2s - 1$  y  $N \geq 2s + 1$ , entonces  $\mathcal{H}_{Lie}(N, 2s - 1) \geq \left[\frac{N+1}{2}\right] - s$ .*

**Teorema 5.4.** *Existen sistemas  $(9_\varepsilon)$  con al menos  $\left[\frac{N-1}{2}\right] - 1$  ciclos límite.*

Víctor Guíñez, de la Universidad de Chile, Eduardo Sáez e Iván Szántó, de la Universidad Técnica Federico Santa María de Valparaíso, trabajaron sobre bifurcación de ciclos límite de sistemas diferenciales polinomiales. En particular, en 1990 estudiaron el número máximo,  $S(n)$ , de puntos singulares aislados contenidos en la región acotada determinada por un ciclo límite de un sistema

diferencial polinomial planar de grado  $n$ . Uno de sus resultados principales en [17] se puede enunciar como:

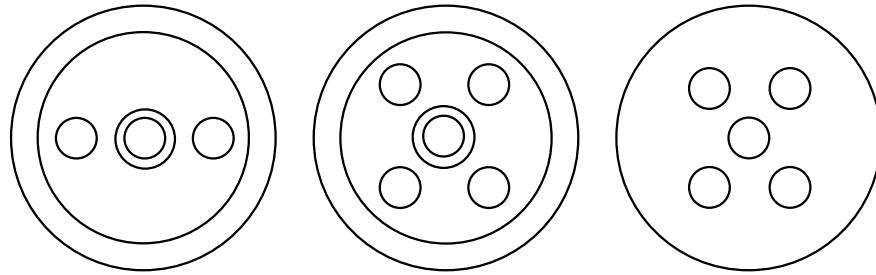
**Teorema 5.5.** *Existe un sistema diferencial polinomial planar de grado  $2k+1$ , tal que  $S(2k+1) = (2k+1)^2$ .*

La prueba de este resultado se basa en la construcción de un sistema Hamiltoniano perturbado que es polinomial. Siguiendo la misma idea, en 1993 estudian posibles configuraciones de ciclos límite del sistema diferencial cúbico perturbado

$$\dot{x} = -y - 2cy^2 + ax^2y + y^3 + \varepsilon xy(y-4), \quad \dot{y} = x + 2dx^2 - x^3 - bxy^2 + \varepsilon xy(x-4), \quad (10_\varepsilon)$$

y uno de sus principales resultados en [16] lo podemos enunciar de la siguiente manera:

**Teorema 5.6.** *Existen  $a > b > 1$ ,  $c, d, \varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)$  tal que el sistema  $(10_\varepsilon)$  tiene una de las siguientes configuraciones de ciclos límite en el disco de Poincaré.*



Este resultado es una contribución a la Parte D de la segunda parte del problema 16 de Hilbert. El primer resultado general relativo a esta parte apareció en [27], donde proporcionan una cota sobre el grado del sistema diferencial polinomial que puede realizar una configuración de ciclos límite. De acuerdo con [27] las tres configuraciones del teorema anterior pueden ser realizadas por un sistema diferencial polinomial de grado a lo más 15, 23 y 19, respectivamente. El teorema anterior proporciona sistemas diferenciales polinomiales del grado mínimo posible que realizan esas configuraciones, por ello es un resultado relevante, sin embargo, no fue citado en [27].

En la segunda parte de la década de 1990, Sáez y Szántó, realizaron algunos estudios sobre sistemas de Kolmogórov polinomiales planares [28, 41]. En particular, uno de sus resultados en [28] lo podemos enunciar como sigue.

**Teorema 5.7.**  $\mathcal{H}_{\text{Kol}}(3) \geq 4$ .

## 5.2. Aportes entre 2000 y 2009

Con la publicación de los resultados de Écalle e Ilyashenko sobre la finitud del número de ciclos límite de cualquier sistema diferencial polinomial de grado  $n$ , surgió una gran efervescencia mundial

en torno al estudio de los ciclos límite. El interés de Sáez y Szántó por estos objetos no solo se mantuvo, sino que también se amplió con la incorporación de colaboradores internacionales. En la década de 2000, publicaron más de quince trabajos sobre ciclos límite y curvas algebraicas invariantes de sistemas diferenciales. Recordamos que una *curva algebraica invariante* de un sistema diferencial es una curva en  $\mathbb{R}^2$  definida por los ceros de un polinomio real  $f(x, y)$  que esta formada por órbitas del sistema diferencial. Aquí recordamos solo algunos resultados destacados de cuatro de esos trabajos. En 2002 publicaron [29], cuyo resultado principal lo podemos enunciar como:

**Teorema 5.8.**  $\mathcal{H}_{\text{Kol}}(3) \geq 6$ .

Este fue su último resultado sobre sistemas de Kolmogórov. Después, trabajaron en sistemas provenientes de modelos de carácter aplicado y en sistemas de Kukles. En este último tema publicaron varios artículos [7, 8, 26]. En 2008, consideraron el sistema de Kukles de grado cinco:

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = -a + bx + q_3(x, y)f(x, y), \quad (11)$$

donde  $b = 1 + 2a$ ,  $f(x, y) = a - 2ax + bx^2 + y^2$ , cuyos ceros definen una elipse invariante, y  $q_3(x, y) = 1 + \lambda y + b_{30}x^3 + b_{11}xy + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3$ . El resultado principal de su investigación, publicado en [42], lo podemos enunciar de la siguiente manera:

**Teorema 5.9.** *En el espacio de parámetros del sistema diferencial existe un conjunto abierto tal que (11) tiene al menos seis ciclos límite, uno de ellos es un ciclo límite (algebraico), que corresponde a la elipse invariante.*

Guíñez, Wallace y Billeke, por otro lado, prácticamente abandonaron el estudio de ciclos límite a partir del 2000. No obstante, su trabajo inspiró a varios estudiantes a continuar sus estudios de doctorado en temas relacionados con la segunda parte del problema 16 de Hilbert. Marco Uribe Santibáñez fue uno de estos estudiantes. Realizó su doctorado en la Université de Bourgogne, Francia, el cual concluyó en 2006 bajo la dirección de Pavao Mardešić. A su regreso a Chile, desde la Universidad de Católica de la Santísima Concepción, ha centrado su trabajo en temas relacionados con los ciclos límite. Sus principales contribuciones han sido en el ámbito de los sistemas Hamiltonianos perturbados. Para poder expresarlas de manera adecuada, es necesario introducir algunos conceptos adicionales.

Recordemos que, en un sistema Hamiltoniano perturbado, el objetivo es estudiar los ciclos límite que se originan a partir de los ciclos del sistema no perturbado. Una herramienta común para controlar estos ciclos límite es la *función de desplazamiento asociada a  $(3_\varepsilon)$  y la familia  $\{\gamma_c\}$* : una función analítica que tiene la forma

$$L(\varepsilon, c) = \varepsilon L_1(c) + \varepsilon^2 L_2(c) + \varepsilon^3 L_3(c) + \dots$$

El coeficiente  $L_i(c)$  es la *función de Poincaré–Pontryagin–Melnikov (PPM)* de  $i$ -ésimo orden. Los ciclos límite de  $(3_\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \neq 0$ , que bifurcan de los ciclos de  $(3_0)$  se estudian a través de la ceros de la primera función de PPM que no se anula  $L_k(c)$ , con  $k \geq 1$ . De hecho, el número máximo de ceros aislados, contando multiplicidades, de  $L_k(c)$  es una cota superior para el número de ciclos límite de  $(3_\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \neq 0$ , que bifurcan de los ciclos  $\{\gamma_c\}$  de  $(3_0)$ ; además, el número de ceros distintos de  $L_k(c)$  puede proporcionar una cota inferior para el número de estos ciclos límite.

Por conveniencia, el sistema diferencial  $(3_\varepsilon)$  lo escribimos en su versión Pfaffiana, esto es, como la ecuación diferencial perturbada

$$dH + \varepsilon\omega = 0,$$

con  $\omega = A(x, y; \varepsilon) dx + B(x, y; \varepsilon) dy$  (una 1-forma diferencial polinomial). Se sabe que  $L_1(c)$  esta dada siempre por una *integral Abeliana*, *i.e.*, la integral de una 1-forma racional sobre una curva algebraica, más precisamente

$$L_1(c) = - \int_{\gamma_c} \omega.$$

Si se calcula  $L_1(c)$  y no es idénticamente cero, entonces se conocerá el número máximo de ciclos límite que bifurcan de los ciclos  $\{\gamma_c\}$ . Si  $L_1(c) \equiv 0$ , entonces las funciones de PPM de orden 2, 3, … deben estudiarse hasta encontrar la primera que no se anula o concluir que el sistema no tiene ciclos límite. Si  $H(x, y) = (x^2 + y^2)/2$ , entonces  $L_k(c)$  siempre se puede calcular por una integral Abeliana, esto fue demostrado en 1996 por Françoise [15].

En 2006, Uribe estudió la ecuación Hamiltoniana perturbada

$$dH + \varepsilon\omega = 0, \tag{12_\varepsilon}$$

donde  $H(x, y) = x(y^2 - (x - 3)^2)$ ,  $\varepsilon \in (\mathbb{R}, 0)$  y  $\omega$  una 1-forma diferencial polinomial. Este sistema Hamiltoniano tiene tres rectas invariantes,  $H^{-1}(0)$ , que forman un triángulo, cuyo interior esta foliado por ciclos. Uribe probó en [48] el siguiente resultado.

**Teorema 5.10.** *La primera función de PPM no nula asociada al sistema (12 $_\varepsilon$ ) y a la familia de ciclos  $\{\gamma_c\}$ , que folian el interior del triángulo, pertenece al módulo  $\mathbb{C}[t, 1/t]$  generado por las integrales*

$$I_1(c) := \int_{\gamma_c} y \, dx, \quad I_2(c) := \int_{\gamma_c} x^2 y \, dx, \quad I^*(c) := \int_{\gamma_c} \ln x \, d \left( \ln \frac{y - x + 3}{y + x - 3} \right).$$

Este fue uno de los primeros ejemplos de sistemas diferenciales cuadráticos perturbados, para los cuales será difícil resolver la versión infinitesimal del problema 16 de Hilbert, debido a que  $I^*(c)$  no es una integral Abeliana. En 2009, Uribe generalizó este resultado para sistemas de la forma (12 $_\varepsilon$ ), con  $H(x, y)$  el producto de  $d + 1$  rectas [49].

### 5.3. Aportes entre 2010 y 2019

Dado lo reciente de este período y la facilidad con la que se pueden acceder a las publicaciones, no detallaremos resultados específicos como en los casos anteriores. Nos limitaremos a proporcionar una descripción general del contenido de dichas publicaciones y su relación con los temas discutidos en las secciones previas.

Sáez y Szántó continuaron su interés por los ciclos límite de sistemas de Kukles. En 2012, consideraron sistemas de Kukles perturbados y obtuvieron cotas inferiores para el número de ciclos límite de tales sistemas [43].

Por otro lado, Mariana Saavedra fue otra de las personas inspiradas por el grupo chileno de sistemas dinámicos. Estudió su doctorado en la Université de Bourgogne, Francia, el cual concluyó en 1995 bajo la dirección de Moussu. A su regreso a la Universidad de Concepción orientó su investigación principalmente en las propiedades del desarrollo asintótico de la aplicación de primer tiempo de retorno y de la función de periodo para ciclos singulares. Estos temas, aunque análogos y relacionados con el problema de Dulac, se desarrollaron sin considerar explícitamente las posibles implicancias sobre los ciclos límite. Sus resultados fueron publicados en [38–40].

En 2012, Saavedra, Wallace y Uribe, en colaboración con Mardešić, estudiaron las perturbaciones cuadráticas del triángulo Hamiltoniano [30] y determinaron el desarrollo de la función desplazamiento del sistema perturbado, lo cual es útil para establecer cotas superiores para el número de ciclos límite de estos sistemas. Posteriormente, Saavedra, Uribe y Mardešić extendieron estos resultados para perturbaciones de sistemas Hamiltonianos más generales [31].

## 6. Desafíos en la segunda parte del problema 16 de Hilbert

Como mencionamos en la introducción, el objetivo principal de este trabajo es destacar algunos de los aportes relevantes realizados desde Chile a la segunda parte del problema 16 de Hilbert, tarea que hemos llevado a cabo en la sección anterior. Sin embargo, un segundo objetivo, que también constituye la motivación inicial para la elaboración de este artículo, es reflexionar sobre uno de los progresos más recientes en torno a la cuestión de la finitud del número de ciclos límite en sistemas diferenciales polinomiales. La noticia en cuestión es la siguiente.

Recientemente, Melvin Yeung ha encontrado un contraejemplo [50] a uno de los argumentos utilizados por Ilyashenko para demostrar que todo sistema diferencial polinomial posee un número finito de ciclos límite.

Yeung presentó su construcción en diversos centros especializados en el tema, sin que se haya identificado error alguno en sus argumentos. Esto significa que la prueba de Ilyashenko está incompleta. Esta hallazgo abre una amplia gama de desafíos y nuevas perspectivas en el estudio de ciclos límite.

Recordemos que, a inicios de la década de 1990, se publicaron dos pruebas distintas sobre la finitud del número de ciclos límite. La prueba propuesta por Écalle podría ser correcta; sin embargo, como señaló Smale, esta no ha sido comprendida completamente en más de treinta años. En este contexto, parece natural plantear los siguientes desafíos:

- Obtener una nueva prueba de la finitud del número máximo de ciclos límite en sistemas diferenciales polinomiales en el plano.
- Desarrollar una demostración de dicha finitud utilizando métodos o herramientas suficientemente generales y adaptables para abordar también las tres primeras partes del problema 16 de Hilbert.
- Determinar el sistema diferencial polinomial de grado más pequeño que realice como ciclos límite una configuración dada de curvas cerradas aisladas en el plano (salvo homeomorfismos).

## 7. Conclusión

A lo largo de este trabajo hemos revisado algunos de los aportes significativos realizados desde Chile al estudio de los ciclos límite, con especial énfasis en su relación con la segunda parte del problema 16 de Hilbert. Estos avances han sido posibles gracias a la labor de destacados matemáticos chilenos, quienes, a través de sus investigaciones y de los vínculos establecidos con investigadores internacionales, han dejado un legado que continúa inspirando a nuevas generaciones.

Además, hemos discutido los principales desafíos actuales en torno a la segunda parte del problema 16 de Hilbert, destacando cómo la reciente identificación de posibles debilidades en la prueba de Ilyashenko reaviva el interés en este problema clásico, abriendo nuevas líneas de investigación y renovando la relevancia de métodos más generales que puedan abordar otras partes del problema.

El estudio de ciclos límite sigue siendo un campo fértil y desafiante, cuya resolución no solo enriquecerá la teoría matemática, sino que también impulsará avances en áreas relacionadas. El panorama actual, aunque complejo, invita a las nuevas generaciones de matemáticos a seguir explorando, construyendo sobre los logros previos y enfrentando con creatividad los retos aún abiertos.

## Agradecimientos

La primera autora es financiada por la Dirección de Investigación de la UCSC a través del proyecto DIREG 01/2024 y el Proyecto Ingeniería 2030 (ING222010004). El segundo autor es financiado por el proyecto RE2320122 de la Universidad del Bío-Bío.

## Referencias

- [1] R. Bamón, “Quadratic vector fields in the plane have a finite number of limit cycles,” *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, vol. 64, pp. 111–142, 1986, doi: 10.1007/BF02699193.
- [2] N. N. Bautin, “On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type,” in *American Mathematical Society Translations, Series 1, Vol. 100*. American Mathematical Society, 1954, pp. 397–413, translation from *Mat. Sbornik* (new series), vol. 30(72), no. 1, pp. 181–196 (1952).
- [3] J. Billeke y H. Burgos, “Consideraciones generales sobre campos polinomiales  $(y - f(x))\frac{\partial}{\partial x} + (-x + g(x, y))\frac{\partial}{\partial y}$ , problemas de estabilidad y ejemplos,” *Cubo*, vol. 6, pp. 25–46, 1990.
- [4] J. Billeke, H. Burgos, y M. Wallace, “Some theorems on the non existence, uniqueness and existence of two limit cycles for the Lienard equation of degree five,” *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena*, vol. 39, no. 1, pp. 11–27, 1991.
- [5] J. Billeke, H. Burgos, y M. Wallace, “Melnikov deviations and limit cycles for Liénard equations,” *Rev. Colomb. Mat.*, vol. 26, no. 1-4, pp. 1–24, 1992.
- [6] H. Burgos y J. Billeke, “Stability problems of perturbed Liénard equations by polynomials in  $\frac{\partial}{\partial y}$  direction,” in *Las Matemáticas en Costa Rica. Memorias del tercer congreso nacional de matemáticas, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica, Octubre 15-19, 1990. Vol. 2*. San José: Universidad de Costa Rica, 1990, pp. 29–47.
- [7] J. Chavarriga, I. A. García, E. Sáez, e I. Szántó, “Limit cycles in Kukles systems of arbitrary degree with invariant ellipse,” *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods*, vol. 67, no. 4, pp. 1005–1014, 2007, doi: 10.1016/j.na.2006.06.035.
- [8] J. Chavarriga, E. Sáez, I. Szántó, y M. Grau, “Coexistence of limit cycles and invariant algebraic curves for a Kukles system,” *Nonlinear Anal.*, vol. 59, no. 5, pp. 673–693, 2004, doi: 10.1016/j.na.2004.07.028.
- [9] L. S. Chen y M. S. Wang, “The relative position, and the number, of limit cycles of a quadratic differential system,” *Acta Math. Sinica*, vol. 22, no. 6, pp. 751–758, 1979.
- [10] C. Christopher y C. Li, *Limit cycles of differential equations*, ser. Adv. Courses in Math. – CRM Barc. Basel: Birkhäuser, 2007.
- [11] H. Dulac, “Sur les cycles limites.” *Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 51, pp. 45–188, 1923, doi: 10.24033/bsmf.1031.
- [12] F. Dumortier, R. Roussarie, y C. Rousseau, “Elementary graphics of cyclicity 1 and 2,” *Nonlinearity*, vol. 7, no. 3, pp. 1001–1043, 1994, doi: 10.1088/0951-7715/7/3/013.

- [13] F. Dumortier, R. Roussarie, y C. Rousseau, “Hilbert’s 16th problem for quadratic vector fields,” *J. Differ. Equations*, vol. 110, no. 1, pp. 86–133, 1994, doi: 10.1006/jdeq.1994.1061.
- [14] J. Écalle, *Introduction aux fonctions analyssables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*. Paris: Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts., 1992.
- [15] J. P. Francoise, “Successive derivatives of a first return map, application to the study of quadratic vector fields,” *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, vol. 16, no. 1, pp. 87–96, 1996, doi: 10.1017/S0143385700008725.
- [16] V. Guíñez, E. Sáez, e I. Szántó, “Small amplitude limit cycles for cubic systems,” *Can. Math. Bull.*, vol. 36, no. 1, pp. 54–63, 1993, doi: 10.4153/CMB-1993-009-4.
- [17] V. Guíñez, E. Sáez, e I. Szántó, “Limit cycles close to infinity of certain nonlinear differential equations,” *Can. Math. Bull.*, vol. 33, no. 1, pp. 55–59, 1990, doi: 10.4153/CMB-1990-009-8.
- [18] D. Hilbert, “Mathematical problems.” *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, vol. 37, no. 4, pp. 407–436, 2000, doi: 10.1090/S0273-0979-00-00881-8. Reprinted from *Bull. Am. Math. Soc.* 8, 437–479 (1902).
- [19] Y. Ilyashenko, “Dulac’s memoir “On limit cycles” and related questions of the local theory of differential equations.” *Russian Math. Surveys*, vol. 40, no. 6, pp. 1–49, 1969, doi: 10.1070/RM1985v040n06ABEH003701.
- [20] Y. Ilyashenko, “Centennial history of Hilbert’s 16th Problem,” *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, vol. 39, no. 3, pp. 301–354, 2002, doi: 10.1090/S0273-0979-02-00946-1.
- [21] Y. S. Ilyashenko, “The origin of limit cycles under perturbation of the equation  $dw/dz = -R_z/R_w$ , where  $R(z, w)$  is a polynomial,” *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 7, pp. 353–364, 1969, doi: 10.1070/SM1969v007n03ABEH001094.
- [22] Y. S. Il’yashenko, “Limit cycles of polynomial vector fields with nondegenerate singular points on the real plane,” *Funct. Anal. Appl.*, vol. 18, pp. 199–209, 1984, doi: 10.1007/BF01086157.
- [23] Y. S. Il’yashenko, *Finiteness theorems for limit cycles*, ser. Transl. Math. Monogr. Providence, RI: American Mathematical Society, 1991, vol. 94.
- [24] E. M. Landis e I. G. Petrovskii, “A letter to the editors,” *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 73(115), no. 1, p. 160, 1967, doi: 10.1070/SM1967v002n01ABEH002332.
- [25] A. Lins, W. de Melo, y C. Pugh, “On Liénard’s equation with linear damping,” in *Geometry and Topology*, ser. Lecture Notes in Mathematics, J. Palis y M. do Carmo, Eds. Berlin: Springer-Verlag, 1977, vol. 597, pp. 335–357.

- [26] Z. Liu, E. Sáez, e I. Szántó, “Limit cycles and invariant parabola in a Kukles systems of degree three,” *Acta Math. Sci., Ser. B, Engl. Ed.*, vol. 28, no. 4, pp. 865–869, 2008, doi: 10.1016/S0252-9602(08)60087-9.
- [27] J. Llibre y G. Rodríguez, “Configurations of limit cycles and planar polynomial vector fields.” *J. Differ. Equations*, vol. 198, no. 2, pp. 374–380, 2004, doi: 10.1016/j.jde.2003.10.008.
- [28] N. G. Lloyd, J. M. Pearson, E. Sáez, e I. Szántó, “Limit cycles of a cubic Kolmogorov system,” *Appl. Math. Lett.*, vol. 9, no. 1, pp. 15–18, 1996, doi: 10.1016/0893-9659(95)00095-X.
- [29] N. G. Lloyd, J. M. Pearson, E. Sáez, e I. Szántó, “A cubic Kolmogorov system with six limit cycles,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 44, no. 3-4, pp. 445–455, 2002, doi: 10.1016/S0898-1221(02)00161-X.
- [30] P. Mardešić, M. Saavedra, M. Uribe, y M. Wallace, “Unfolding of the Hamiltonian triangle vector field,” *J. Dyn. Control Syst.*, vol. 17, no. 2, pp. 291–310, 2011, doi: 10.1007/s10883-011-9120-5.
- [31] P. Mardešić, M. Saavedra, y M. Uribe, “Principal part of multi-parameter displacement functions,” *Bull. Sci. Math.*, vol. 136, no. 7, pp. 752–762, 2012, doi: 10.1016/j.bulsci.2012.02.006.
- [32] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, 3rd ed., ser. Texts Appl. Math. New York, NY: Springer, 2001, vol. 7.
- [33] I. G. Petrovskij y E. M. Landis, “On the number of limit cycles of the equation  $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$ , where  $P$  and  $Q$  are polynomials of the second degree,” *Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc.*, vol. 10, pp. 177–221, 1958, doi: 10.1090/trans2/010/06.
- [34] H. Poincaré, “Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle I,” *J. Math. Pures Appl.*, vol. 7, pp. 375–422, 1881.
- [35] H. Poincaré, “Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle II,” *J. Math. Pures Appl.*, vol. 8, pp. 251–296, 1882.
- [36] H. Poincaré, “Sur les courbes définies par une équation différentielle III,” *J. Math. Pures Appl.*, vol. 1, pp. 167–244, 1885.
- [37] H. Poincaré, “Sur les courbes définies par une équation différentielle IV,” *J. Math. Pures Appl.*, vol. 2, pp. 151–217, 1886.
- [38] M. Saavedra, “The return time function near a polycycle,” *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math.*, vol. 330, no. 9, pp. 781–784, 2000, doi: 10.1016/S0764-4442(00)00277-9.
- [39] M. Saavedra, “Asymptotic expansion of the period function.” *J. Differ. Equations*, vol. 193, no. 2, pp. 359–373, 2003, doi: 10.1016/S0022-0396(03)00091-3.

- [40] M. Saavedra, “Asymptotic expansion of the period function. II.” *J. Differ. Equations*, vol. 222, no. 2, pp. 476–486, 2006, doi: 10.1016/j.jde.2005.04.011.
- [41] E. Sáez e I. Szántó, “One-parameter family of cubic Kolmogorov systems with an isochronous center,” *Collect. Math.*, vol. 48, no. 3, 1997.
- [42] E. Sáez e I. Szántó, “Coexistence of algebraic and nonalgebraic limit cycles in Kukles systems,” *Period. Math. Hung.*, vol. 56, no. 1, pp. 137–142, 2008, doi: 10.1007/s10998-008-5137-y.
- [43] E. Sáez e I. Szántó, “Bifurcations of limit cycles in Kukles systems of arbitrary degree with invariant ellipse,” *Appl. Math. Lett.*, vol. 25, no. 11, pp. 1695–1700, 2012, doi: 10.1016/j.aml.2012.01.039.
- [44] S. Shi, “A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems,” *Sci. Sin.*, vol. 23, pp. 153–158, 1980.
- [45] S. Smale, “Problemas matemáticos para el próximo siglo.” *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 3, no. 3, pp. 413–434, 2000.
- [46] A. M. Urbina, M. León de la Barra, G. León de la Barra, y M. Cañas, “Elliptic integrals and limit cycles,” *Bull. Aust. Math. Soc.*, vol. 48, no. 2, pp. 195–200, 1993, doi: 10.1017/S0004972700015641.
- [47] A. M. Urbina, G. León de la Barra, M. León de la Barra, y M. Cañas, “Limit cycles of Liénard equations with nonlinear damping,” *Can. Math. Bull.*, vol. 36, no. 2, pp. 251–256, 1993, doi: 10.4153/CMB-1993-036-x.
- [48] M. Uribe, “Principal Poincaré-Pontryagin function of polynomial perturbations of the Hamiltonian triangle,” *J. Dyn. Control Syst.*, vol. 12, no. 1, pp. 109–134, 2006, doi: 10.1007/s10450-006-9687-4.
- [49] M. Uribe, “Principal Poincaré-Pontryagin function associated to polynomial perturbations of a product of  $(d+1)$  straight lines,” *J. Differ. Equations*, vol. 246, no. 4, pp. 1313–1341, 2009, doi: 10.1016/j.jde.2008.11.014.
- [50] M. Yeung, “Dulac’s theorem revisited,” *Qual. Theory Dyn. Syst.*, vol. 24, no. 2, 2025, Art. ID 57, doi: 10.1007/s12346-025-01220-2.

C O M P E N D I O

## Aspectos topológicos de las simetrías en superficies

JUAN ARMANDO PARRA<sup>1,✉</sup> 

ISRAEL MORALES<sup>2</sup> 

<sup>1</sup> Centro de Investigación en  
Matemáticas, A.C. CIMAT. Guanajuato,  
México.

*juan.parra@cimat.mx*

<sup>2</sup> Departamento de Matemática y  
Estadística, Universidad de La Frontera,  
Temuco, Chile.

*israel.morales@ufrontera.cl*

### RESUMEN

El grupo de homeomorfismos de una superficie topológica  $\Sigma$ ,  $\text{Homeo}(\Sigma)$ , admite una topología conocida como la *topología compacto-abierta*, con la cual es un grupo topológico. En este escrito damos una demostración autocontenido de este hecho. Del mismo modo, utilizamos herramientas elementales para demostrar que  $\text{Homeo}(\Sigma)$  es un *grupo polaco* (es decir, es separable y completamente metrizable). Traducimos la relación de *isotopía* en  $\text{Homeo}(\Sigma)$  como arcoconexidad en  $\text{Homeo}(\Sigma)$  y, denotando por  $\text{Homeo}_0(\Sigma)$  a la componente arcoconexa de la identidad, usamos resultados clásicos de la Teoría Descriptiva de Conjuntos para probar que el *Grupo Modular Extendido* de  $\Sigma$  (o *mapping class group extendido*),  $\text{Mod}^\pm(\Sigma) := \text{Homeo}(\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma)$ , es un grupo polaco con la topología cociente. Al final de este compendio, discutimos una demostración alternativa de este resultado que se basa en ver al Grupo Modular Extendido como el grupo de automorfismo del *grafo de curvas*; esta conexión figura como una de las más importantes y bellas en toda la teoría de Grupos Modulares.

**Palabras clave:** Superficies topológicas, grupo de homeomorfismos, grupo modular de superficies, topología compacto-abierta, isotopía, grafo de curvas.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 57K20, 57S05, 54H11, 20F65, 03E15

Publicado: 21 de octubre de 2025

Aceptado: 29 de agosto de 2025

Recibido: 29 de noviembre de 2024



©2025 J. A. Parra *et al.* Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

S U R V E Y

## Topological aspects of symmetries on surfaces

JUAN ARMANDO PARRA<sup>1,✉</sup> 

ISRAEL MORALES<sup>2</sup> 

<sup>1</sup> Centro de Investigación en  
Matemáticas, A.C. CIMAT. Guanajuato,  
México.

*juan.parra@cimat.mx*

<sup>2</sup> Departamento de Matemática y  
Estadística, Universidad de La Frontera,  
Temuco, Chile.

*israel.morales@ufrontera.cl*

### ABSTRACT

The homeomorphism group of a topological surface  $\Sigma$ ,  $\text{Homeo}(\Sigma)$ , admits a topology known as the *compact-open topology*, with which it becomes a topological group. In this work, we provide a self-contained proof of this fact. Moreover, we use elementary tools to prove that  $\text{Homeo}(\Sigma)$  is a *Polish group* (i.e., it is separable and completely metrizable). We translate the *isotopy* relation in  $\text{Homeo}(\Sigma)$  as path-connectedness in  $\text{Homeo}(\Sigma)$  and, denoting by  $\text{Homeo}_0(\Sigma)$  the identity path component, we use classic results in Descriptive Set Theory to prove that the *Extended Mapping Class Group* of  $\Sigma$ ,  $\text{Mod}^\pm(\Sigma) := \text{Homeo}(\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma)$ , is a Polish group with the quotient topology. At the end of this survey, we discuss an alternative proof of this result based on realizing the Extended Mapping Class Group as the automorphism group of the *complex of curves*; this connection arises as one of the most important and beautiful in the theory of Mapping Class Groups.

**Keywords and Phrases:** Topological surfaces, homeomorphism group, mapping class group of surfaces, compact-open topology, isotopy, complex of curves.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 57K20, 57S05, 54H11, 20F65, 03E15

Published: 21 October, 2025

Accepted: 29 August, 2025

Received: 29 November, 2024



©2025 J. A. Parra *et al.* This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

## 1. Introducción

El concepto moderno de homeomorfismo hace referencia a una función entre dos espacios topológicos  $X \rightarrow Y$  que es continua, invertible y cuya inversa es continua. Dicho concepto fue reformulado a lo largo de la historia para representar lo que significa hoy en día. Después de los avances de M. Fréchet y F. Hausdorff, finalmente W. Sierpinski en 1928 y K. Kuratowski en 1934 realizaron importantes escritos de topología donde el término homeomorfismo ya tenía el significado moderno. La palabra “homeomorfismo” la introdujo H. Poincaré en 1895 y originalmente hacía referencia a un difeomorfismo entre variedades diferenciables. Pronto H. Poincaré observó que los difeomorfismos forman un grupo interesante por sí mismo; con visión de gran alcance, se atrevió a afirmar que la ciencia cuyo objetivo es el estudio de este grupo, así como otros grupos análogos, recibiría el nombre de *analysis situs*, hoy topología. El desarrollo de las matemáticas ha confirmado el sentimiento de H. Poincaré; el estudio de objetos como el grupo de homeomorfismos, el grupo de difeomorfismos y el grupo modular de superficies, así como todas sus variantes, forman parte de la columna vertebral de las matemáticas. Para una revisión histórica de la evolución del concepto de homeomorfismo, recomendamos ampliamente la lectura de G. H. Moore [27].

Una de las motivaciones para estudiar el grupo de homeomorfismos o difeomorfismos de una variedad proviene de los sistemas dinámicos, en donde clásicamente se estudian las transformaciones de un conjunto de puntos en una variedad bajo iteraciones de un difeomorfismo, es decir, se estudia el comportamiento de un subgrupo cíclico del grupo de difeomorfismos de la variedad. En los últimos cincuenta años se ha adoptado el objetivo de no sólo estudiar subgrupos cíclicos de difeomorfismos u homeomorfismos, sino de subgrupos finitamente generados de ellos. Lo que se busca con esto es explicar la influencia algebraica en la dinámica que realiza la acción del grupo sobre la variedad y de ser posible construir relaciones entre propiedades algebraicas como nilpotencia, torsión, etc., con propiedades dinámicas como la entropía, puntos fijos, etc. Sin embargo, el estudio del grupo de homeomorfismos o difeomorfismos de una variedad no se limita a sistemas dinámicos; estos grupos forman parte importante en la clasificación de haces fibrados en Topología Algebraica [35]. Así mismo, el tema de estudiar la *continuidad automática* (tema propio de la Teoría Descriptiva de Conjuntos) de estos grupos ha derivado en importantes resultados de rigidez. Más motivaciones para estudiar el grupo de homeomorfismos de variedades se puede consultar en el interesante artículo de K. Mann [24].

En general, estudiar el grupo de homeomorfismos no es sencillo, sobre todo porque a pesar de ser un grupo topológico con buenas propiedades topológicas y algebraicas, es un grupo no numerable y no es localmente compacto. Surge así la necesidad de estudiar al *Grupo Modular* (conocido por *mapping class group* en la literatura inglesa),  $\text{Mod}(M)$ , de una variedad  $M$ , el cual se define como el cociente  $\text{Homeo}(M)/\text{Homeo}_0(M)$ , donde  $\text{Homeo}_0(M)$  denota a la componente arcoconexa de la identidad. El estudio del Grupo Modular de variedades está motivada por su profunda conexión

con la clasificación de clases de haces fibrados, véase [29]. En otras situaciones resulta que el Grupo Modular es más sencillo de estudiar que el grupo de homeomorfismos en sí. El ejemplo típico de esto son los grupos modulares de *superficies de tipo finito*<sup>1</sup>, los cuales son grupos finitamente generados. La historia de los grupos modulares de superficies se remonta a comienzos del siglo XX y su conexión con diversas áreas de las matemáticas (en la clasificación de 3-variedades, en Teoría de Teichmüller, en Geometría Algebraica, en la Teoría Geométrica de Grupos, por mencionar algunas), ha quedado confirmada en toda una vasta literatura; por ejemplo, el lector puede consultar las referencias [9,17].

Recientemente se ha iniciado el desarrollo sistemático de los grupos modulares de superficies de tipo infinito. A diferencia del caso de superficies de tipo finito, estos son grupos que ya no son finitamente generados. Recomendamos revisar [1] para una exposición amplia del desarrollo de la teoría de grupos modulares en superficies de tipo infinito. El rápido desarrollo de la teoría de estos grupos en los últimos 15 años justifica la necesidad de tener escritos accesibles a toda la comunidad hispanohablante que trate el tema de grupos modulares de superficies.

Con el objetivo de producir un texto autocontenido en la medida de lo posible, en este escrito recopilamos algunas de las propiedades topológicas y/o geométricas más básicas del grupo de homeomorfismos de una superficie topológica, así como del respectivo grupo modular. De ese modo, esperamos que un lector que no haya tenido un acercamiento a dichos grupos encuentre en nuestro escrito una introducción amena. La novedad de este trabajo es su enfoque unificado, ya que nuestro tratamiento de los temas incluye a todas las superficies topológicas; compactas o no compactas, orientables o no orientables, con frontera compacta o con frontera no compacta. Los autores esperan que ésta sea una lectura agradable, y que en el mejor de los casos, sea de alguna utilidad para el lector.

### 1.1. Estructura del texto

En la Sección 2 presentamos a las superficies, definimos la frontera de una superficie y la noción de orientabilidad. A pesar de ser fundamental en el estudio de superficies, no detallaremos en la clasificación de superficies. Sin embargo, en esta misma sección comentamos la bibliografía a la que se puede acudir.

En la Sección 3 introducimos la noción de homeomorfismo de una superficie  $\Sigma$  en sí misma. Exhibiremos ejemplos de las estructuras de la superficie que son transformadas por la acción de un homeomorfismo. Probaremos que con la operación composición y la topología compacto-abierta, el grupo de homeomorfismos  $\text{Homeo}(\Sigma)$  es un grupo topológico Hausdorff y segundo numerable. Utilizaremos herramientas de Teoría Descriptiva de Conjuntos para probar que  $\text{Homeo}(\Sigma)$  tiene una métrica compatible invariante por la operación del grupo. Definiremos de manera explícita una

<sup>1</sup>Una superficie es de *tipo finito* si tiene grupo fundamental finitamente generado. En otro caso se dice que la superficie es de *tipo infinito*.

métrica (una para superficies compactas y otra para superficies no compactas) completa y compatible con la topología compacto-abierta. La existencia de dicha métrica concluye que  $\text{Homeo}(\Sigma)$  es un *grupo polaco*.

En la Sección 4 definimos una relación de equivalencia en  $\text{Homeo}(\Sigma)$ , llamada *isotopía*. Veremos que dicha relación está estrechamente relacionada con la componente arcoconexa de la identidad (el cual es un subgrupo normal del grupo de homeomorfismos): dos homeomorfismos  $f, g \in \text{Homeo}(\Sigma)$  son isotópicos si, y sólo si están en la misma componente conexa por trayectorias. El grupo cociente es conocido como Grupo Modular Extendido y será denotado por  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ . Demostraremos que  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  hereda propiedades topológicas de  $\text{Homeo}(\Sigma)$ , como el hecho de ser Hausdorff y segundo numerable, y que por lo tanto, es también metrizable. Explicaremos un panorama que utiliza resultados importantes de Teoría Descriptiva de Conjuntos para demostrar que la metrizabilidad en  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  es suficiente para que sea un grupo polaco. Al final de la Sección 4 introducimos el grafo de curvas de una superficie orientable de tipo infinito con frontera vacía, y discutimos una forma alternativa de demostrar que el Grupo Modular Extendido es polaco; esto se obtiene como consecuencia de ver a  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  como el grupo de automorfismos del grafo de curvas. A pesar de que nuestra intención es producir un texto autocontenido, en esta sección es deseado que el lector tenga una comprensión básica del concepto de homotopía y principios básicos del grupo fundamental. Dichos conceptos son utilizados en la Sección 4.5. Sin embargo, el resto de la Sección 4 no pide dichos prerequisitos de manera imperativa.

## 1.2. Recomendaciones bibliográficas

Ponemos a disposición del lector referencias clásicas para el estudio de los grupos de transformaciones en superficies. *A primer on Mapping Class Groups* [9] es una guía autocontenido de teoremas, ejemplos y técnicas utilizadas en el estudio del Grupo Modular de una superficie de tipo finito. *Office hours with a geometric group theorist* [5] es una muy buena guía que puede servir a estudiantes de licenciatura en un primer acercamiento a Grupos Modulares de superficies de tipo finito así como a la Teoría Geométrica de Grupos. *Presentando al toro y sus simetrías* [18] es un escrito en donde se detalla el cálculo del Grupo Modular del toro. *Big Mapping Class Groups: An Overview* [1] es un sumario de resultados topológicos asociados al grupo modular de superficies de tipo infinito. *Notes on the Topology of Mapping Class Groups* [37] es una referencia para localizar resultados relevantes relacionando las técnicas de Teoría Descriptiva de Conjuntos con el grupo modular, particularmente de superficies de tipo infinito. La lectura *Superficies Topológicas y sus simetrías: una introducción a grupos modulares de superficies de tipo finito e infinito* [6] es una introducción accesible a grupos modulares de superficies de tipo finito e infinito, incluidas las superficies no orientables; en particular, en este texto el lector puede comenzar a informarse sobre los invariantes que clasifican a las superficies topológicas, incluidas las no compactas. Para consultas

de propiedades de grupos topológicos recomendamos *Beginner's Course in Topology* [10]. Una guía de la Teoría Descriptiva de Conjuntos que recomendamos es *Classical Descriptive Set Theory* [19]. Por último, un texto introductorio al estudio de haces fibrados es *Fiber bundles and homotopy* [36].

## 2. Superficies

Probablemente el ejemplo principal de una superficie es la gráfica de una función continua  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un subconjunto abierto conexo  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ; recordemos que la gráfica de  $f$  es el subespacio de  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$\Gamma(f) := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U\}.$$

Las superficies son espacios topológicos especiales, que modelan “mundos posibles”. Por ejemplo la gráfica de la función  $f(x, y) = x^2 - y^2$  (Figura 2.1), se puede imaginar como la hoja de una planta en la que caminan las hormigas.

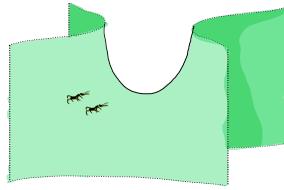


Figura 2.1: Porción de la gráfica de  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .

Para cualquier función continua  $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  existe un homeomorfismo entre  $U$  y la gráfica  $\Gamma(f)$  dado por la proyección  $\pi(x, y, z) = (x, y)$ . En otras palabras, la gráfica de  $f$  se puede aplanar. Sin embargo, existen mundos posibles que interpretamos como superficies que no se pueden aplanar, como la superficie de un planeta o el chocolate que recubre una dona glaseada. Por eso la definición de superficie topológica es más general. Partiremos primero de la definición de superficies sin frontera (o bien, con frontera vacía), la cual definiremos más tarde.

**Definición 2.1** (Superficie topológica). *Un espacio topológico conexo  $\Sigma$  es una superficie (con frontera vacía) si es Hausdorff, segundo numerable<sup>2</sup> y cada punto  $p \in \Sigma$  tiene un entorno  $V \subseteq \Sigma$  homeomorfo a algún abierto de  $\mathbb{R}^2$ .*

Nótese que la definición no considera que una superficie  $\Sigma$  esté incluida como un subespacio de

<sup>2</sup>Un espacio topológico es segundo numerable si tiene una base numerable de abiertos.

$\mathbb{R}^n$ , sino que es un espacio topológico abstracto que cumple las restricciones de la definición. Por ejemplo el plano proyectivo en el siguiente ejemplo es un espacio dado por clases de equivalencia.

**Ejemplo 2.2.** *Los siguientes espacios topológicos son superficies. En las imágenes colocamos las representaciones poligonales de las superficies, que consisten en realizar el pegado de los lados con la misma etiqueta en el sentido que indican las flechas.*

- *El plano  $\mathbb{R}^2$  es una superficie, así como cualquier subconjunto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  abierto y conexo.*
- *La esfera  $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  es una superficie compacta. Consideremos  $N = (0, 0, 1)$ , el polo norte y,  $S = (0, 0, -1)$ , el polo sur. Definimos los homeomorfismos*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v, w) &\longmapsto \left( \frac{2u}{1-w}, \frac{2v}{1-w} \right); \end{aligned} \quad \begin{aligned} \psi : \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v, w) &\longmapsto \left( \frac{2u}{1+w}, \frac{2v}{1+w} \right), \end{aligned}$$

*que prueban que  $\mathbb{S}^2$  es una superficie. Estos homeomorfismos son conocidos como la proyección estereográfica de la esfera (Figura 2.3).*

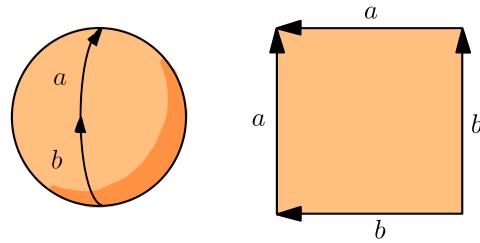


Figura 2.2: La esfera y su representación poligonal.

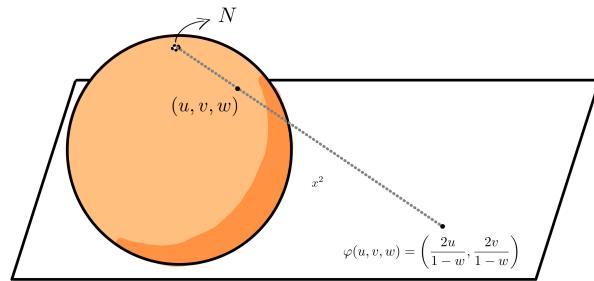


Figura 2.3: Obtención de proyección estereográfica mediante la recta que pasa por el polo norte  $N = (0, 0, 1)$ , intersecta a la esfera únicamente en  $(u, v, w)$  y después intersecta el plano  $\mathbb{R}^2 \times \{-1\}$  en  $\varphi(u, v, w)$ .

- *El toro  $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  es una superficie compacta. Podemos presentar al toro, también como*

el espacio cociente

$$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 := \mathbb{R}^2 / \sim,$$

donde la relación de equivalencia  $\sim$  está dada por:  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$  si y sólo si  $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2$ .

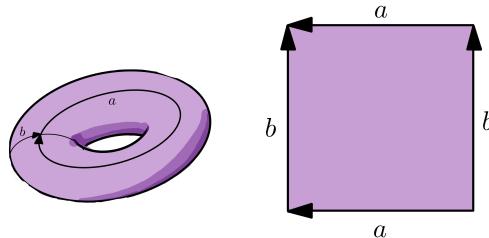


Figura 2.4: El toro y su representación poligonal.

- El plano proyectivo se define como el espacio cociente

$$\mathbb{RP}^2 := \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim,$$

donde la relación de equivalencia  $\sim$  en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  está dada por:  $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$  si existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ . Este espacio no se puede visualizar encajado en  $\mathbb{R}^3$ , pero sí podemos dar su representación poligonal.

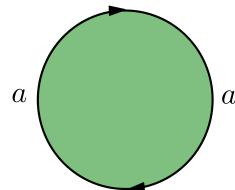


Figura 2.5: Representación poligonal de  $\mathbb{RP}^2$ .

- La escalera de Jacob es una superficie con género infinito, que se extiende de manera infinita hacia dos direcciones.

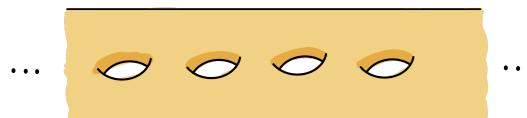


Figura 2.6: Escalera de Jacob.

- Basados en la nomenclatura de la clasificación de superficies no compactas (Subsección 2.2),

la siguiente superficie se conoce como la superficie con tres fines acumulados por género. Pero por simplicidad, nosotros la llamaremos trípode.

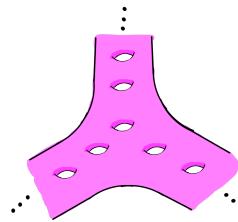


Figura 2.7: Trípode.

- El conjunto  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N} \times \{0\}$  es abierto en  $\mathbb{R}^2$ , por lo que es una superficie.

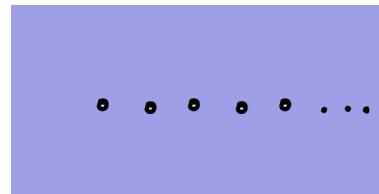


Figura 2.8:  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N} \times \{0\}$ .

- Del mismo modo  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C} \times \{0\}$ , donde  $\mathcal{C}$  es el conjunto de Cantor, es un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y por ende, es una superficie.

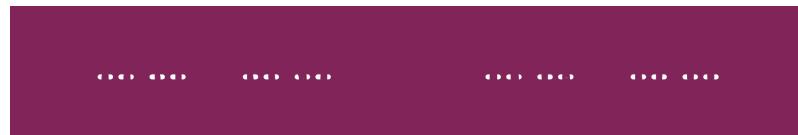


Figura 2.9:  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C} \times \{0\}$ .

- Existen superficies con ramificaciones infinitas, como el árbol de Cantor y el árbol florido de Cantor.

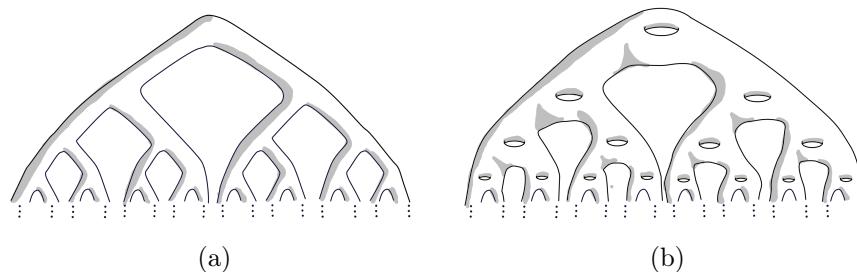


Figura 2.10: (a) Árbol de Cantor; (b) Árbol florido de Cantor.

**Ejemplo 2.3** (Espacios que no son superficies). *Contrario a la intuición, existen espacios que cumplen ser localmente homeomorfos a  $\mathbb{R}^2$  pero no ser Hausdorff. En este ejemplo también ejemplificamos con el cono espacios que no son localmente homeomorfos a  $\mathbb{R}^2$ .*

- *El cono está definido como el conjunto de puntos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  que satisfacen la ecuación  $x^2 + y^2 = z^2$ . El origen  $(0, 0, 0)$  es un punto del cono que no tiene una vecindad homeomorfa a algún abierto de  $\mathbb{R}^2$ .*

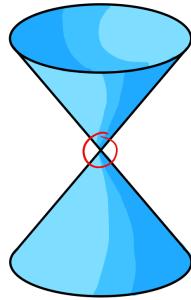


Figura 2.11: Punto singular en el cono.

- *El plano con dos orígenes es el espacio cociente*

$$X = \frac{\mathbb{R}^2 \times \{0, 1\}}{(x, y, 0) \sim (x, y, 1) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0)}.$$

*Todo punto de  $X$  tiene una vecindad homeomorfa a  $\mathbb{R}^2$ , pero falla en ser Hausdorff para las imágenes de los puntos  $(0, 0, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ .*

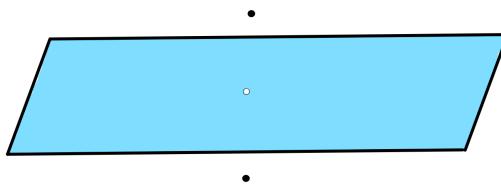


Figura 2.12: Plano con dos orígenes.

Hacemos énfasis en que la Definición 2.1 es exclusiva de superficies sin frontera pues en el estudio de homeomorfismos es importante distinguirlas de las superficies con frontera no vacía. Incluso veremos más adelante que el concepto de frontera en una superficie permite extender a toda la superficie ciertos homeomorfismos definidos en subsuperficies con frontera (como los que mencionaremos en el Ejemplo 3.3). ¿Pero a qué nos referimos con una *superficie con frontera*?

Dado que una superficie  $\Sigma$  es un espacio topológico abstracto que no está encajado necesariamente

dentro de algún otro espacio topológico  $X$ , no podemos especificar cuál es la frontera topológica de  $\Sigma$  dentro de  $X$ . Más bien, a lo que nos referimos es a una frontera geométrica, que captura la información del semiplano superior cerrado  $\overline{\mathbb{H}^2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$  como subespacio de  $\mathbb{R}^2$ . En la Figura 2.13 se puede notar que en  $\overline{\mathbb{H}^2}$  hay abiertos como el subconjunto  $V \subseteq \overline{\mathbb{H}^2}$  que también es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Por otro lado hay abiertos como  $U \subseteq \overline{\mathbb{H}^2}$  que son abiertos sólo del semiplano. Los puntos en la intersección de  $U \cap \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  describen a lo que nos referimos como puntos frontera.

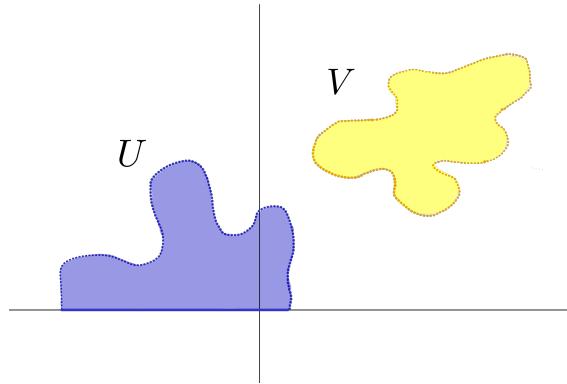


Figura 2.13:  $V$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  y  $U$  abierto exclusivamente de  $\overline{\mathbb{H}^2}$

**Definición 2.4** (Superficie topológica con frontera). *Un espacio topológico conexo  $\Sigma$  es una superficie, con frontera posiblemente vacía, si es Hausdorff, segundo numerable y cada punto  $p \in \Sigma$  tiene un entorno  $V$  homeomorfo a algún abierto de  $\overline{\mathbb{H}^2}$ .*

La **frontera geométrica** de una superficie  $\Sigma$ , o simplemente **frontera**, es el conjunto denotado por  $\partial\Sigma$ , que consta de todos los puntos  $p \in \Sigma$  que no tienen una vecindad homeomorfa a algún abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces, una caracterización de los puntos frontera es la siguiente. Si  $p \in \Sigma$  es un punto frontera y  $V$  es una vecindad de  $p$  con un homeomorfismo  $\varphi : V \rightarrow W$  ( $W \subseteq \overline{\mathbb{H}^2}$  abierto), entonces debe tenerse  $\varphi(p) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ . Recíprocamente, si  $p \in \Sigma$  cumple que existe tal homeomorfismo  $\varphi : V \rightarrow W$  ( $V$  abierto de  $\Sigma$  y  $W$  abierto de  $\overline{\mathbb{H}^2}$ ) con  $\varphi(p) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ , entonces  $p$  debe ser punto frontera. De lo contrario,  $\varphi(p)$  tendría una vecindad en  $\overline{\mathbb{H}^2}$  homeomorfa a una vecindad de  $\mathbb{R}^2$ . Eso contradice que los abiertos de  $\overline{\mathbb{H}^2}$  que tocan el borde no son homeomorfos a abiertos de  $\mathbb{R}^2$ , por el Teorema de Invarianza del Dominio<sup>3</sup> [12, Teorema 2.B3].

Los puntos en  $\partial\Sigma$  se conocen como puntos frontera y los puntos en  $\Sigma \setminus \partial\Sigma$  como puntos interiores. Al conjunto de puntos interiores lo denotamos por  $\text{int}(\Sigma)$ . Claramente  $\text{int}(\Sigma)$  es un abierto de  $\Sigma$ , por lo que  $\partial\Sigma$  es cerrado. Además, se puede observar que cada punto  $p \in \partial\Sigma$  tiene una vecindad relativa a  $\partial\Sigma$  que es homeomorfa a un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ ; es decir, la frontera es una 1-variedad. Siendo consistentes con la Definición 2.1, diremos que  $\Sigma$  es una superficie sin frontera si  $\partial\Sigma = \emptyset$ .

<sup>3</sup>El Teorema de Invarianza del Dominio afirma que una función continua e inyectiva  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  es abierto, debe ser un mapeo abierto. La demostración de este teorema requiere el uso homología.

Un homeomorfismo entre superficies  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma'$  cumple que  $f(\partial\Sigma) = \partial\Sigma'$ . Por lo tanto, tener o no frontera es un invariante topológico.

**Ejemplo 2.5.** *Algunos ejemplos de superficies con frontera y sus representaciones poligonales son los siguientes.*

- *El semiplano superior cerrado  $\overline{\mathbb{H}^2}$ , con frontera  $\partial\overline{\mathbb{H}^2} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ .*
- *El disco cerrado  $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ , cuya frontera es  $\partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1$ .*
- *El anillo  $\mathbb{A}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$  es una superficie compacta con frontera  $\partial\mathbb{A}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$ , que es homeomorfa a  $\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$ .*

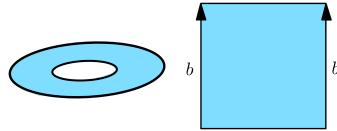


Figura 2.14: El anillo.

- *La banda de Möbius,  $\mathbb{BM}$ , es la superficie parametrizada por*

$$\mathbb{BM} := \left\{ \left( \left( 1 - t \sin \frac{\theta}{2} \right) \cos \theta, \left( 1 - t \sin \frac{\theta}{2} \right) \sin \theta, t \cos \frac{\theta}{2} \right) : (t, \theta) \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times [0, 2\pi] \right\}.$$

*La frontera de  $\mathbb{BM}$  es homeomorfa a  $\mathbb{S}^1$ .*

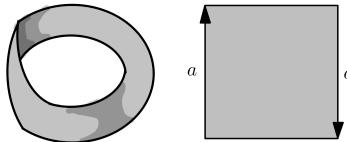


Figura 2.15: Banda de Möbius y su representación poligonal.

- *La escalera de Jacob recortada por la mitad es una superficie con frontera no compacta. Sin embargo, toda componente conexa de la frontera es compacta homeomorfa al círculo.*



Figura 2.16: Escalera de Jacob recortada.

- $\mathbb{D}^2 \setminus \mathcal{C}$ , donde  $\mathcal{C} \subseteq \partial\mathbb{D}^2$  es homeomorfo al conjunto de Cantor, es otra superficie con frontera no compacta. En este caso, toda componente conexa de la frontera es no compacta homeomorfa a la línea real.

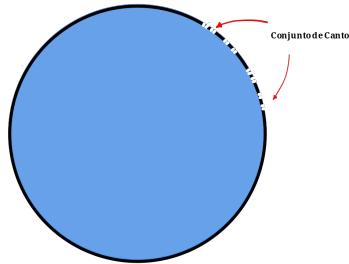


Figura 2.17: Disco menos un Cantor en la frontera

**Ejemplo 2.6** (Suma conexa). *Para construir más ejemplos de superficies suele utilizarse la suma conexa. La suma conexa de dos superficies  $\Sigma_1, \Sigma_2$ , denotada por  $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ , se define como la superficie que se obtiene al restar un disco abierto en cada una de las superficies e identificarlos por la frontera mediante la topología cociente.*

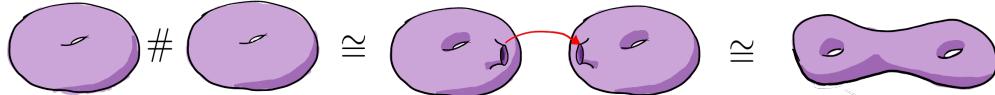
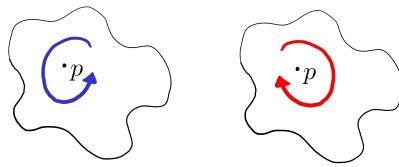


Figura 2.18: Suma conexa de dos toros.

## 2.1. Orientabilidad

En los ejemplos anteriores, la banda de Möbius y el plano proyectivo son ejemplos de superficies no orientables. En cambio, el resto fueron ejemplos de superficies orientables. La definición formal de orientabilidad requiere mayor profundidad y sugerimos al lector revisar [11] para una introducción formal mediante el grupo fundamental. También recomendamos revisar [22] para el caso de superficies con una estructura diferenciable. Nosotros expondremos el concepto de orientabilidad con un enfoque informal. Esperamos que a pesar de eso, esta sección le sirva a los lectores (en especial los que están iniciándose en el tema) para continuar la lectura de este artículo.

Dada una superficie  $\Sigma$  y un punto  $p \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$ , se puede definir el sentido en el que una curva da vueltas al rededor de  $p$ . En la Figura 2.19 se muestra que hay dos posibles sentidos.

Figura 2.19: Elección de sentidos alrededor de  $p$ .

Una **orientación** en la superficie  $\Sigma$  consiste en una elección de sentidos en cada punto, de tal forma que en cada vecindad  $V \subseteq \Sigma$  (homeomorfa a un abierto de  $\mathbb{R}^2$ ), todos los puntos tienen asignados sentidos “compatibles”. Diremos que una superficie es **orientable** si se le puede asignar una orientación compatible; en caso contrario diremos que es **no orientable**. Por ejemplo, en la Figura 2.20 (a) el toro tiene una elección de sentidos que efectivamente conforma una orientación en el toro. Sin embargo, en la Figura 2.20 (b) en la banda de Möbius se muestra una vecindad, donde los sentidos asignados a los puntos fueron incompatibles.

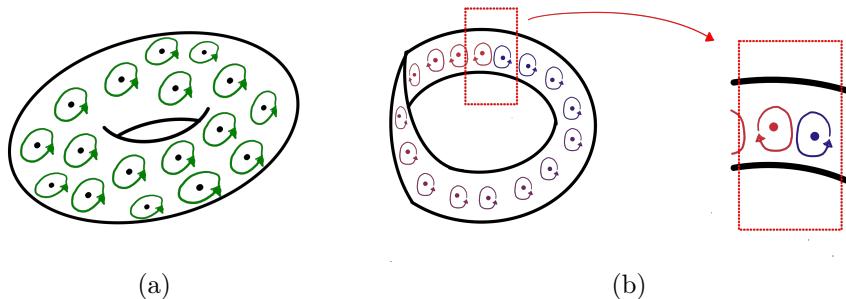


Figura 2.20: (a) orientación en el toro; (b) sentidos incompatibles en la banda de Möbius.

**Teorema 2.7.** *Una superficie  $\Sigma$  es no orientable si y sólo si  $\mathbb{BM}$  está encajada en  $\Sigma$ .*

*Demuestra.* ( $\Leftarrow$ ) Si pudiera asignársele una elección de sentidos a cada punto de  $\Sigma$ , dicha elección definiría una elección de sentidos en  $\mathbb{BM}$ . Esta elección no puede ser compatible en  $\mathbb{BM}$ , pues  $\mathbb{BM}$  es no orientable. Por lo tanto, tampoco es compatible en  $\Sigma$ , implicando que esta última es no orientable.

( $\Rightarrow$ ) Por el Teorema de Clasificación de Superficies compactas (ver [11]), cualquier superficie compacta no orientable tiene un encaje de la banda de Möbius. Por otro lado, para cualquier superficie no compacta  $\Sigma$  podemos encontrar una colección de superficies compactas  $\{\Sigma_n\}$  tal que  $\Sigma_n \subseteq \text{int}(\Sigma_{n+1}) \subseteq \Sigma$  y que  $\bigcup \Sigma_n = \Sigma$ . Si cada subsuperficie  $\Sigma_n$  es orientable, entonces se puede definir una orientación global en  $\Sigma$ . De esta manera, si  $\Sigma$  es no orientable, alguna de las  $\Sigma_n$  tendría que ser no orientable. En dicho caso se tiene que  $\Sigma$  tendría un encaje de la banda de Möbius.  $\square$

**Ejemplo 2.8.**  $\mathbb{RP}^2$  tiene un encaje de  $\mathbb{BM}$ , por lo que no es orientable.

Nos bastará poder interpretar la no orientabilidad de una superficie como el hecho de tener sólo una cara, como es el caso de la banda de Möbius  $\mathbb{BM}$ . Así, si decidiéramos pintar una superficie no orientable, sólo podríamos usar un color. En superficies orientables como la esfera o el toro podemos usar dos colores: uno para la parte externa y otro para la parte interna.

**Notación 2.9.** Usualmente utilizamos la letra  $S$  para representar superficies orientables. Para superficies no orientables reservamos la letra  $N$ .

## 2.2. Comentarios sobre la clasificación de superficies

La clasificación de superficies comprende una serie de teoremas que proveen una lista de todas las superficies que cumplen ciertas características. En dichos teoremas también se describe un procedimiento para determinar si dos superficies no son homeomorfas, usualmente comparando una colección de *invariantes*<sup>4</sup>.

No enunciaremos los teoremas de clasificación, pero sugerimos al lector revisar nuestras recomendaciones bibliográficas. Para la clasificación de superficies compactas véase [11]. Para la clasificación de superficies no compactas puede revisarse [31]. Para una revisión de los teoremas de clasificación de superficies (compactas o no compactas, orientables o no orientables) así como los invariantes que determinan por completo a una superficie recomendamos ver el Capítulo 1 del escrito *Superficies Topológicas y sus simetrías: una introducción a grupos modulares de superficies de tipo finito e infinito* [6].

## 3. El grupo de homeomorfismos de una superficie

En esta sección estudiaremos la estructura algebraica del grupo (con la operación composición de funciones) de todos los homeomorfismos  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  de una superficie  $\Sigma$  (posiblemente con frontera no vacía), el cual denotamos por  $\text{Homeo}(\Sigma)$ . Dotaremos al grupo  $\text{Homeo}(\Sigma)$  de una estructura topológica, la cual se conoce como **topología compacto-abierta**. Veremos que ambas estructuras (la estructura de grupo y la estructura topológica) en  $\text{Homeo}(\Sigma)$  son compatibles. En otras palabras,  $\text{Homeo}(\Sigma)$  es un grupo topológico.

---

<sup>4</sup>Un invariante asociado a una superficie  $\Sigma$  es un objeto  $\varphi(\Sigma)$ , tal que si  $\Sigma$  es homeomorfa a  $\Sigma'$ , entonces  $\varphi(\Sigma) = \varphi(\Sigma')$ . Ejemplos: la orientabilidad, la frontera, característica de Euler, género, espacio de fines, espacio de fines acumulados por género, espacio de fines acumulados por género no orientable.

**Definición 3.1.** *Un grupo  $G$  con una topología  $\tau$  es un grupo topológico si las operaciones*

$$\begin{array}{rccc} G \times G & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G \\ (a, b) & \longmapsto & a \cdot b & \stackrel{y}{\longmapsto} & a \\ & & & & a^{-1} \end{array}$$

*son continuas.*

Nuestra meta principal será demostrar que el grupo de homeomorfismos de una superficie  $\Sigma$  es un **grupo polaco**, que significa que es separable<sup>5</sup> y tiene una métrica completa compatible<sup>6</sup> con la topología compacto-abierta.

Los grupos polacos son objetos de estudio en el ámbito de la Teoría Descriptiva de Conjuntos, la cual desarrolla herramientas para deducir propiedades topológicas de los morfismos o acciones de dichos grupos. Un tema recurrente en este ámbito es el de determinar si un grupo Polaco  $G$  tiene la propiedad de *Continuidad Automática* (propiedad AC); este se refiere a que para  $H$  un grupo topológico separable arbitrario, todo homomorfismo algebraico de grupos  $G \rightarrow H$  es continuo. Recomendamos ver el capítulo 9 en [19] para una introducción a este tema. Una gran variedad de grupos topológicos tiene la propiedad AC: por ejemplo, el grupo de automorfismos de  $\mathbb{Q}$  que preservan el orden, el grupo  $\text{Homeo}(\mathbb{R})$  de homeomorfismos de  $\mathbb{R}$  [33], el grupo  $\text{Homeo}(\Sigma)$  de homeomorfismos de una superficie compacta  $\Sigma$  [32], y más generalmente, el grupo  $\text{Homeo}(M)$  de homeomorfismos de una variedad compacta  $M$  [25].

### 3.1. Ejemplos de homeomorfismos

El hecho de pensar en un homeomorfismo  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  parece trivial, pues ya sabíamos que  $\Sigma$  era homeomorfa a sí misma. Sin embargo, hay propiedades de la superficie  $\Sigma$  que pueden verse alteradas mediante la acción de dicho homeomorfismo; puede alterarse el anudamiento de curvas cerradas simples<sup>7</sup> (Ejemplo 3.3) o puede alterarse la orientación de la superficie (Ejemplo 3.7). Como ejemplo de la primera clase de transformaciones introducimos el *giro de Dehn*.

**Ejemplo 3.2** (Giro de Dehn en el anillo). *Recordemos que el anillo  $\mathbb{A}$  es una superficie orientable con frontera no vacía dada por  $\mathbb{A} = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$ . Definamos la función*

$$\begin{array}{rccc} T : & \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ & te^{i\theta} & \longmapsto & te^{i\theta+2\pi i(t-1)}. \end{array}$$

*Podemos ver que la función  $T$  es un homeomorfismo cuya restricción a la frontera de  $\mathbb{A}$  es la función*

<sup>5</sup>Un espacio topológico  $X$  se dice *separable* si contiene un subconjunto denso numerable.

<sup>6</sup>Una métrica  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  en un espacio topológico  $(X, \tau)$  es *compatible* con la topología  $\tau$  si la topología inducida por la métrica  $d$  coincide con  $\tau$ .

<sup>7</sup>Una *curva cerrada simple* en  $\Sigma$  es un encaje topológico del círculo  $\mathbb{S}^1$  en  $\Sigma$ , es decir, es una función inyectiva  $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \Sigma$  que es homeomorfismo sobre su imagen.

identidad y su acción en el interior del anillo realiza una rotación mientras rodea la superficie como puede verse en la Figura 3.1.

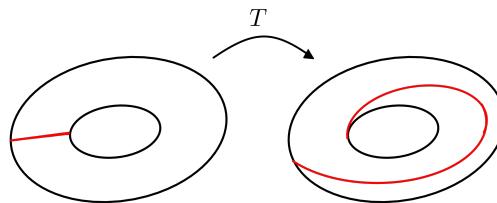


Figura 3.1: Acción del giro de Dehn  $T$  sobre el arco que conecta las dos componentes de frontera del anillo.

El hecho de que el giro de Dehn fija puntualmente la frontera es de especial utilidad para definir giros de Dehn en otras superficies. Esto se debe a que cada punto interior de la superficie tiene una vecindad homeomorfa a un disco de  $\mathbb{R}^2$ , el cual tendrá encajado al anillo como un cerrado de  $\Sigma$ .

**Ejemplo 3.3** (Giros de Dehn en cualquier superficie). *Sea  $\Sigma$  una superficie y  $\varphi : \mathbb{A} \rightarrow \Sigma$  un encaje del anillo. Recordemos que  $T : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  denota el giro de Dehn en el anillo. Podemos definir  $\tilde{T} : \Sigma \rightarrow \Sigma$  mediante*

$$\tilde{T}(p) = \begin{cases} p & \text{si } p \in \Sigma \setminus \varphi(\mathbb{A}) \\ \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}(p) & \text{si } p \in \varphi(\mathbb{A}). \end{cases}$$

*Si encontramos el encaje apropiado del anillo en el toro (Figura 3.2), obtenemos un giro de Dehn que altera el anudamiento de la curva naranja.*

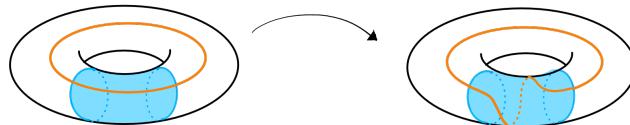


Figura 3.2: Giro de Dehn en el toro.

El giro de Dehn en un anillo que está encajado en un disco en realidad no afecta el anudamiento del mismo. Es decir, podemos realizar un proceso de deformación continua para restaurar el arco rojo a su posición original (Figura 3.3). Este proceso de deformación es conocido como *isotopía* y lo abordaremos formalmente en la Sección 4 (Definición 4.1). El problema consiste en encontrar un encaje apropiado del anillo en la superficie  $\Sigma$ , de modo que defina giros de Dehn que alteren efectivamente el anudamiento de curvas, como lo es en el caso del giro de Dehn en el Toro ilustrado en la Figura 3.2. Incluso habrá superficies como  $\mathbb{R}^2$  o la esfera, para los cuales no podrán encontrarse homeomorfismos que alteren el anudamiento de curvas. Por ejemplo, cada giro de Dehn en  $\mathbb{R}^2$

proviene de una transformación continua que puede deshacerse del mismo modo (Figura 3.3).

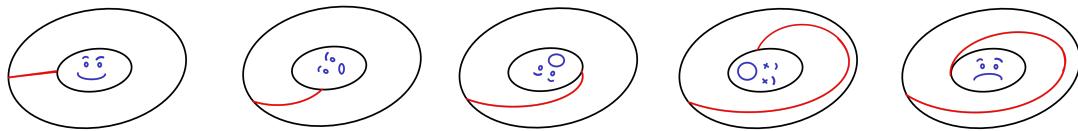


Figura 3.3: Deformación continua del giro de Dehn en  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejemplo 3.4** (Homeomorfismos en la esfera). *Sea  $p \in \mathbb{S}^2$  un punto fijo. Recordando la proyección estereográfica, podemos definir un homeomorfismo  $\varphi : \mathbb{S}^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Cualquier homeomorfismo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  define un homeomorfismo  $\tilde{f} : \mathbb{S}^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{p\}$  dado por  $\tilde{f} = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ . Dicho homeomorfismo se puede extender a un homeomorfismo en toda la esfera que fija al punto  $p$ .*

*Con la construcción del homeomorfismo  $\tilde{f}$  podemos manipular la esfera así como si lo hiciéramos con  $\mathbb{R}^2$ . Una aplicación de este hecho aparece en el Ejemplo 3.27.*

En algunas superficies podemos exhibir algunos ejemplos de homeomorfismos que modifican o permutan las estructuras de una superficie, sin provenir de giros de Dehn.

**Ejemplo 3.5** (Traslación de Género). *La escalera de Jacob puede encajarse en  $\mathbb{R}^3$  de manera simétrica a lo largo del eje  $x$ , y del plano  $xy$ . En dicho caso, la traslación  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x - 1, y, z)$  se restringe a un homeomorfismo dentro de la escalera de Jacob.*

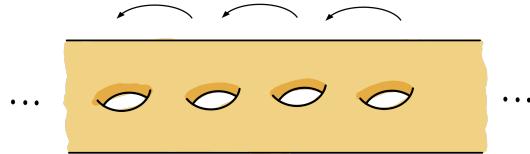


Figura 3.4: Traslación del género en la Escalera de Jacob.

**Ejemplo 3.6** (Permutación de fines acumulados por género). *Así como en el Ejemplo 3.5, algunas rotaciones de  $\mathbb{R}^3$  también se pueden restringir a homeomorfismos de superficies encajadas. Tal es el caso de la superficie trípode en la que se realiza una rotación por un ángulo de  $\frac{2\pi}{3}$ . Nótese que este homeomorfismo tiene orden 3.*

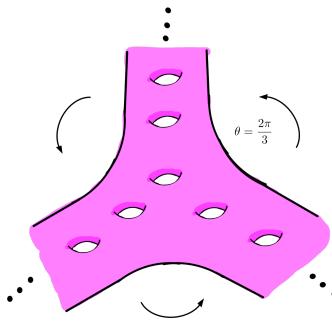
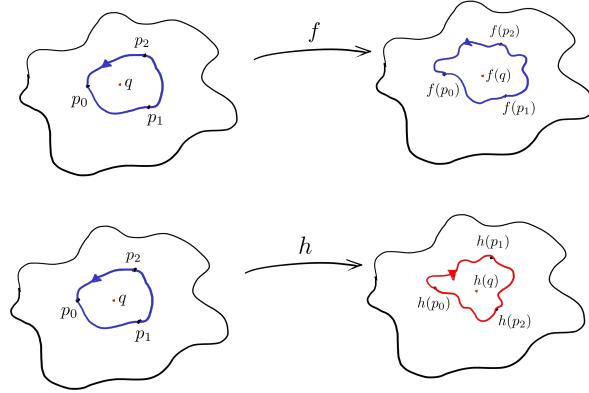


Figura 3.5: Rotación de fines.

**Homeomorfismos que invierten la orientación.** Un homeomorfismo  $f : S \rightarrow S$  en una superficie orientable  $S$  tiene la cualidad de preservar o invertir la orientación de la superficie. En la literatura que concierne a los grupos modulares de superficies es relevante la distinción entre homeomorfismos que preservan o invierten la orientación.

La diferencia entre dichos homeomorfismos se ejemplifica con la Figura 3.6. Los homeomorfismos que preservan la orientación, preservan el sentido en que las curvas rodean un punto y su imagen. Por ejemplo, la función identidad  $id_S : S \rightarrow S$  es un homeomorfismo que preserva la orientación. Una definición precisa de lo que significa preservar o invertir orientación puede revisarse en [22] para el caso diferenciable.

Figura 3.6: El homeomorfismo  $f$  preserva la orientación; el homeomorfismo  $h$  invierte la orientación.

**Ejemplo 3.7.** A continuación presentamos homeomorfismos que invierten la orientación en algunas superficies orientables.

- En  $\mathbb{R}^2$  la conjugación compleja  $(x, y) = z \mapsto \bar{z} = (x, -y)$  invierte la orientación.
- En la esfera,  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  dado por  $f(x, y, z) = (x, y, -z)$  invierte la orientación.

- La suma conexa de tres toros  $S_3 := \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$  (ver Ejemplo 2.6), puede encajarse en  $\mathbb{R}^3$  de manera simétrica a lo largo del plano  $xy$ , de tal forma que  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$   $f(x, y, z) = (x, y, -z)$  cumple que  $f(S_3) = S_3$ . En dicho caso, la reflexión  $f$  se restringe a un homeomorfismo de  $S_3 \rightarrow S_3$  que invierte la orientación.

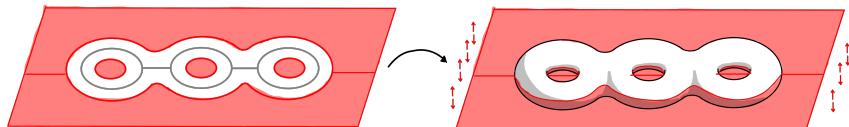


Figura 3.7: Construcción del encaje simétrico de  $S_3$  a lo largo del plano  $xy$ .

Cualquier superficie orientable (posiblemente de tipo infinito y posiblemente con frontera no vacía) puede encajarse en  $\mathbb{R}^3$  de manera simétrica a lo largo del plano  $xy$ . La forma de lograr tal encaje se describe en [28, Sección 4.2.1], mediante el inflamamiento de una vecindad regular de una gráfica plana que describe la estructura de la superficie. Por lo tanto, la reflexión siempre define un homeomorfismo que invierta la orientación.

### 3.2. Topología compacto-abierta

Como mencionamos previamente, el grupo de homeomorfismos también tiene estructura topológica. Dado un compacto  $K \subseteq \Sigma$  y un abierto  $U \subseteq \Sigma$  de una superficie  $\Sigma$ , definimos

$$(K, U) := \{f \in \text{Homeo}(\Sigma) : f(K) \subseteq U\}.$$

Dichos conjuntos conforman una *prebase*<sup>8</sup> para la topología en  $\text{Homeo}(\Sigma)$  que se conoce como la **topología compacto-abierta**. Con dicha topología, tenemos el siguiente teorema, cuya demostración se divide en las Proposiciones 3.10 y 3.11.

**Teorema 3.8.** *El grupo de homeomorfismos de una superficie  $\Sigma$ ,  $\text{Homeo}(\Sigma)$ , es un grupo topológico con la topología compacto-abierta.*

El teorema anterior es general en el sentido de que es independiente de si la superficie  $\Sigma$  es orientable, compacta o con frontera no vacía. Para proceder con la demostración de las Proposiciones 3.10 y 3.11 debemos simplificar la prebase para la topología compacto-abierta. Esto lo haremos mediante el siguiente resultado.

**Lema 3.9.** *La colección de abiertos (en la topología compacto-abierta)  $\{(\bar{K}, U)\}$  donde  $K \subseteq \Sigma$  es abierto y conexo con  $\bar{K}$  compacto y  $U \subseteq \Sigma$  abierto, conforma una prebase de la topología compacto-abierta.*

<sup>8</sup>Una prebase  $\mathcal{P}$  para una topología de  $X$  es una colección de subconjuntos de  $X$  cuya unión es  $X$ . La **topología generada por una prebase  $\mathcal{P}$**  es aquella definida por la colección de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de  $\mathcal{P}$ .

*Demostración.* Sea  $(C, U)$  un prebásico en la topología compacto-abierta y tomemos  $f \in (C, U)$ . Entonces  $C \subseteq f^{-1}(U)$ . Dado que  $\Sigma$  es Hausdorff, localmente conexo y localmente compacto, para cada  $p \in C$ , existe un abierto  $U_p$ , conexo y *relativamente compacto*<sup>9</sup> tal que  $p \in U_p \subseteq \overline{U_p} \subseteq f^{-1}(U)$ . Por la compacidad de  $C$ , podemos tomar una cantidad finita  $p_1, \dots, p_k \in C$  tales que  $C \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_{p_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^k \overline{U_{p_i}} \subseteq f^{-1}(U)$ . Se sigue que  $f \in \bigcap_{i=1}^k (\overline{U_{p_i}}, U) \subseteq (C, U)$ .  $\square$

**Proposición 3.10.** *La operación composición*

$$\begin{aligned} \mu : \quad \text{Homeo}(\Sigma) \times \text{Homeo}(\Sigma) &\longrightarrow \text{Homeo}(\Sigma) \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g, \end{aligned}$$

es continua.

*Demostración.* Sea  $(K, U)$  un abierto prebásico cualquiera y sean  $f, g \in \text{Homeo}(\Sigma)$  tales que  $\mu(f, g) = f \circ g \in (K, U)$ . Se cumple entonces que  $g(K) \subseteq f^{-1}(U)$ . Dado que  $\Sigma$  es localmente compacta y que  $g(K)$  es compacto, existe un abierto  $V \subseteq \text{Homeo}(\Sigma)$  relativamente compacto tal que  $g(K) \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq f^{-1}(U)$ . Se tiene así que  $g(K) \subseteq V$  y  $f(\overline{V}) \subseteq U$ , lo que implica  $(f, g) \in (\overline{V}, U) \times (K, V) \subseteq \mu^{-1}(K, U)$ . Esto prueba que la operación composición es continua.  $\square$

**Proposición 3.11.** *La involución*

$$\begin{aligned} \nu : \quad \text{Homeo}(\Sigma) &\longrightarrow \text{Homeo}(\Sigma) \\ f &\longmapsto f^{-1}, \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

*Demostración.* Tomemos un abierto prebásico  $(\overline{K}, U)$  como los definidos en el Lema 3.9, y sea  $h \in \text{Homeo}(\Sigma)$  tal que  $\nu(h) = h^{-1} \in (\overline{K}, U)$ . Del mismo modo que se demostró en el Lema 3.9, existen entornos  $V_1, V_2 \subseteq \Sigma$  abiertos, tales que

$$h^{-1}(K) \subseteq h^{-1}(\overline{K}) \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq U.$$

Se sigue que  $\overline{V_2} \setminus V_1 \subseteq U \setminus h^{-1}(\overline{K})$ . Aplicando  $h$  se obtiene que  $h(\overline{V_2} \setminus V_1) = h(\overline{V_2}) \setminus h(V_1) \subseteq h(U) \setminus \overline{K}$ . De esta manera, dado  $p \in h^{-1}(K) \subseteq V_1$ , el conjunto

$$M := (\{p\}, K) \cap (\overline{V_2} \setminus V_1, h(U) \setminus \overline{K}),$$

define una vecindad de  $h$ .

Veamos que  $\nu(M) \subseteq (\overline{K}, U)$ . En efecto, tomemos  $f \in M$ . Por un lado, tenemos que  $\Sigma = f(V_1) \sqcup f(\overline{V_2} \setminus V_1) \sqcup f(\Sigma \setminus \overline{V_2})$  es una unión disjunta y por otro lado sabemos que  $f(\overline{V_2} \setminus V_1) \subseteq h(U) \setminus \overline{K}$ .

<sup>9</sup>Un subconjunto  $A \subseteq X$  de un espacio topológico  $X$  es *relativamente compacto* si su cerradura en  $X$  es compacta.

De este modo concluimos que  $\overline{K} \subseteq f(V_1) \sqcup f(\Sigma \setminus \overline{V_2})$ . Sin embargo,  $\overline{K}$  es conexo, por lo que debe tenerse  $\overline{K} \subseteq f(V_1)$  o bien  $\overline{K} \subseteq f(\Sigma \setminus \overline{V_2})$ . Dado que  $f(p) \in K$ , tenemos que  $\overline{K} \cap f(V_1) \neq \emptyset$ . Así,  $\overline{K} \subseteq f(V_1)$ , y por lo tanto  $\nu(f) = f^{-1} \in (\overline{K}, U)$ .  $\square$

Una de las propiedades más interesantes de la topología compacto-abierta es que la acción de grupo de homeomorfismos sobre la superficie  $\Sigma$  es continua; en otras palabras, la *función evaluación*

$$\begin{aligned} \text{Homeo}(\Sigma) \times \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ (f, p) &\longmapsto f(p) \end{aligned}$$

es continua; abajo en la Proposición 3.12 damos una prueba de este resultado.

En general, R. Arens decide llamar *topología admisible* de  $\text{Homeo}(X)$  a toda aquella que hace continua a la acción del grupo de homeomorfismos sobre el espacio topológico  $X$ . Una consecuencia importante del estudio de Arens es que para toda superficie  $\Sigma$ , la topología compacto-abierta en  $\text{Homeo}(\Sigma)$  es, de hecho, la topología más gruesa entre todas aquellas que cumplen la propiedad de admisibilidad. Recomendamos revisar el interesante artículo [2, Teorema 2] para más detalles.

**Proposición 3.12.** *Sea  $\Sigma$  una superficie topológica y  $\text{Homeo}(\Sigma)$  el grupo de homeomorfismo de  $\Sigma$  con la topología compacto-abierta. Entonces la función evaluación*

$$\begin{aligned} \text{Homeo}(\Sigma) \times \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ (f, p) &\longmapsto f(p) \end{aligned}$$

*es continua.*

*Demostración.* Sean  $f \in \text{Homeo}(\Sigma)$  y  $p \in \Sigma$ . Sea  $U \subseteq \Sigma$  una vecindad de  $f(p)$ . Entonces  $f^{-1}(U)$  es una vecindad de  $p$ . Sabemos que  $\Sigma$  es localmente compacta, por lo que existe un abierto  $V$  con  $\overline{V}$  compacto y

$$p \in V \subseteq \overline{V} \subseteq f^{-1}(U).$$

Podemos deducir que  $f(\overline{V}) \subseteq U$  y con ello  $f \in (\overline{V}, U)$ . Nótese que  $(f, p) \in (\overline{V}, U) \times V$  y que cada  $(h, q) \in (\overline{V}, U) \times V$  cumple  $h(q) \in h(\overline{V}) \subseteq U$ , por lo que  $(\overline{V}, U) \times V$  está contenido en la preimagen de  $U$  bajo la función evaluación.  $\square$

**Observación 3.13.** *La continuidad de la función evaluación implica que: si  $\{f_n\}$  es una sucesión de homeomorfismos que converge a  $f \in \text{Homeo}(\Sigma)$  con la topología compacto-abierta, entonces  $f_n$  converge a  $f$  puntualmente.*

El grupo de homeomorfismos hereda propiedades topológicas de  $\Sigma$ , como las enunciadas a continuación.

**Proposición 3.14.** *Para toda superficie  $\Sigma$ ,  $\text{Homeo}(\Sigma)$  es Hausdorff.*

*Demuestra.* Dados  $f, g \in \text{Homeo}(\Sigma)$  distintos, en algún punto  $p \in \Sigma$  tendremos  $f(p) \neq g(p)$ . Ya que  $\Sigma$  es Hausdorff, podemos encontrar  $U, V \subseteq \Sigma$  vecindades de  $f(p)$  y  $g(p)$  respectivamente que son disjuntas. Nótese que  $f \in (\{p\}, U)$ ,  $g \in (\{p\}, V)$  y  $(\{p\}, U) \cap (\{p\}, V) = \emptyset$ .  $\square$

**Proposición 3.15.** *Para toda superficie  $\Sigma$ ,  $\text{Homeo}(\Sigma)$  es segundo numerable.*

*Demuestra.* Escogemos una base numerable  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de abiertos de  $\Sigma$ , relativamente compactos, homeomorfos al disco  $\mathbb{D}^2$  (o al semidisco  $\mathbb{D}^2 \cap \mathbb{H}^2$  para puntos frontera). La colección numerable de abiertos  $\Gamma = \{(\overline{B_n}, B_m)\}_{n, m \in \mathbb{N}}$  es una prebase para  $\text{Homeo}(\Sigma)$  con la topología compacto-abierta. Notemos que para cualquier homeomorfismo  $f \in \text{Homeo}(\Sigma)$ , y cualquier abierto  $B_n$ , existe  $m$  tal que  $\overline{B_m} \subseteq f^{-1}(B_n)$ . Así que  $f \in (\overline{B_m}, B_n)$ .

Ahora, basta ver que  $\mathcal{B}(\Gamma)$ , la base generada por  $\Gamma$ , genera la topología compacto-abierta. Esto, porque  $\mathcal{B}(\Gamma)$  consiste en las intersecciones finitas de los elementos de  $\Gamma$ , por lo tanto sigue siendo numerable. Sea  $(K, U)$  cualquier abierto prebásico de  $\text{Homeo}(\Sigma)$  y tomemos  $f \in (K, U)$ . Dado  $x \in K$ , existe  $j_x$  tal que  $f(x) \in B_{j_x} \subseteq \overline{B_{j_x}} \subseteq U$ . Similarmente, existe  $i_x$  tal que

$$x \in B_{i_x} \subseteq \overline{B_{i_x}} \subseteq f^{-1}(B_{j_x}) \subseteq f^{-1}(\overline{B_{j_x}}) \subseteq f^{-1}(U),$$

de modo que  $f(\overline{B_{i_x}}) \subseteq B_{j_x} \subseteq U$ . Por la compactidad de  $K$ , existen  $x_1, \dots, x_k \in K$  tales que  $K \subseteq \bigcup_{l=1}^k B_{i_{x_l}}$ . Nótese que  $f \in \bigcap_{l=1}^k (\overline{B_{i_{x_l}}}, B_{j_{x_l}})$ . Pero si  $g \in \bigcap_{l=1}^k (\overline{B_{i_{x_l}}}, B_{j_{x_l}})$ , entonces

$$g(K) \subseteq \bigcup_{l=1}^k g(B_{i_{x_l}}) \subseteq \bigcup_{l=1}^k B_{j_{x_l}} \subseteq U.$$

Por lo tanto  $f \in \bigcap_{l=1}^k (\overline{B_{i_{x_l}}}, B_{j_{x_l}}) \subseteq (K, U)$ , probando lo deseado.  $\square$

**Observación 3.16.** *Una consecuencia de que  $\text{Homeo}(\Sigma)$  sea segundo numerable es que es separable. De cada abierto de la base numerable se puede escoger un punto, para formar un subconjunto  $D \subseteq \text{Homeo}(\Sigma)$ , que será denso y numerable.*

**Observación 3.17.** *Las demostraciones expuestas en esta sección son válidas, en general, para  $\text{Homeo}(X)$ , cuando  $X$  es un espacio topológico Hausdorff, locamente compacto y locamente conexo. Tales propiedades son satisfechas por superficies. Específicamente la Proposición 3.14 sólo utiliza que  $\Sigma$  sea Hausdorff; las Proposiciones 3.10 y 3.12 requieren adicionalmente que  $\Sigma$  sea localmente compacta; mientras que para el Lema 3.9, la Proposición 3.11 y el Teorema 3.8 también se utilizó que  $\Sigma$  fuera localmente conexa.*

### 3.3. Metrizabilidad invariante del grupo de homeomorfismos

El grupo  $(\mathbb{R}^2, +)$  con la métrica euclíadiana es un grupo topológico, donde las traslaciones  $p \mapsto p + c$  son isometrías. Esta propiedad de la métrica se conoce como *invarianza de la operación del grupo*. Como  $\mathbb{R}^2$  es conmutativo, no hace falta distinguir si la invarianza es mediante sumar por la izquierda o por la derecha. En general este no es el caso, como veremos en la Sección 3.4 con el grupo  $\text{Homeo}(\Sigma)$ . De momento, consideremos una cualidad de metrizabilidad en grupos descrita en la siguiente definición.

**Definición 3.18.** *Sea  $G$  un grupo con una métrica  $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que  $d$  es una métrica invariante izquierda si*

$$d(f, g) = d(hf, hg), \quad \text{para cada } f, g, h \in G.$$

*La métrica  $d$  es invariante derecha si*

$$d(f, g) = d(fh, gh), \quad \text{para cada } f, g, h \in G.$$

Si  $G$  es un grupo con una métrica  $d$  invariante tanto por la izquierda como por la derecha, entonces  $G$  es grupo topológico con la topología inducida por  $d$ . Para esto basta ver que la función  $(g, h) \mapsto g^{-1}h$  es continua (por el Lema 3.30). Esto sigue directamente de la desigualdad

$$d(g^{-1}h, \hat{g}^{-1}\hat{h}) \leq d(\hat{g}, g) + d(\hat{h}, h).$$

En general una métrica arbitraria en un grupo, no suele ser invariante izquierda y derecha al mismo tiempo. Además, hay ocasiones en las que no habrá invarianza izquierda ni derecha (Ejemplo 3.27).

**Observación 3.19.** *Sea  $G$  un grupo topológico, con una métrica  $d$  invariante por la izquierda, compatible con la topología. Dado que  $G \times G \rightarrow G \times G : (f, g) \mapsto (f^{-1}, g^{-1})$  es un homeomorfismo, la métrica  $d'(f, g) = d(f^{-1}, g^{-1})$  es invariante por la derecha y es compatible con la topología. Análogamente si  $d$  es invariante derecha, entonces  $d'$  es invariante izquierda.*

Una forma de comprobar que  $\text{Homeo}(\Sigma)$  tiene una métrica compatible que es invariante por la izquierda (o por la derecha) es aplicando el siguiente teorema, cuyas hipótesis son claramente satisfechas por el grupo de homeomorfismos de una superficie. Una demostración se puede encontrar en [7, Teorema 2.B.2].

**Teorema 3.20** (Birkhoff-Kakutani). *Sea  $G$  un grupo topológico. Entonces,  $G$  es Hausdorff y el neutro  $1 \in G$  tiene una base numerable de abiertos si, y sólo si,  $G$  es metrizable. Más aún, la métrica compatible  $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$  se puede escoger de forma que sea invariante izquierda.*

**Corolario 3.21.** *El grupo  $\text{Homeo}(\Sigma)$  admite una métrica invariante izquierda.*

El teorema anterior es muy fuerte porque logra sincronizar la topología de un grupo topológico con una métrica invariante izquierda (o derecha). Sin embargo, la existencia de una métrica invariante izquierda no significa que sea completa. Un claro ejemplo es  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ . Aún así, hay situaciones en las que sí se puede afirmar que una métrica invariante izquierda es una métrica completa. Por ejemplo, si  $G$  es un grupo topológico localmente compacto con una métrica compatible  $d$  invariante izquierda, entonces  $G$  es completo con dicha métrica [7, Observación 2.B.1].

Queremos encontrar una métrica completa para  $\text{Homeo}(\Sigma)$ . La razón por la que no acudimos al planteamiento anterior es porque para superficies cuyo grupo fundamental no es finitamente generado, el grupo de homeomorfismos no es localmente compacto (Observación 4.10 de la Sección 4). Es por ello que tenemos que buscar una alternativa más elemental.

### 3.4. El grupo de homeomorfismos es un grupo polaco

Se dice que un grupo topológico  $G$  es un *grupo polaco* si es separable y es completamente metrizable. Es decir, existe una métrica  $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$  completa y compatible con la topología de  $G$ . En esta sección nos dedicaremos a probar que el grupo de homeomorfismos de toda superficie, con la topología compacto-abierta, es un grupo polaco.

**Teorema 3.22.** *Para toda superficie  $\Sigma$ , el grupo de homeomorfismos  $\text{Homeo}(\Sigma)$  es un grupo polaco.*

De la Observación 3.16 sabemos que  $\text{Homeo}(\Sigma)$  es separable, por lo que para demostrar que es polaco bastará con exhibir una métrica completa compatible con la topología compacto-abierta.

Dado que las superficies son espacios completamente metrizable (consecuencia del Teorema 4.5 y 4.6 de [20]), podemos suponer que en una superficie  $\Sigma$  existe una métrica  $d : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  completa. Dado  $f \in \text{Homeo}(\Sigma)$ , un compacto  $K \subseteq \Sigma$  y un número  $\varepsilon > 0$ , definimos

$$[f, K, \varepsilon] := \left\{ g \in \text{Homeo}(\Sigma) : \sup_{x \in K} d(f(x), g(x)) < \varepsilon \right\}.$$

Estos conjuntos conforman una base para la topología conocida como **topología de convergencia compacta**.

Resulta que en  $\text{Homeo}(\Sigma)$ , la topología *compacto-abierta* coincide con la de *convergencia compacta* [30, Teorema 46.8]. Así que podemos aprovechar esta nueva descripción y definir, de manera explícita, métricas compatibles y completas en  $\text{Homeo}(\Sigma)$ . Las métricas que definiremos a continuación dependerán de si la superficie  $\Sigma$  es compacta o no.

**Definición 3.23.** *Sea  $\Sigma$  una superficie compacta con una métrica completa  $d$ . Definimos la métrica  $\rho : \text{Homeo}(\Sigma) \times \text{Homeo}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\rho(f, g) = \max_{x \in \Sigma} d(f(x), g(x)).$$

*Con la métrica  $\rho$  considérese en  $\text{Homeo}(\Sigma)$  la métrica  $D : \text{Homeo}(\Sigma) \times \text{Homeo}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por*

$$D(f, g) = \rho(f, g) + \rho(f^{-1}, g^{-1}).$$

Para el caso no compacto tenemos la métrica que describimos a continuación. En esencia son similares, salvo el hecho de que se requiere el uso de una saturación por compactos. Diremos que una colección  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de subconjuntos de  $\Sigma$  es una *saturación por compactos* si cada  $K_n$  es compacto,  $K_n \subseteq \text{int } K_{n+1}$  y  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \Sigma$ .

**Definición 3.24.** *Sea  $\Sigma$  una superficie no compacta y  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una saturación por compactos de  $\Sigma$ . Dados  $f, g \in \text{Homeo}(\Sigma)$  definimos*

$$\rho_n(f, g) := \min \left\{ \max_{x \in K_n} \{d(f(x), g(x))\}, 2^{-n} \right\}.$$

*Se define en  $\text{Homeo}(\Sigma)$  la métrica  $\rho : \text{Homeo}(\Sigma) \times \text{Homeo}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\rho(f, g) := \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(f, g) \leq 1,$$

*y mediante  $\rho$  se define la métrica  $D : \text{Homeo}(\Sigma) \times \text{Homeo}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$  por*

$$D(f, g) := \rho(f, g) + \rho(f^{-1}, g^{-1}).$$

Mostraremos que las métricas  $\rho$  y  $D$  en la Definición 3.24 son compatibles con la topología de convergencia compacta (Proposición 3.25). Para verificar la compatibilidad de las métricas  $\rho$  y  $D$  de la Definición 3.23 se puede emular la misma demostración.

**Proposición 3.25.** *La métrica  $\rho$  de la Definición 3.24 es compatible con la topología de convergencia compacta.*

*Demostración.* Veamos que  $\rho$  es compatible con la topología de convergencia compacta. Tomemos un abierto básico de la topología de convergencia compacta

$$[h, K, \varepsilon] = \left\{ g' \in \text{Homeo}(\Sigma) : \sup_{x \in K} d(h(x), g'(x)) < \varepsilon \right\},$$

con  $K \subseteq \Sigma$  compacto,  $h \in \text{Homeo}(\Sigma)$  y  $\varepsilon > 0$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$  con  $K \subseteq K_n$ . Definamos  $\varepsilon' :=$

$\min\{\varepsilon, 2^{-n-1}\}$  y tomemos

$$g \in B_\rho(h, \varepsilon') := \{g' \in \text{Homeo}(\Sigma) : \rho(h, g') < \varepsilon'\}.$$

Tenemos que  $\max_{x \in K} d(h(x), g(x)) \leq \rho_n(h, g) < \rho(h, g) < \varepsilon$ . Por lo tanto  $g \in [h, K, \varepsilon]$ . De este modo  $B_\rho(h, \varepsilon') \subseteq [h, K, \varepsilon]$ .

Ahora, si tomamos una bola arbitraria

$$B_\rho(h, \varepsilon) := \{g' \in \text{Homeo}(\Sigma) : \rho(h, g') < \varepsilon\},$$

definida con algún  $h \in \text{Homeo}(\Sigma)$  y  $\varepsilon > 0$ , entonces para algún natural  $n \geq 2$  se tiene  $\sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Definimos  $\varepsilon' = \min\{\frac{\varepsilon}{2n}, 2^{-n}\}$  y tomamos cualquier

$$g \in \bigcap_{k=1}^{n-1} [h, K_k, \varepsilon'],$$

donde estamos intersectando abiertos prebásicos de la topología de convergencia compacta. Se verifica que  $\rho_k(h, g) < \varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{2n}$  para toda  $k < n$ . De este modo

$$\rho(h, g) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2n} < \varepsilon,$$

y por lo tanto,  $g \in B_\rho(h, \varepsilon)$ . Esto prueba que

$$\bigcap_{k=1}^{n-1} \left[ h, K_k, \min\left\{\frac{\varepsilon}{2n}, 2^{-n}\right\} \right] \subseteq B_\rho(h, \varepsilon). \quad \square$$

La métrica  $\rho$  de la Definición 3.24, no asegura completitud métrica, porque si una sucesión de homeomorfismos  $\{f_n\}$  es de Cauchy, poco sabemos de la sucesión  $\{f_n^{-1}\}$ . De ahí nuestra necesidad de considerar la métrica  $D$ . Tanto la métrica  $D$  de la Definición 3.23 como la métrica  $D$  de la Definición 3.24 son completas. En la siguiente proposición sólo demostraremos el caso de la métrica  $D$  de la Definición 3.24, pues el caso de la Definición 3.23 es aún más sencillo.

**Proposición 3.26.** *Sea  $\Sigma$  una superficie no compacta. La métrica  $D$  de la Definición 3.24, es una métrica completa en  $\text{Homeo}(\Sigma)$ .*

*Demostración.* Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de Cauchy de elementos de  $\text{Homeo}(\Sigma)$  respecto a la métrica  $D$ . Tomemos  $p \in \Sigma$  y sea  $M \in \mathbb{N}$  tal que el compacto  $K_M$  contenga al punto  $p$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , con  $2^{-M} > \varepsilon$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n, m \geq N$  entonces  $\varepsilon > D(f_n, f_m)$ . De la siguiente cadena de desigualdades

$$2^{-M} > \varepsilon > D(f_n, f_m) \geq \rho(f_n, f_m) \geq \rho_M(f_n, f_m) \geq d(f_n(p), f_m(p))$$

concluimos que para  $m, n \geq N$  se tiene  $d(f_n(p), f_m(p)) < \varepsilon$ , lo cual implica que la sucesión  $\{f_n(p)\}$  es de Cauchy en  $\Sigma$ , y debe converger a algún punto  $f(p) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p)$ .

El hecho de que  $p \in K_M$  haya sido arbitrario, implica que la sucesión  $f_n$  es uniformemente de Cauchy en  $K_M$ , y por lo tanto, converge de manera uniforme a  $f$  en  $K_M$ . Así que  $f$  es continua tanto en  $K_M$  como en  $\text{int}(K_M)$ . Nuevamente,  $M \in \mathbb{N}$  fue arbitrario, y  $f$  se puede definir en  $\bigcup_{M \in \mathbb{N}} \text{int}(K_M) = \Sigma$ . Por lo tanto  $f$  es continua en  $\Sigma$ .

De manera análoga podemos demostrar que la sucesión  $f_m^{-1}$  converge de manera puntual a una función continua  $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$ .

Probaremos ahora que  $f$  es un homeomorfismo cuya inversa coincide con  $h$ . Tomemos  $p \in \Sigma$  y definamos  $q_m := f_m^{-1}(p)$  para cada  $m \in \mathbb{N}$ . La sucesión  $\{q_m\}$  converge a  $h(p)$  con  $h(p) \in \text{int}(K_M)$  para algún natural  $M$ . Por lo tanto, existe un  $L \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $m > L$ , se tiene  $q_m \in \text{int}(K_M) \subseteq K_M$ .

Por otro lado, sabemos que la sucesión  $\{f_n\}$  es de Cauchy, por lo que para todo  $0 < \varepsilon < 2^{-M}$  existe un natural  $L'$  tal que para todo  $m, n > L'$  se satisface

$$2^{-M} > \varepsilon > D(f_n, f_m) \geq \rho_M(f_n, f_m).$$

Dado que  $\rho_M(f_n, f_m) < 2^{-M}$ , se tiene que

$$\rho_M(f_n, f_m) = \max_{q \in K_M} d(f_n(q), f_m(q)).$$

Por lo tanto, si  $m, n > \max\{L, L'\}$ , se tiene por un lado que  $q_m \in K_M$ , y por otro lado

$$d(f_n(f_m^{-1}(p)), p) = d(f_n(q_m), f_m(q_m)) \leq \max_{q \in K_M} d(f_n(q), f_m(q)) = \rho_M(f_n, f_m) \leq D(f_n, f_m) < \varepsilon.$$

Tomar los límites  $m \rightarrow \infty$  y  $n \rightarrow \infty$  para ver que

$$\epsilon > \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} d(f_n(f_m^{-1}(p)), p) = d\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\left(\lim_{m \rightarrow \infty} f_m^{-1}(p)\right), p\right) = d(f(h(p)), p).$$

Dado que  $\varepsilon$  fue arbitrario, se tiene que  $d(f(h(p)), p) = 0$ , por lo que  $f(h(p)) = p$ . De manera análoga se cumple que  $h(f(p)) = p$ . Terminamos concluyendo así que  $h$  es la función inversa de  $f$ .

Finalmente, veamos que  $f_n$  converge a  $f$  respecto a la métrica  $D$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Por un lado podemos

encontrar  $M \in \mathbb{N}$  tal que

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por otro lado, como las sucesiones  $\{f_n\}$  y  $\{f_n^{-1}\}$  convergen uniformemente en cada compacto  $K_i$  a  $f$  y  $f^{-1}$ , respectivamente, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para toda  $n \geq N$ , y toda  $k \leq M$  se tenga

$$\rho_k(f_n, f), \rho_k(f_n^{-1}, f^{-1}) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

De este modo se concluye que si  $n \geq N$ , entonces

$$D(f_n, f) < \varepsilon.$$

□

Por el hecho de que un homeomorfismo no es necesariamente una isometría, la métrica  $\rho$  de la Definición 3.23 en general no es invariante izquierda (Ejemplo 3.27), aunque un cálculo sencillo verifica que  $\rho$  sí es invariante derecha (Proposición 3.28).

**Ejemplo 3.27** (La métrica  $\rho$  en  $\text{Homeo}(\mathbb{S}^2)$  no es invariante izquierda). *Recordemos que el diámetro de la esfera  $\mathbb{S}^2$ ,  $\text{diam}(\mathbb{S}^2)$ , está dado por la distancia entre el polo norte  $N = (0, 0, 1)$  y el polo sur  $S = (0, 0, -1)$ . En la esfera, podemos tomar un homeomorfismo  $f$  cuya distancia a la identidad  $\text{id}_{\mathbb{S}^2}$  cumpla que para alguna  $p_0 \in \mathbb{S}^2$ ,*

$$\text{diam}(\mathbb{S}^2) > \rho(f, \text{id}_{\mathbb{S}^2}) = d(f(p_0), p_0) > 0,$$

por ejemplo, tomar  $f$  una rotación por un ángulo diminuto.

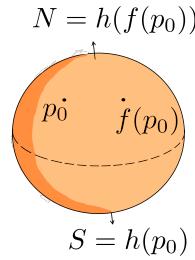
También podemos construir un homeomorfismo  $h$  de la esfera tal que  $h(f(p_0)) = N$ , y  $h(p_0) = S$  (Figura 3.8). Para una construcción del homeomorfismo  $h$  recordar el Ejemplo 3.4. Esto implica que

$$\rho(hf, h) = \text{diam}(\Sigma) > \rho(f, \text{id}).$$

**Proposición 3.28.** *Sea  $\Sigma$  una superficie compacta y  $\rho$  la métrica en  $\text{Homeo}(\Sigma)$  de la Definición 3.23. Entonces  $\rho$  es invariante derecha.*

*Demostración.* Sean  $h, f, g \in \text{Homeo}(\Sigma)$ . Dado  $x \in \Sigma$ , definimos  $y = h^{-1}(x)$ , y notemos que

$$d(fh(x), gh(x)) = d(f(y), g(y)) \leq \rho(f, g).$$

Figura 3.8: Homeomorfismo  $h$  que no es isometría.

De este modo  $\rho(fh, gh) \leq \rho(f, g)$ . Lo anterior funciona para cualesquiera  $f, g, h \in \text{Homeo}(\Sigma)$ . Así que podemos definir los homeomorfismos  $\tilde{f} = fh, \tilde{g} = gh, \tilde{h} = h^{-1}$ , y seguir teniendo

$$\rho(f, g) = \rho(\tilde{f}\tilde{h}, \tilde{g}\tilde{h}) \leq \rho(\tilde{f}, \tilde{g}) = \rho(fh, gh).$$

Por lo tanto,  $\rho(fh, gh) = \rho(f, g)$ . □

La métrica  $\rho$  de la Definición 3.24 no va a ser invariante derecha y tampoco invariante izquierda, como lo muestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.29** (La métrica  $\rho$  en  $\text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$  no es invariante izquierda ni invariante derecha). *En el plano  $\mathbb{R}^2$ , consideremos para cada  $n \geq 1$  el conjunto  $K_n := \overline{B}_{2^{n-4}}(0) = \{p \in \mathbb{R}^2 : |p| \leq 2^{n-4}\}$ . Si hacemos  $f := id$ ,  $g := -id$  y  $h := 2id$ , tendremos*

$$d(f(p), g(p)) = 2|p| \quad y \quad d(fh(p), gh(p)) = 4|p| = d(hf(p), hg(p)).$$

Con ello se observa que  $\rho_1(f, g) = \min\{2^{-2}, 2^{-1}\} = 2^{-2}$  y similarmente  $\rho_1(hf, hg) = \rho_1(fh, gh) = 2^{-1}$ . Pero para  $n \geq 2$  sucede que

$$\rho_n(f, g) = 2^{-n} = \rho_n(fh, gh) = \rho_n(gf, hg).$$

Por lo tanto  $\rho(f, g) \neq \rho(fh, gh) = \rho(hf, hg)$ .

### 3.5. Subgrupos especiales

Incluidos en  $\text{Homeo}(\Sigma)$  existen algunos subgrupos que son muy importantes en la literatura. Por ejemplo,  $\text{Homeo}_0(\Sigma)$ , que denota a la componente arcoconexa de la identidad  $id_\Sigma$ , es un subgrupo normal, como demostraremos en la Proposición 3.31.

**Lema 3.30.** *Sea  $G$  un grupo con topología  $\tau$ . Entonces  $G$  es grupo topológico si y sólo si la función  $\lambda(f, g) = f^{-1} \cdot g$  es continua.*

*Demostración.* Si  $G$  es un grupo topológico, la continuidad de  $\lambda$  se sigue de ver a esta función como la siguiente composición de funciones continuas

$$\begin{aligned} \lambda : \quad G \times G &\xrightarrow{\nu \times id} \quad G \times G &\xrightarrow{\mu} \quad G \\ (f, g) &\mapsto \quad (f^{-1}, g) &\mapsto \quad f^{-1} \cdot g. \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que la función  $\lambda$  es continua. Entonces la involución se compone de las siguientes funciones continuas

$$\begin{aligned} \nu : \quad G &\longrightarrow \quad G \times \{1\} &\xrightarrow{\lambda} \quad G \\ f &\mapsto \quad (f, 1) &\mapsto \quad f^{-1} \cdot 1 = f^{-1}. \end{aligned}$$

En consecuencia, la operación del grupo se compone de funciones continuas

$$\begin{aligned} \mu : \quad G \times G &\xrightarrow{\nu \times id} \quad G \times G &\xrightarrow{\lambda} \quad G \\ (f, g) &\mapsto \quad (f^{-1}, g) &\mapsto \quad (f^{-1})^{-1} \cdot g = f \cdot g. \end{aligned} \quad \square$$

**Proposición 3.31.** *Sea  $G$  un grupo topológico y  $G_0$  la componente arcoconexa del elemento neutro  $1 \in G$ . Se cumple que  $G_0$  es un subgrupo normal de  $G$ .*

*Demostración.* Por el Lema 3.30 tenemos función  $\lambda : G \times G \rightarrow G$  dada por  $\lambda(g, h) = g^{-1}h$  es continua. Si  $g, h \in G_0$ , entonces existen dos caminos  $\mathcal{L}, \mathcal{C} : [0, 1] \rightarrow G$  de tal forma que  $\mathcal{L}(0) = 1 = \mathcal{C}(0)$ ,  $\mathcal{L}(1) = g$  y  $\mathcal{C}(1) = h$ . Con esto podemos construir el camino

$$\begin{aligned} [0, 1] &\longrightarrow \quad G \times G &\longrightarrow \quad G \\ t &\mapsto \quad (\mathcal{L}(t), \mathcal{C}(t)) &\mapsto \quad \mathcal{L}(t)^{-1}\mathcal{C}(t) \end{aligned}$$

define un camino que conecta a 1 con  $g^{-1}h$ . Esto prueba que  $g^{-1}h \in G_0$ . Concluimos así que  $G_0 \leq G$ .

Veamos que  $G_0$  es normal en  $G$ . Nuevamente por el Lema 3.30 tenemos que la conjugación  $h \mapsto g^{-1}hg$  es una función continua. Dado  $h \in G_0$  y cualquier  $g \in G$ , existe un camino  $\mathcal{L} : [0, 1] \rightarrow G$  tal que  $\mathcal{L}(0) = 1$  y  $\mathcal{L}(1) = h$ . Por lo tanto, tenemos la composición de funciones continuas

$$\begin{aligned} [0, 1] &\longrightarrow \quad G &\longrightarrow \quad G \\ t &\mapsto \quad \mathcal{L}(t) &\mapsto \quad g^{-1}\mathcal{L}(t)g \end{aligned}$$

que conecta a 1 con  $g^{-1}hg$ , y se concluye que  $g^{-1}hg \in G_0$ .  $\square$

Si  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ , podemos definir

$$\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma) := \{f \in \text{Homeo}(\Sigma) : f|_{\partial\Sigma} = id_{\partial\Sigma}\},$$

y si  $\partial\Sigma = \emptyset$  conviene establecer

$$\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma) := \text{Homeo}(\Sigma).$$

**Proposición 3.32.** *Para toda superficie  $\Sigma$ ,  $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$  es un subgrupo normal cerrado de  $\text{Homeo}(\Sigma)$ .*

*Demuestra*ción. Sean  $f \in \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$  y  $h \in \text{Homeo}(\Sigma)$ . Entonces para cualquier  $p \in \partial\Sigma$ , se debe tener que  $h(p) \in \partial\Sigma$ . Por lo tanto  $f(h(p)) = h(p)$ , concluyendo que  $h^{-1} \circ f \circ h(p) = h^{-1}(f(h(p))) = h^{-1}(h(p)) = p$ . De este modo  $h^{-1}fh \in \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ .

El hecho de ser cerrado se argumenta usando que si  $\{f_n\} \subseteq \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$  converge a algún  $f \in \text{Homeo}(\Sigma)$  en la topología compacto-abierta, entonces  $\{f_n\}$  converge puntualmente a  $f$  (Observación 3.13). En ese sentido, para toda  $p \in \partial\Sigma$ , se tiene que  $p = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p) = f(p)$ . Por lo tanto,  $f \in \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ .  $\square$

En caso de que la superficie  $S$  sea orientable, para los homeomorfismos que preservan la orientación reservamos la notación siguiente

$$\text{Homeo}^+(S) := \{f \in \text{Homeo}(S) : f \text{ preserva la orientación}\}.$$

Recordemos que toda superficie orientable admite homeomorfismos que invierten la orientación (véase el Ejemplo 3.7). Si la superficie  $N$  es no orientable, por convención ponemos

$$\text{Homeo}^+(N) := \text{Homeo}(N).$$

**Proposición 3.33.** *Para toda superficie orientable  $S$ ,  $\text{Homeo}^+(S)$  es un subgrupo normal abierto y cerrado de  $\text{Homeo}(S)$  que tiene índice 2.*

*Demuestra*ción. Si  $f$  preserva la orientación y  $g$  la invierte, entonces  $f \circ g$  y  $g \circ f$  invierten la orientación. Si  $h$  también invierte la orientación, entonces  $g \circ h$  preserva la orientación, pues sólo hay dos orientaciones posibles. De este modo  $g \circ f \circ g^{-1} \in \text{Homeo}^+(S)$  para todo  $g \in \text{Homeo}(S)$  y todo  $f \in \text{Homeo}^+(S)$ .

Si  $f$  y  $g$  invierten la orientación, entonces  $f^{-1} \circ g$  preserva la orientación implicando que  $f$  y  $g$  son de la misma clase de equivalencia en  $\text{Homeo}(S)/\text{Homeo}^+(S)$ . De ello que  $|\text{Homeo}(S)/\text{Homeo}^+(S)| = 2$ .

Las métricas de las definiciones 3.23 y 3.24 permiten concluir que si dos homeomorfismos  $f, g \in \text{Homeo}(S)$  son suficientemente cercanos, entonces ambos preservan la orientación de la superficie o ambos la invierten (Figura 3.9). Esto significa que la asignación orientación  $\mathcal{O} : \text{Homeo}(S) \rightarrow \{0, 1\}$

$$h \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } h \text{ preserva orientación} \\ 0 & \text{si la invierte} \end{cases}$$

es localmente constante. En otras palabras,  $\mathcal{O}$  es continua, donde  $\{0, 1\}$  tiene la topología discreta. Nótese que esto implica que  $\text{Homeo}^+(S) = \mathcal{O}^{-1}\{1\}$  es un subconjunto abierto y cerrado de  $\text{Homeo}(S)$ .  $\square$

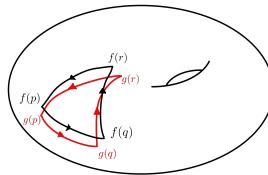


Figura 3.9: Acción de  $f$  y  $g$  en una triangulación orientada de  $S$ .

Por último, podemos definir

$$\text{Homeo}^+(\Sigma; \partial\Sigma) := \text{Homeo}^+(\Sigma) \cap \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma).$$

Nótese que si  $S$  es una superficie orientable con  $\partial S \neq \emptyset$ , entonces todo homeomorfismo  $f \in \text{Homeo}(S; \partial S)$  también está en  $\text{Homeo}^+(S)$ . Al ser una intersección de subgrupos normales y cerrados,  $\text{Homeo}^+(\Sigma; \partial\Sigma)$  es un subgrupo normal y cerrado del grupo de homeomorfismos.

**Proposición 3.34.** *Si  $S$  es una superficie orientable entonces todo elemento de  $\text{Homeo}_0(S)$  preserva la orientación de  $S$ , es decir,*

$$\text{Homeo}_0(S) \leq \text{Homeo}^+(S).$$

*Demostración.* Recordemos que en la demostración de la Proposición 3.33 utilizamos la continuidad de la asignación orientación

$$\mathcal{O} : \text{Homeo}(S) \rightarrow \{0, 1\}$$

para ver que  $\text{Homeo}^+(S)$  es cerrado en  $\text{Homeo}(S)$ . En este caso, notemos además que la imagen de  $\text{Homeo}_0(S)$  bajo  $\mathcal{O}$  es conexo y contiene a  $\{1\}$ . Concluimos que  $\mathcal{O}(\text{Homeo}_0(S)) = \{1\}$ .  $\square$

**Observación 3.35.** Nótese que si  $G$  es un grupo polaco y  $H \leq G$  es un subgrupo cerrado, entonces  $H$  también es un grupo polaco. Esto porque cualquier métrica completa compatible con la topología de  $G$  induce una métrica completa compatible con la topología de  $H$ .

## 4. El grupo modular de una superficie

En la Sección 3 discutimos la metrizabilidad de  $\text{Homeo}(\Sigma)$ . Esto introduce una forma de medir cuánto de diferentes son dos homeomorfismos. Si la distancia entre dos homeomorfismos es suficientemente pequeña, esperaríamos que ambos transformaran de manera similar la superficie.

En esta sección definiremos el concepto *isotopía*, el cual describe a qué nos referimos cuando decimos que dos homeomorfismos transforman de manera similar la superficie. También, exploraremos la relación de este concepto con la conexidad por trayectorias en  $\text{Homeo}(\Sigma)$ . De este modo, podremos definir el *Grupo Modular*  $\text{Mod}(\Sigma)$  (*Mapping Class Group*,  $\text{MCG}(\Sigma)$ , en inglés), y revisaremos cómo  $\text{Mod}(\Sigma)$  hereda propiedades topológicas de  $\text{Homeo}(\Sigma)$ : como el hecho de ser un grupo topológico, Hausdorff y segundo numerable. Al final haremos una breve revisión de las alternativas para demostrar que también es un grupo polaco.

### 4.1. La relación entre isotopía y arcoconexidad

Una isotopía describe cómo un homeomorfismo se convierte en otro pasando continuamente por homeomorfismos intermedios indexados por tiempos  $t \in [0, 1]$ .

**Definición 4.1.** Sea  $\Sigma$  una superficie. Una isotopía es una función  $H : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \Sigma$  continua, tal que para todo  $t \in [0, 1]$  la función

$$\begin{aligned} H_t : \quad \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ p &\longmapsto H(p, t) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

Podemos establecer la siguiente relación en  $\text{Homeo}(\Sigma)$ : diremos que dos homeomorfismos  $f, g \in \text{Homeo}(\Sigma)$  son isotópicos si existe una isotopía  $H : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \Sigma$  tal que  $H_0 = f$  y  $H_1 = g$ .

La relación de isotopía es una relación de equivalencia. Más aún,  $f$  es isotópica a  $g$  si y sólo si  $f^{-1} \circ g$  es isotópica a la identidad. Es importante notar que una isotopía es en particular una homotopía. Por lo tanto, si un homeomorfismo  $f$  es isotópico a  $\text{id}_\Sigma$ , entonces debe fijar la clase de homotopía de toda curva. Por ejemplo en la Figura 4.1, se observa que el giro de Dehn  $T$  ha cambiado la clase de homotopía de la curva naranja, y por ello no es isotópico a  $\text{id}_\Sigma$ . Para el converso, basta encontrar una colección particular de curvas cerradas simples, tal que si  $f$  fija la

clase de isotopía de cada una de ellas, entonces  $f$  es isotópico a  $id_{\Sigma}$ , este criterio se conoce como el *Método de Alexander* (ver detalles en [9, Proposición 2.8]).

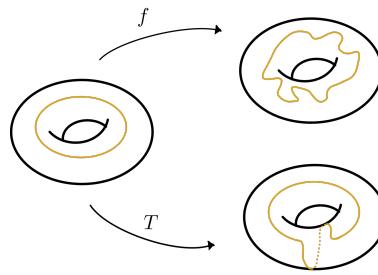


Figura 4.1:  $f$  fija la clase de isotopía de la curva naranja; el giro de Dehn  $T$  no es isotópico a la identidad.

Es de nuestro interés detallar las propiedades topológicas de  $\text{Homeo}(\Sigma)$  que son consecuencia de la relación de isotopía. Por ejemplo, la proposición siguiente describe la relación que tiene el concepto de isotopía con la conexidad por trayectorias de  $\text{Homeo}(\Sigma)$ .

**Proposición 4.2.** *Sea  $F : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \Sigma$  una función (no necesariamente continua) tal que para todo  $t \in [0, 1]$ , se tenga  $F_t \in \text{Homeo}(\Sigma)$ . Defina la función  $\mathcal{L}$  por*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : [0, 1] &\longrightarrow \text{Homeo}(\Sigma) \\ t &\longmapsto F_t. \end{aligned}$$

*Entonces  $F$  es continua si y sólo si  $\mathcal{L}$  es continua.*

*Demuestra.* Supongamos que  $F$  es continua. Basta ver que  $\mathcal{L}^{-1}(K, U)$  es un abierto, para  $K$  compacto y  $U$  abierto de  $\Sigma$ . Notar que

$$\mathcal{L}^{-1}(K, U) = \{t \in [0, 1] : K \times \{t\} \subseteq F^{-1}(U)\}.$$

Tomando  $t_0 \in \mathcal{L}^{-1}(K, U)$  se tiene que  $K \times \{t_0\} \subseteq F^{-1}(U)$ . Por el Lema del Tubo [30, Lema 26.8], existe una vecindad  $W$  de  $t_0$  con  $K \times W \subseteq F^{-1}(U)$ . Por lo tanto  $t_0 \in W \subseteq \mathcal{L}^{-1}(K, U)$ .

Ahora, supongamos que  $\mathcal{L}$  es continua. Notemos que la función  $F$  se puede factorizar como la siguiente composición

$$\begin{aligned} F : \Sigma \times [0, 1] &\longrightarrow \Sigma \times \text{Homeo}(\Sigma) \longrightarrow \Sigma \\ (p, t) &\longmapsto (p, F_t) \longmapsto F_t(p) = F(p, t). \end{aligned}$$

La continuidad de la función evaluación (Proposición 3.12)

$$\begin{aligned} \text{Homeo}(\Sigma) \times \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ (f, p) &\longmapsto f(p) \end{aligned}$$

implica la continuidad de  $F$ . □

Del mismo modo que las proposiciones de la Sección 3.2, el resultado anterior puede generalizarse cuando  $\Sigma$  es sustituída por un espacio topológico  $X$  localmente compacto y Hausdorff, ya que son las hipótesis requeridas en la demostración de la Proposición 3.12.

Recordemos que  $\text{Homeo}_0(\Sigma)$  denota a la componente arcoconexa de  $\text{Homeo}(\Sigma)$  que contiene al homeomorfismo identidad. Por la Proposición 4.2 podemos caracterizar la relación de isotopía como sigue:

$$\begin{aligned} f \text{ y } g \text{ son isotópicos} &\Leftrightarrow f^{-1} \circ g \text{ es isotópico a } id_{\Sigma} \Leftrightarrow f^{-1} \circ g \in \text{Homeo}_0(\Sigma) \\ &\Leftrightarrow f \text{ y } g \text{ están en la misma clase lateral} \\ &\quad \text{de } \text{Homeo}(\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma). \end{aligned}$$

La relevancia de esta condición cobra sentido por el hecho de que  $\text{Homeo}_0(\Sigma)$  es subgrupo normal de  $\text{Homeo}(\Sigma)$  (Proposición 3.31), por lo que el cociente  $\text{Homeo}(\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma)$  tiene estructura de grupo. Del mismo modo, podemos restringir la definición de isotopía

**Definición 4.3.** (*Isotopía relativa a la frontera*) *Sea  $\Sigma$  una superficie con  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ . Una isotopía relativa a la frontera es una isotopía  $H : \Sigma \times I \rightarrow \Sigma$  tal que para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $H_t \in \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ .*

Denotamos por  $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$  a la componente arcoconexa de  $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$  que contiene a  $id_{\Sigma}$ . Nuevamente  $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$  es un subgrupo normal de  $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ . Notemos que la Proposición 4.2 también aplica para isotopías relativas a  $\partial\Sigma$  respecto a la arcoconexidad de  $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ . En ese sentido, también podemos caracterizar la relación de isotopía relativa a la frontera como

$$\begin{aligned} f \text{ y } g \text{ son isotópicos relativo a } \partial\Sigma &\Leftrightarrow f^{-1} \circ g \in \text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma) \\ &\Leftrightarrow f \text{ y } g \text{ están en la misma clase lateral} \\ &\quad \text{de } \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma). \end{aligned}$$

## 4.2. Definición del grupo modular

Recordemos que  $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$  es un subgrupo normal de  $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$  y también de  $\text{Homeo}^+(\Sigma; \partial\Sigma)$ . Dado que la relación de isotopía “ $f$  isotópico a  $g$ ” es equivalente a que  $f^{-1} \circ g \in$

$\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$ . Entonces, las clases de isotopía coinciden con el grupo cociente

$$\text{Homeo}^+(\Sigma; \partial\Sigma)/\text{isotopía} = \text{Homeo}^+(\Sigma; \partial\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma).$$

**Definición 4.4.** *Dada una superficie  $\Sigma$ , definimos el Grupo Modular de  $\Sigma$  como el grupo cociente*

$$\text{Mod}(\Sigma) := \text{Homeo}^+(\Sigma; \partial\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma).$$

*Si  $S$  es una superficie orientable, entonces podemos definir el Grupo Modular Extendido como*

$$\text{Mod}^\pm(S) := \text{Homeo}(S; \partial S)/\text{Homeo}_0(S; \partial S).$$

**Observación 4.5.** *Nótese que para una superficie orientable  $S$ , existe distinción entre  $\text{Mod}(S)$  y  $\text{Mod}^\pm(S)$  sólo si  $\partial S = \emptyset$ . Esto es porque si  $\partial S \neq \emptyset$ , entonces todo elemento  $f \in \text{Homeo}(S; \partial S)$  preserva la orientación.*

*Recordemos que, por convención, si  $N$  es una superficie no orientable entonces  $\text{Homeo}^+(N; \partial N) = \text{Homeo}(N; \partial N)$ . Por lo tanto, el Grupo Modular y el Grupo Modular Extendido de una superficie no orientable coinciden.*

Naturalmente tenemos las funciones proyección

$$\begin{array}{rccc} p : & \text{Homeo}^+(\Sigma; \partial\Sigma) & \longrightarrow & \text{Mod}(\Sigma) \\ & f & \longmapsto & [f]. \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} p^\pm : & \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma) & \longrightarrow & \text{Mod}^\pm(\Sigma) \\ & f & \longmapsto & [f], \end{array}$$

las cuales son homomorfismos de grupos sobrejetivos. Nótese que  $\text{Mod}(\Sigma) \leq \text{Mod}^\pm(\Sigma)$ , ya que los elementos de ambos son clases laterales  $g \cdot \text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$ , para algún  $g \in \text{Homeo}^+(\Sigma; \partial\Sigma)$  ó  $g \in \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ .

Podemos dotar a  $\text{Mod}(\Sigma)$  y a  $\text{Mod}^\pm(S)$  de la topología cociente proveniente de la función proyección respectiva. En ese caso, deducimos que  $\text{Mod}(\Sigma)$  es un subgrupo cerrado de  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ . Recordemos que la topología cociente es la más pequeña que hace que cada proyección  $p$  y  $p^\pm$  sea una función cociente<sup>10</sup>. Veremos que con esta nueva topología, el grupo modular es un grupo topológico.

**Proposición 4.6.** *Si  $G$  es un grupo topológico y  $H$  es un subgrupo de  $G$ , entonces la proyección  $p : G \rightarrow G/H$  es una función abierta.*

*Demostración.* Sólo hay que notar que si  $B \subseteq G$  es un abierto, entonces

$$p^{-1}(p(B)) = B \cdot H = \bigcup_{h \in H} B h$$

<sup>10</sup>Una función sobrejetiva entre espacios topológicos  $Q : X \rightarrow Z$  es función cociente si,  $U \subseteq Z$  es abierto si y sólo si  $Q^{-1}(U) \subseteq X$  es abierto. En particular, una función cociente es continua.

es unión de abiertos. Por ser  $p$  una función cociente, tenemos que  $p(B)$  es abierto.  $\square$

Procedemos ahora a demostrar que el Grupo Modular es un grupo topológico. Para ello nos apoyaremos en el siguiente resultado.

**Lema 4.7.** *Sean  $X, Y, Z$  espacios topológicos y suponga que  $\lambda : Z \rightarrow Y$  es una función,  $\varphi : X \rightarrow Y$  es una función continua tal que  $\varphi = \lambda \circ Q$ , donde  $Q : X \rightarrow Z$  es una función que cumple alguna de las siguientes posibilidades*

- $Q$  es una función cociente,
- $Q$  es abierta sobreyectiva,
- $Q$  es cerrada sobreyectiva.

Entonces  $\lambda$  es una función continua.

*Demostración.* Dado  $U \subseteq Y$  abierto, la continuidad de  $\varphi$  implica que  $\varphi^{-1}(U) = (\lambda \circ Q)^{-1}(U) = Q^{-1}(\lambda^{-1}(U))$  es abierto. Si  $Q$  es cociente o abierto, trivialmente  $\lambda^{-1}(U)$  es abierto. Esto prueba que  $\lambda$  es continuo en dichos casos.

El caso en que  $Q$  sea una función cerrada es análogo. Notar que la hipótesis de sobreyectividad se usó para argumentar que  $Q(Q^{-1}(A)) = A$ .  $\square$

**Proposición 4.8.** *Dado un grupo topológico  $G$  y un subgrupo normal  $H \leq G$ , el cociente  $G/H$  con la topología cociente es un grupo topológico.*

*Demostración.* Por el Lema 3.30 basta ver que la función  $\lambda([f], [g]) = [f]^{-1}[g] = [f^{-1}g]$  es continua en  $G/H$ . Si  $\varphi$  denota la composición de funciones siguiente

$$\begin{aligned} \varphi : \quad G \times G &\longrightarrow \quad G &\longrightarrow \quad G/H \\ (f, g) &\longmapsto \quad f^{-1} \cdot g &\longmapsto \quad [f^{-1} \cdot g], \end{aligned}$$

entonces  $\varphi$  es una composición de funciones continuas, porque  $G$  es grupo topológico.

Por otro lado, la función  $Q$  definida por

$$\begin{aligned} Q : \quad G \times G &\longrightarrow \quad G \times G \\ (f, g) &\longmapsto \quad ([f], [g]) \end{aligned}$$

es sobreyectiva y abierta, pues  $Q = p \times p$ . El resultado se sigue de que  $\varphi = \lambda \circ Q$  y del Lema 4.7.  $\square$

**Corolario 4.9.** *Para toda superficie  $\Sigma$ ,  $\text{Mod}(\Sigma)$  y  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  son grupos topológicos.*

Si  $G$  es un grupo topológico localmente compacto y  $H \leq G$  cualquier subgrupo, entonces  $G/H$  es localmente compacto. Por lo tanto hacemos la siguiente observación.

**Observación 4.10.** *En general, el grupo de homeomorfismos,  $\text{Homeo}(\Sigma)$ , no es localmente compacto, pues si  $\Sigma$  es de tipo infinito entonces  $\text{Mod}(\Sigma)$  no es localmente compacto ([1, Teorema 4.2]).*

**Proposición 4.11.** *Para toda superficie  $\Sigma$ , el Grupo Modular Extendido  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  es segundo numerable. En particular, el Grupo Modular,  $\text{Mod}(\Sigma)$ , es segundo numerable.*

*Demostración.* Recordemos que  $\text{Homeo}(\Sigma)$  es segundo numerable. Dado que la función cociente  $p : \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma) \rightarrow \text{Mod}^\pm(\Sigma)$  es abierto, dada una base numerable  $\{B_n\}$  de  $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ , la colección  $\{p(B_n)\}$  conforma una colección numerable de abiertos en  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ . De hecho  $\{p(B_n)\}$  es base para  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ . Si  $U$  es abierto de  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  y  $y \in U$ , entonces existe  $x \in \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$  tal que  $y = p(x) \in U$ . Pero  $x \in p^{-1}(U)$ , y este último es abierto. Dado que  $\{B_n\}$  es base, existe  $n \in \mathbb{N}$  con  $x \in B_n \subseteq p^{-1}(U)$ . Se sigue que  $y = p(x) \in p(B_n) \subseteq p(p^{-1}(U)) = U$ , porque  $p$  es sobreyectiva. Se sigue que  $\{p(B_n)\}$  es una base numerable de  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ .  $\square$

**Observación 4.12.** *Dado que  $\text{Mod}(\Sigma) \leq \text{Mod}^\pm(\Sigma)$  son ambos segundo numerables, tenemos en consecuencia que ambos son separables (Observación 3.16).*

### 4.3. Conexidad y conexidad por trayectorias en $\text{Homeo}(\Sigma, \partial\Sigma)$

En nuestra discusión que resta de este escrito tengamos en cuenta la siguiente

**Definición 4.13.** *Una superficie es de tipo finito si su grupo fundamental es finitamente generado. En caso contrario, se dice que la superficie es de tipo infinito.*

El siguiente teorema tiene consecuencias muy importantes para lo que resta del escrito. Una demostración general se puede encontrar en [38, Teorema 6.11].

**Teorema 4.14.** *Para toda superficie  $\Sigma$ , la componente  $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$  es un subgrupo cerrado de  $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ .*

Para superficies de tipo finito el resultado es más fuerte ([38, Teorema 6.11]), pues en este contexto resulta que  $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$  es abierto (y por lo tanto, es cerrado). En consecuencia,  $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$  coincide con la componente conexa que la contiene. Nótese que esto implica que si  $\Sigma$  es una superficie de tipo finito, entonces  $\text{Mod}(\Sigma)$  es discreto, esto será relevante en la Sección 4.5 en donde damos una prueba alternativa de que  $\text{Mod}(\Sigma)$  es grupo polaco.

Se puede dar una demostración elemental del Teorema 4.14 usando el llamado *Método de Alexander* [9, Proposición 2.8] el cual merece unas palabras, pues puede resultar muy ilustrativo para los interesados en estudiar grupos modulares de superficies (revisar también [37]). Este método describe un criterio para decidir si un homeomorfismo es isotópico a  $id_{\Sigma}$ . Una versión simplificada, aunque débil, se puede interpretar de la siguiente manera: si  $f \in \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$  fija la clase de isotopía de toda curva cerrada simple de  $\Sigma$ , entonces  $f$  es isotópico a la identidad.

El método de Alexander tiene validez para todas las superficies, salvo una lista pequeña de ellas. Para superficies de tipo infinito, está garantizada su validez (ver [13, 15]). Mientras tanto, si  $\Sigma$  es una superficie de tipo finito, la superficie debe satisfacer  $3g - 3 + n + b \geq 4$  si  $\Sigma$  es orientable, ó  $g + n + b \geq 5$  si  $\Sigma$  es no orientable, donde  $g$  denota el género,  $n$  el número de ponchaduras y  $b$  el número de componentes frontera de la superficie (ver [13, Teorema 2.1]).

Una consecuencia directa de la siguiente proposición y de que  $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$  es cerrado es que  $\text{Mod}^{\pm}(\Sigma)$  es Hausdorff. Recordar que por el Teorema 3.20, una consecuencia adicional será que el Grupo Modular tiene una métrica invariante izquierda compatible con la topología.

**Proposición 4.15.** *Sea  $G$  un grupo topológico y suponga que  $H$  es un subgrupo normal  $G$ . Entonces  $H$  es cerrado en  $G$  si y sólo si  $G/H$  es Hausdorff.*

*Demostración.*  $\implies$  Supongamos que  $H$  es cerrado. Para ver que  $G/H$  es Hausdorff basta probar que la diagonal

$$\Delta_{G/H} = \{([g], [h]) \in G/H \times G/H : [g] = [h]\}$$

es cerrado en  $G/H$ . Si  $p : G \rightarrow G/H$  denota la proyección a las clases laterales, entonces

$$p^{-1} \{[e]\} = H$$

es cerrado. Como  $p$  es función cociente, se tiene que  $\{[e]\}$  es cerrado. Luego, dado que  $G/H$  es un grupo topológico, la función

$$\begin{aligned} \lambda : \quad G/H \times G/H &\longrightarrow G/H \\ ([g], [h]) &\longmapsto [g^{-1}h] \end{aligned}$$

es continua. Así,  $\lambda^{-1} \{[e]\} = \Delta_{G/H}$  es cerrado.

$\Leftarrow$  Supongamos ahora que  $G/H$  es Hausdorff. En todo espacio que es Hausdorff, todo subespacio unipuntual es cerrado. De esta manera,  $\{[e]\}$  es cerrado en  $G/H$ . Como  $p$  es continua, inmediatamente obtenemos que

$$p^{-1} \{[e]\} = H$$

es cerrado en  $G$ . □

#### 4.4. El grupo modular es un grupo polaco

Hasta este momento hemos visto que  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  hereda de  $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$  las propiedades de ser grupo topológico, Hausdorff, segundo numerable y separable. En gran medida estas propiedades fueron heredadas directamente porque  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  es un cociente de  $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$  por un subgrupo. Adicionalmente  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  también hereda de  $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$  la propiedad de ser grupo polaco. Aunque contrario a las propiedades mencionadas, la demostración de ser polaco recae sobre el Teorema de Sierpinski ([19, Teorema 8.19]), que es un resultado importante de la Teoría Descriptiva de Conjuntos. Nos enfocaremos en explicar sólo un breve panorama para quien busque el camino a la demostración.

En la sección 4.5 explicamos una manera alternativa a esta para probar que el Grupo Modular Extendido (de una superficie orientable con frontera vacía) es un grupo polaco. Lo esencial de este enfoque reside en ver a  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  como el grupo de automorfismos del *grafo de curvas*, un objeto que ha sido piedra angular en el estudio de grupos modulares.

**Teorema 4.16** (Sierpinski). *Sean  $X$  un espacio polaco y  $Y$  un espacio separable y metrizable. Suponga que existe una función  $f : X \rightarrow Y$  continua, abierta y sobreyectiva. Entonces  $Y$  es un espacio polaco.*

Recordemos que la proyección  $p : \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma) \rightarrow \text{Mod}^\pm(\Sigma)$  es continua, abierta y sobreyectiva, donde  $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$  es un grupo polaco. Por otro lado, sabemos que  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  es separable, por lo que basta demostrar que es metrizable.

**Proposición 4.17.** *Para toda superficie  $\Sigma$ , el grupo modular extendido,  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ , es metrizable.*

*Demostración.* Recordemos que  $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$  denota a la componente arcoconexa de  $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$  que contiene a  $\text{id}_\Sigma$ . Por el Teorema 4.14, la componente conexa de la identidad de  $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$  es subgrupo cerrado de  $\text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$ . Por la Proposición 4.15, el cociente  $\text{Mod}^\pm(\Sigma) = \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)/\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$  es Hausdorff. Por otro lado,  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  es segundo numerable (Proposición 4.11). Por el Teorema 3.20, existe una métrica invariante izquierda compatible con la topología de  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ .  $\square$

Por el Teorema de Sierpinski (Teorema 4.16) y la Proposición 4.17 obtenemos que el Grupo Modular Extendido de una superficie es un grupo polaco. Al ser  $\text{Mod}(\Sigma)$  un subgrupo cerrado de  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ , la propiedad de grupo polaco es heredada también a  $\text{Mod}(\Sigma)$ . Esto justifica el resultado principal de esta sección.

**Teorema 4.18.** *Para toda superficie  $\Sigma$ , el Grupo Modular Extendido,  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ , es un grupo polaco. Así mismo, el Grupo Modular,  $\text{Mod}(\Sigma)$ , es un grupo polaco.*

#### 4.5. Prueba alternativa usando el grafo de curvas

Una de las herramientas más usadas para estudiar al Grupo Modular de una superficie ha sido a través del paradigma del *grafo de curvas* (Definición 4.22). En esta sección final usaremos una fuerte relación del Grupo Modular con el grafo de curvas (se puede ver al grupo modular extendido de casi toda superficie como el grupo de automorfismos del grafo de curvas, Teorema 4.24), para deducir de esto que el Grupo Modular es polaco. En nuestra argumentación sólo nos ocuparemos de superficies orientables de tipo infinito, pues para superficies de tipo finito, el argumento es más sencillo sin necesidad de utilizar el grafo de curvas (vea los comentarios al final de esta sección). En lo que resta de este apartado supondremos que  $\Sigma$  es una superficie orientable de tipo infinito y con frontera vacía. El grafo de curvas será tal que sus vértices son representados por clases de isotopía de curvas cerradas simples en la superficie. Recapitulamos estos conceptos brevemente.

**Definición 4.19** (Curvas cerradas simples). *Una curva cerrada simple en una superficie  $\Sigma$  es un encaje  $\gamma : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \Sigma$ .*

Así como podemos decir que dos homeomorfismos son isotópicos cuando podemos deformar uno en el otro realizando una trayectoria continua de homeomorfismos, asimismo podemos deformar una curva cerrada simple en otra por medio de una trayectoria continua de curvas cerradas simples, conocida como isotopía de curvas cerradas simples. La principal diferencia con la isotopía de homeomorfismos, es que esta toma en cuenta una transición de funciones, mientras que una isotopía de curvas cerradas simples será una isotopía entre conjuntos: precisamente sobre sus imágenes. Lo que se gana al identificar una curva con su imagen es que se ignora por completo su orientación.

**Definición 4.20** (Isotopía de curvas cerradas simples). *Dos curvas cerradas simples  $\alpha, \beta : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Sigma$  son isotópicas si existe una función continua  $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \Sigma$  tal que  $H_0(\mathbb{S}^1) = \alpha(\mathbb{S}^1)$ ,  $H_1(\mathbb{S}^1) = \beta(\mathbb{S}^1)$  y para cada tiempo  $t \in [0, 1]$ , la curva  $H_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Sigma$  es una curva cerrada simple.*

Para definir el grafo de curvas, tomaremos en cuenta sólo un tipo de curvas cerradas simples que conocemos como curvas *esenciales*, y pueden ser definidas incluso si  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ .

**Definición 4.21** (Curva esencial). *Una curva cerrada simple  $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \Sigma$  se dice esencial si no es homotópicamente trivial ni homotópica a la frontera de un disco menos un punto.*

La relación de isotopía de curvas también es una relación de equivalencia. Dado que ignora el hecho de que  $\text{im}(\alpha) = \text{im}(\bar{\alpha})$ , donde  $\bar{\alpha}$  es el camino recorrido en el sentido inverso, la isotopía de curvas conforma clases de equivalencia de curvas esenciales isotópicas sin orientación. A dicho conjunto de clases de curvas lo denotamos por  $\mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ , y conformará el conjunto de vértices del grafo de curvas en  $\Sigma$ .

**Definición 4.22** (Grafo de curvas). *El grafo de curvas de la superficie  $\Sigma$ , denotado por  $\mathcal{C}(\Sigma)$ , es el grafo cuyo conjunto de vértices es  $\mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ , el conjunto de todas las clases de isotopía de curvas cerradas simples esenciales y no orientadas. Dos vértices del grafo de curvas  $a, b \in \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$  están conectados por una arista si existen representantes  $\alpha \in a, \beta \in b$  con  $\alpha \cap \beta = \emptyset$ .*

El grafo de curvas de  $\Sigma$  es conexo, más aún,  $\mathcal{C}(\Sigma)$  tiene diámetro 2. Esto se puede ver de la siguiente manera: cómo  $\Sigma$  es una superficie de tipo infinito, si  $\alpha$  y  $\beta$  son dos curvas esenciales en  $\Sigma$  arbitrarias entonces existe una tercera curva  $\gamma$  que no intersecta ni a  $\alpha$  ni a  $\beta$ , todo esto incluso hasta isotopía.

En el contexto de superficies de tipo finito, el grafo de curvas tiene propiedades geométricas más ricas, es Gromov hiperbólico y tiene diámetro infinito, las cuales lo hacen idóneo para estudiar la geometría a larga escala del grupo modular y del espacio de Teichmüller asociado a la superficie. En esta dirección, recomendamos las lecturas [26, 34].

**Topología de permutación en el grupo de automorfismos de  $\mathcal{C}(\Sigma)$ .** Cualquier grafo tiene asociado su grupo de automorfismos, en nuestro caso, recordamos que el *grupo de automorfismos* del grafo de curvas  $\mathcal{C}(\Sigma)$ , denotado por  $\text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$ , consiste en todas las biyecciones  $\varphi : \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$  que preservan la incidencia, es decir, dos vértices  $a$  y  $b$  están conectadas por una arista si, y sólo si  $\varphi(a)$  y  $\varphi(b)$  están conectadas.

Ahora imponemos una topología sobre el grafo de curvas. Dado un subconjunto de vértices  $A \subseteq \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ , el *estabilizador puntual* de  $A$  se define como

$$U(A) := \{\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma)) : \varphi([\alpha]) = [\alpha], \forall [\alpha] \in A\}.$$

La colección de todas las traslaciones  $\{\varphi \cdot U(A)\}$ , con  $A \subseteq \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$  finito y  $\varphi \in \text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$  constituye una base para una topología de  $\text{Aut}(\mathcal{C}^{(0)}(\Sigma))$ , la cual se conoce como la *topología permutación*.

Más adelante demostraremos que el Grupo Modular Extendido,  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$ , es isomorfo, como grupo topológico, a  $\text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$  (Teorema 4.24). De este hecho y junto al resultado siguiente se podrá deducir fácilmente que el Grupo Modular Extendido de  $\Sigma$  es un grupo Polaco.

**Teorema 4.23.** *Para toda superficie  $\Sigma$ , el grupo de automorfismos del grafo de curvas de  $\Sigma$ ,  $\text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$ , es un grupo polaco.*

Esbozamos brevemente la demostración del Teorema 4.23. El *grupo simétrico infinito*, denotado por  $\text{Sym}(\mathbb{N})$ , está definido como el grupo de todas las biyecciones  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  con la operación composición de funciones. Por otro lado, el espacio  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  de todas las funciones  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  con la topología producto, donde a los naturales  $\mathbb{N}$  se les asigna la topología discreta, es un espacio polaco. Claramente, el grupo simétrico infinito es un subespacio de  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . Resulta que con esta topología el grupo simétrico

infinito  $\text{Sym}(\mathbb{N})$  es un grupo polaco; esto es consecuencia de ver a  $\text{Sym}(\mathbb{N})$  como subconjunto<sup>11</sup>  $G_\delta$  de  $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ . Para consultar los detalles de todos estos hechos recomendamos al lector consultar la tesis de maestría de L. Elliott [8]. Ahora, el conjunto de vértices del grafo de curvas es numerable, de esta manera podemos ver al grupo  $\text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$  como subgrupo del grupo simétrico infinito  $\text{Sym}(\mathbb{N})$ . Un teorema de P. J. Cameron ([4, Theorem 5.8]) permite concluir que  $\text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$  es cerrado en el grupo simétrico infinito y, por lo tanto, es un grupo polaco.

**El grupo modular extendido como el grupo de automorfismos del grafo de curvas.** El grupo modular extendido  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  actúa de manera natural sobre el grafo de curvas  $\mathcal{C}(\Sigma)$ : en el conjunto de vértices está acción se ve de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \text{Mod}^\pm(\Sigma) \times \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma) &\longrightarrow \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma) \\ ([f], [\alpha]) &\longmapsto [f \circ \alpha]. \end{aligned}$$

Esta acción está bien definida, pues todo homeomorfismo de  $\Sigma$  transforma curvas esenciales en curvas esenciales. Más todavía, la acción es por automorfismos, pues si denotamos por  $\varphi_{[f]} : \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{C}^{(0)}(\Sigma)$ ,  $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ , a la función inducida por el homeomorfismo  $f \in \text{Homeo}(\Sigma; \partial\Sigma)$  entonces  $\varphi_{[f]}$  es un automorfismo con inversa  $\varphi_{[f]}^{-1} = \varphi_{[f^{-1}]}$ . En resumen tenemos un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \pi : \text{Mod}^\pm(\Sigma) &\longrightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma)) \\ [f] &\longmapsto \varphi_{[f]}. \end{aligned}$$

En la teoría de grupos modulares, una de las conexiones más importantes y bellas, nos dice que el homomorfismo de grupos  $\pi$  es un isomorfismo de grupos topológicos. La importancia de esta conexión queda manifiesta en la diversidad de resultados que de ésta se derivan, véase [17].

**Teorema 4.24.** *Sea  $\Sigma$  una superficie orientable de tipo infinito con frontera vacía. Entonces  $\pi : \text{Mod}^\pm(\Sigma) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{C}(\Sigma))$  es un isomorfismo de grupos topológicos.*

*Demostración.* El Método de Alexander para superficies de tipo infinito [15] verifica que el morfismo  $\pi$  es inyectivo. La prueba de la sobreyectividad de  $\pi$  que esbozamos a continuación es una adaptación del argumento en el artículo [14]; la sobreyectividad de  $\pi$  fue establecida de forma independiente en [3]. Suponga que  $\varphi : \mathcal{C}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{C}(\Sigma)$  es un isomorfismo simplicial del grafo de curvas de  $\Sigma$ . Sea  $S_1 \subset S_2 \subset \dots$  una *saturación principal*<sup>12</sup> de  $\Sigma$  por subsuperficies de tipo finito y denote por  $B$  al conjunto de todas las curvas frontera de las superficies  $S_i$ . El primer paso clave en la

<sup>11</sup>Un subconjunto de un espacio topológico  $X$  es  $G_\delta$  si es igual a la intersección numerable de abiertos en  $X$ .

<sup>12</sup>Dada una superficie de tipo infinito  $\Sigma$ , se dice que una sucesión  $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de subsuperficies de  $\Sigma$  de tipo finito es una *saturación principal* de  $\Sigma$  si  $\Sigma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$  y para cada  $i \in \mathbb{N}$  se satisfacen las siguientes condiciones: (i) el interior de  $S_i$  está contenido en el interior de  $S_{i+1}$ , (ii)  $\partial S_i \setminus \partial\Sigma$  es una unión disjunta finita de curvas esenciales separadoras en  $\Sigma$  y, (iii) el interior de cada componente conexa de  $S_{i+1} \setminus \overline{S_i}$  tiene suficiente complejidad topológica, para detalles véase [14, Definición 2.8].

prueba es demostrar que existe un homeomorfismo  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  tal que  $\varphi$  coincide con  $\pi([f])$  en  $B$ , es decir,  $\varphi([\beta]) = \varphi_{[f]}([\beta])$  para todo  $\beta \in B$ . La herramienta principal para establecer esto es el uso del *grafo de adyacencia* ([14, Definición 2.7]) asociada a una descomposición en pantalones de  $S$ , véase también [14, Proposición 3.1]. El siguiente paso es demostrar que la restricción de  $\varphi$  a  $\mathcal{C}(S_i)$  define una función simplicial inyectiva  $\varphi_i : \mathcal{C}(S_i) \rightarrow \mathcal{C}(f(S_i))$ . Aplicando el trabajo de K. Shackleton sobre la rigidez combinatoria del grafo de curvas de superficies de tipo finito se obtienen homeomorfismos  $g_i : S_i \rightarrow f(S_i)$  que coinciden con  $\varphi_i$ . La prueba finaliza mostrando que esta colección de homeomorfismos induce un homeomorfismo global  $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$  tal que  $\pi([h])$  coincide con  $\varphi$  en todo  $\mathcal{C}(\Sigma)$ .

Hasta este punto, el morfismo de grupos  $\pi$  es un isomorfismo de grupos. Podemos observar que  $\pi$  es continua; en efecto, si  $A := \{[\alpha_1], \dots, [\alpha_n]\}$  es un conjunto finito de vértices del grafo de curvas, entonces  $\pi^{-1}(U(A))$  consiste de todas las clases de isotopía de homeomorfismos  $[f] \in \text{Mod}^\pm(\Sigma)$  tales que  $f \circ \alpha_i$  es isotópica a  $\alpha_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Consideremos, para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ , una vecindad regular de  $\alpha_i$ ,  $N(\alpha_i)$  (la cual es homeomorfa a un anillo encajada en  $\Sigma$ ), y definamos el abierto  $[\alpha_i, N(\alpha_i)] := \{[g] \in \text{Mod}^\pm(\Sigma) \mid g(\alpha_i) \subseteq N(\alpha_i)\}$ . La continuidad de  $\pi$  se deduce de observar que  $\bigcap_{i=1}^n [\alpha_i, N(\alpha_i)]$  forma una vecindad de  $[Id_\Sigma]$  que coincide con  $\pi^{-1}(U(A))$ .

Para ver la continuidad de  $\pi^{-1}$ , tomemos ahora  $[K, U] = \{[g] \in \text{Mod}^\pm(\Sigma) \mid g(K) \subseteq U\}$  vecindad de  $[Id_\Sigma]$  con  $K \subseteq \Sigma$  compacto y  $U \subseteq \Sigma$  abierto. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que  $K \subseteq U$ . El Método de Alexander ([9, Proposición 2.8]) para superficies de tipo finito permite asegurar la existencia de una colección finita  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  de curvas esenciales contenidas en  $K$  tales que  $[Id_\Sigma] \in \bigcap_{i=1}^n [\alpha_i, N(\alpha_i)] \subseteq [K, U]$  donde  $N(\alpha_i)$  es una vecindad regular de  $\alpha_i$  completamente contenida en  $K$ . Haciendo  $A$  igual al conjunto de clases de isotopía de las curvas  $\alpha_i$  podemos ver que  $U(A) \subseteq (\pi^{-1})^{-1}([K, U])$ . De esto se puede concluir que la inversa de  $\pi$ ,  $\pi^{-1}$ , es continua.  $\square$

**Superficies de tipo finito.** Convencernos de que el Grupo Modular Extendido es un grupo polaco es más directo en el caso de superficies de tipo finito. Si  $\Sigma$  es una superficie orientable de tipo finito con frontera vacía, podemos usar nuevamente el Método de Alexander para obtener que  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  es discreto<sup>13</sup>. La razón es que la componente arcoconexa de la identidad,  $\text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$ , es abierto en el grupo de homeomorfismos. En efecto, por la Proposición 2.8 en [9] existe una colección finita  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  de curvas esenciales en  $\Sigma$  tales que  $Id_\Sigma \in \bigcap_{i=1}^n (\alpha_i, N(\alpha_i)) \subseteq \text{Homeo}_0(\Sigma; \partial\Sigma)$  donde  $N(\alpha_i)$  es una vecindad regular de  $\alpha_i$ . Ahora, el hecho de que  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  sea discreto implica que éste sea numerable pues hemos visto que, en general,  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  es segundo numerable. Esto a su vez implica que  $\text{Mod}^\pm(\Sigma)$  es localmente compacto. Por [7, Observación 2.B.1] se concluye que el grupo Modular Extendido es un grupo polaco.

<sup>13</sup>El Método de Alexander es aplicable para todas las superficies de tipo finito, excepto una cantidad finita de ellas. Para ver que el grupo modular extendido es discreto en los casos restantes, recomendamos al lector consultar [9].

Cabe destacar que la conexión del grupo modular extendido con el grafo de curvas, es decir, el Teorema 4.24, es cierto para casi todas las superficies de tipo finito. Al ser un resultado clásico en la teoría de grupos modulares, este teorema lleva por nombre “Teorema de Ivanov”([16, 21, 23]).

**Superficies no orientables.** El paradigma de ver al grupo modular extendido como el grupo de automorfismos del grafo de curvas también es válido para superficies no orientables; recomendamos consultar [13] y las referencias contenidas allí. Una vez establecido este resultado, la demostración de que el grupo modular extendido es grupo polaco es exactamente igual a la que hemos descrito aquí para superficies orientables.

## Agradecimientos

Ambos autores agradecemos a los organizadores de la *Octava Escuela Oaxaqueña de Matemáticas 2023*, evento en el cual nació este proyecto. Así mismo, agradecemos la hospitalidad del Instituto de Matemáticas UNAM Unidad Oaxaca. El primer autor agradece el apoyo de “*Beca posdoctoral ANID Fondecyt 3240229*” para la realización de este trabajo. El segundo autor agradece el apoyo del CONAHCYT a través de las Becas Nacionales de Posgrado durante la realización de este escrito. Agradecemos a Luis Hernández Lamoneda, Rita Jiménez Rolland y a Carlos A. Pérez Estrada por compartir valiosos comentarios a versiones preliminares de este trabajo. Finalmente agradecemos a los revisores cuyos comentarios ayudaron a mejorar la exposición y el contenido.

## Referencias

- [1] J. Aramayona y N. G. Vlamis, “Big mapping class groups: an overview,” in *In the tradition of Thurston—geometry and topology*. Springer, Cham, 2020, pp. 459–496, doi: 10.1007/978-3-030-55928-1\_12.
- [2] R. F. Arens, “A topology for spaces of transformations,” *Ann. of Math. (2)*, vol. 47, pp. 480–495, 1946, doi: 10.2307/1969087.
- [3] J. Bavard, S. Dowdall, y K. Rafi, “Isomorphisms between big mapping class groups,” *Int. Math. Res. Not. IMRN*, no. 10, pp. 3084–3099, 2020, doi: 10.1093/imrn/rny093.
- [4] P. J. Cameron, *Permutation groups*, ser. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 1999, vol. 45, doi: 10.1017/CBO9780511623677.
- [5] M. Clay y D. Margalit, Eds., *Office hours with a geometric group theorist*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2017.
- [6] N. Colin, R. Jiménez-Rolland, e I. Morales, *Superficies topológicas y sus simetrías: una introducción a grupos modulares de superficies de tipo finito e infinito*. En preparación.
- [7] Y. Cornulier y P. de la Harpe, *Metric geometry of locally compact groups*, ser. EMS Tracts in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2016, vol. 25.
- [8] L. Elliott, “Infinite symmetric groups,” M.Sc. thesis, The University of St Andrews, Scotland, 2017, disponible en [https://le27.github.io/Luke-Elliott/files/Luke\\_Masters\\_Dissertation.pdf](https://le27.github.io/Luke-Elliott/files/Luke_Masters_Dissertation.pdf).
- [9] B. Farb y D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, ser. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012, vol. 49.
- [10] D. B. Fuks y V. A. Rokhlin, *Beginner’s course in topology*, ser. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1984, doi: 10.1007/978-3-642-61755-3.
- [11] J. Gallier y D. Xu, *A guide to the classification theorem for compact surfaces*, ser. Geometry and Computing. Springer, Heidelberg, 2013, vol. 9, doi: 10.1007/978-3-642-34364-3.
- [12] A. Hatcher, *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [13] J. Hernández Hernández y C. E. Hidber, “First integral cohomology group of the pure mapping class group of a non-orientable surface of infinite type,” *New York J. Math.*, vol. 30, pp. 1705–1749, 2024.
- [14] J. Hernández Hernández, I. Morales, y F. Valdez, “Isomorphisms between curve graphs of infinite-type surfaces are geometric,” *Rocky Mountain J. Math.*, vol. 48, no. 6, pp. 1887–1904, 2018, doi: 10.1216/rmj-2018-48-6-1887.

- [15] J. Hernández Hernández, I. Morales, y F. Valdez, “The Alexander method for infinite-type surfaces,” *Michigan Math. J.*, vol. 68, no. 4, pp. 743–753, 2019, doi: 10.1307/mmj/1561773633.
- [16] N. V. Ivanov, “Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces,” in *Progress in knot theory and related topics*, ser. *Travaux en Cours.* Hermann, Paris, 1997, vol. 56, pp. 113–120.
- [17] N. V. Ivanov, “Mapping class groups,” in *Handbook of geometric topology.* North-Holland, Amsterdam, 2002, pp. 523–633.
- [18] R. Jiménez Rolland y J. C. Santiago, “Presentando al toro y sus simetrías,” *Miscelánea Matemática*, vol. 75, pp. 35–54, 2022.
- [19] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, ser. *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995, vol. 156, doi: 10.1007/978-1-4612-4190-4.
- [20] S. Kobayashi y K. Nomizu, *Foundations of differential geometry. Vol. I*, ser. *Wiley Classics Library.* John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.
- [21] M. Korkmaz, “Automorphisms of complexes of curves on punctured spheres and on punctured tori,” *Topology Appl.*, vol. 95, no. 2, pp. 85–111, 1999, doi: 10.1016/S0166-8641(97)00278-2.
- [22] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, ser. *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2003, vol. 218, doi: 10.1007/978-0-387-21752-9.
- [23] F. Luo, “Automorphisms of the complex of curves,” *Topology*, vol. 39, no. 2, pp. 283–298, 2000, doi: 10.1016/S0040-9383(99)00008-7.
- [24] K. Mann, “The structure of homeomorphism and diffeomorphism groups,” *Notices Amer. Math. Soc.*, vol. 68, no. 4, pp. 482–492, 2021, doi: 10.1090/noti.
- [25] K. Mann, “Automatic continuity for homeomorphism groups and big mapping class groups,” *Michigan Math. J.*, vol. 74, no. 1, pp. 215–224, 2024, doi: 10.1307/mmj/20216095.
- [26] Y. N. Minsky, “A geometric approach to the complex of curves on a surface,” in *Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995).* World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996, pp. 149–158.
- [27] G. H. Moore, “The evolution of the concept of homeomorphism,” *Historia Math.*, vol. 34, no. 3, pp. 333–343, 2007, doi: 10.1016/j.hm.2006.07.006.
- [28] I. Morales y F. Valdez, “Loxodromic elements in big mapping class groups via the Hooper-Thurston-Veech construction,” *Algebr. Geom. Topol.*, vol. 22, no. 8, pp. 3809–3854, 2022, doi: 10.2140/agt.2022.22.3809.
- [29] S. Morita, *Geometry of characteristic classes*, ser. *Translations of Mathematical Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, vol. 199, doi: 10.1090/mmono/199.

- [30] J. R. Munkres, *Topology: a first course*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1975.
- [31] I. Richards, “On the classification of noncompact surfaces,” *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 106, pp. 259–269, 1963, doi: 10.2307/1993768.
- [32] C. Rosendal, “Automatic continuity in homeomorphism groups of compact 2-manifolds,” *Israel J. Math.*, vol. 166, pp. 349–367, 2008, doi: 10.1007/s11856-008-1034-x.
- [33] C. Rosendal y S. a. Solecki, “Automatic continuity of homomorphisms and fixed points on metric compacta,” *Israel J. Math.*, vol. 162, pp. 349–371, 2007, doi: 10.1007/s11856-007-0102-y.
- [34] S. Schleimer, “Notes on the complex of curves,” 2006, notas no publicadas. Notas disponibles en <https://sschleimer.warwick.ac.uk/Maths/notes2.pdf>.
- [35] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, ser. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.
- [36] D. Tamaki, *Fiber bundles and homotopy*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2021.
- [37] N. G. Vlamis, “Notes on the topology of mapping class groups,” 2019, preprint no publicado. Notas disponibles en <https://math.nickvlamis.com/research>.
- [38] N. G. Vlamis, “Homeomorphism groups of self-similar 2-manifolds,” in *In the tradition of Thurston III. Geometry and dynamics*. Springer, Cham, 2024, pp. 105–167, doi: 10.1007/978-3-031-43502-7\_5.



C O M P E N D I O

## Esquemas de subdivisión no lineales: 25 años de historia a través de 75 contribuciones

SERGIO AMAT<sup>1,✉</sup> 

SONIA BUSQUIER<sup>1</sup> 

DAVID LEVIN<sup>2</sup> 

JUAN C. TRILLO<sup>1</sup> 

<sup>1</sup> Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. Universidad Politécnica de Cartagena, España.

*sergio.amat@upct.es*

*sonia.busquier@upct.es*

*jc.trillo@upct.es*

<sup>2</sup> School of Mathematical Sciences.  
Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Israel.  
*levindd@gmail.com*

### RESUMEN

Los esquemas de subdivisión son una herramienta muy utilizada en gráficos por computadora y modelado geométrico, permitiendo la generación de curvas y superficies suaves a partir de datos discretos. Aunque los esquemas de subdivisión lineales son muy utilizados, los esquemas no lineales ofrecen mayor flexibilidad, permitiendo el manejo de datos con irregularidades y facilitando la preservación de formas. Además, estos esquemas son útiles para abordar subdivisión en variedades, corregir las oscilaciones de Gibbs alrededor de singularidades y en general intentar abordar problemas donde los enfoques lineales no aportan resultados satisfactorios. Este artículo revisa 25 años de contribuciones relacionadas con la construcción, el análisis y el uso, en diversas aplicaciones, de esquemas de subdivisión no lineales.

**Palabras clave:** Subdivisión no lineal, aproximación geométrica, representación de superficies, esquemas de multiresolución, aplicaciones en gráficos por ordenador, procesamiento geométrico

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 65D05, 65D17, 68U05, 68U07.

Publicado: 21 de octubre de 2025

Aceptado: 11 de septiembre de 2025

Recibido: 25 de noviembre de 2024



©2025 S. Amat *et al.* Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

S U R V E Y

## Non-linear subdivision schemes: 25 years of history through 75 contributions

SERGIO AMAT<sup>1,✉</sup> 

SONIA BUSQUIER<sup>1</sup> 

DAVID LEVIN<sup>2</sup> 

JUAN C. TRILLO<sup>1</sup> 

<sup>1</sup> Departamento de Matemática Aplicada y Estadística. Universidad Politécnica de Cartagena, Spain.

*sergioamat@upct.es*

*sonia.busquier@upct.es*

*jc.trillo@upct.es*

<sup>2</sup> School of Mathematical Sciences.  
Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Israel.  
*levindd@gmail.com*

### ABSTRACT

Subdivision schemes are a very useful tool in computer graphics and geometric modelling, allowing for the generation of curves and smooth surfaces starting from discrete data. Even though linear subdivision schemes are used profusely, non-linear schemes offer more flexibility, allowing for the handling of data with irregularities and making the shape preservation easier. In addition, these schemes are useful to deal with subdivision on manifolds, to correct Gibbs oscillations around singularities, and, in general, to try to tackle problems where linear approaches do not provide satisfactory results. This article reviews 25 years of contributions related to the construction, analysis, and use, in different applications, of non-linear subdivision schemes.

**Keywords and Phrases:** Non-linear subdivision, geometric approximation, surface representation, multiresolution schemes, computer graphics applications, geometric processing

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 65D05, 65D17, 68U05, 68U07.

Published: 21 October, 2025

Accepted: 11 September, 2025

Received: 25 November, 2024



©2025 Sergio Amat *et al.* This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

## 1. Introducción

Los esquemas de subdivisión son procesos iterativos que permiten construir curvas o superficies suaves a partir de un conjunto discreto de puntos. En aplicaciones gráficas por computadora y modelado geométrico, estos esquemas se han convertido en una herramienta esencial. Los esquemas de subdivisión tradicionales son lineales, lo que implica que los nuevos puntos generados son combinaciones lineales de puntos vecinos, facilitando el análisis matemático mediante teorías clásicas como las matriciales o la teoría de Fourier. Sin embargo, existen muchas aplicaciones que exigen mayor flexibilidad para considerar datos más complejos e irregulares, lo que ha motivado el desarrollo de esquemas de subdivisión no lineales. A diferencia de los esquemas lineales, los esquemas no lineales pueden: adaptarse a la geometría local de los datos, ajustarse mejor a situaciones donde los datos contienen ruido, cambios pronunciados o incluso irregularidades, permiten trabajar directamente en variedades, preservan propiedades geométricas intrínsecas y pueden adaptarse a la presencia de discontinuidades no generando oscilaciones tipo Gibbs, [31], 2002.

Estos esquemas se enmarcan dentro de las áreas de análisis numérico, teoría de la aproximación y modelado geométrico computacional, con conexiones estrechas a las ondículas y a la representación multirresolución.

Más concretamente, los esquemas de subdivisión son procesos iterativos diseñados para generar curvas o superficies suaves a partir de un conjunto discreto de puntos de control  $p^{(0)}$ . En cada paso, una regla de refinamiento  $S$  reemplaza los puntos  $\{p^{(k)}\}$  en el nivel  $k$  por una secuencia más densa  $\{p^{(k+1)}\}$  en el nivel  $k + 1$ , es decir:

$$p^{(k+1)} = S(p^{(k)}).$$

En los esquemas lineales, las nuevas posiciones se obtienen mediante un operador lineal  $S$ . Sin embargo, estos métodos presentan limitaciones cuando los datos contienen irregularidades, ruido o discontinuidades, ya que pueden introducir oscilaciones no deseadas o distorsionar formas geométricas básicas (círculos, esferas).

Por el contrario, los esquemas de subdivisión no lineales introducen reglas de refinamiento adaptativas que dependen de la geometría local de los datos. De este modo, permiten:

- Trabajar directamente sobre variedades o espacios no euclidianos.
- Preservar formas geométricas intrínsecas (círculos, esferas, cilindros).
- Reducir efectos no deseados como las oscilaciones de Gibbs en presencia de discontinuidades.
- Mejorar la flexibilidad en aplicaciones donde los enfoques lineales no son satisfactorios.

Estos esquemas tienen relevancia práctica en áreas como el modelado geométrico, la animación por computadora, el diseño asistido por ordenador (CAD), el procesado de imágenes y el análisis numérico de ecuaciones en derivadas parciales.

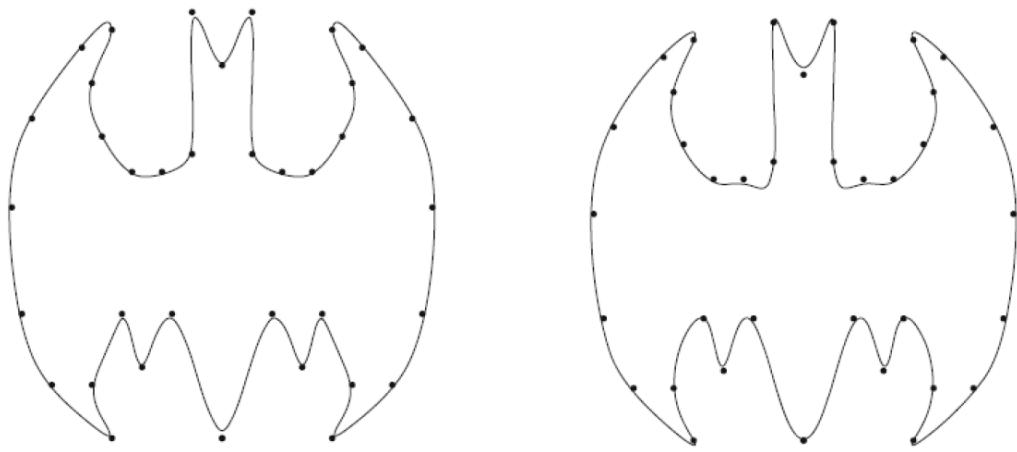


Figura 1: A partir de los puntos de control se itera un algoritmo de subdivisión no lineal en la izquierda y uno lineal en la derecha. Observamos como el algoritmo lineal produce oscilaciones tipo Gibbs debajo de la cabeza.

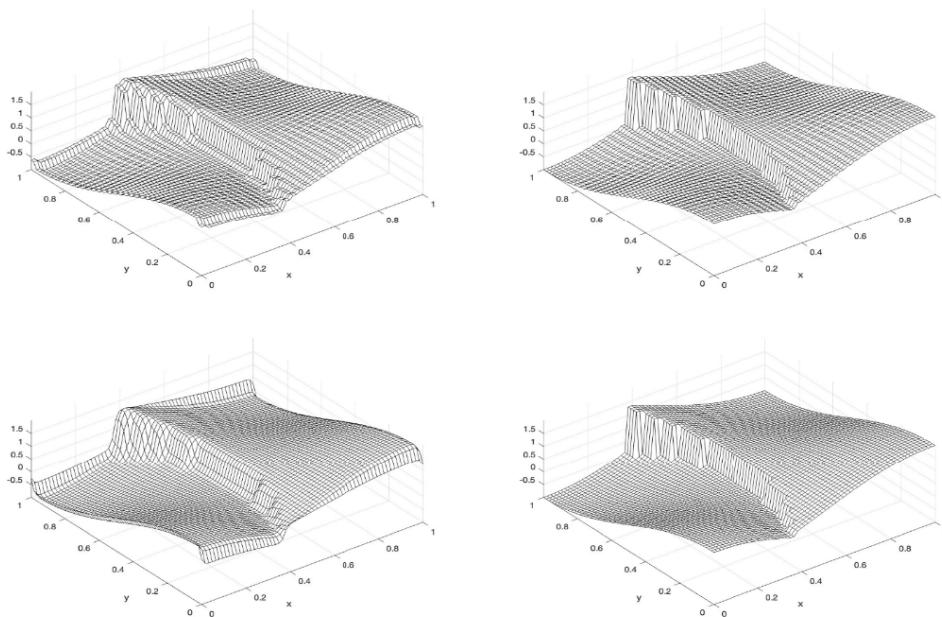


Figura 2: En esta figura se muestran las reconstrucciones de unos datos discontinuos con algoritmos de subdivisión lineales (izquierdo) y no lineales (derecho). Observamos como los algoritmos lineales producen oscilaciones tipo Gibbs en presencia de discontinuidades.

Esta revisión la hemos estructurado en cinco secciones monotemáticas y una última de conclusiones. La segunda sección aborda algunos trabajos relacionados con esquemas de subdivisión en variedades. La preservación de formas geométricas será estudiada en la sección tercera. La siguiente sección está dedicada a la adaptación de los esquemas de subdivisión a la presencia de discontinuidades. La sección cinco aborda los esquemas de multirresolución no lineales que son una generalización de las ondículas (wavelets) y que son altamente usadas en procesamiento de imágenes. Finalmente, en la sexta sección se repasan algunas de las nuevas teorías desarrolladas para el análisis de la convergencia, la regularidad y la estabilidad de los esquemas de subdivisión no lineales en distintos contextos.

## 2. Esquemas de subdivisión para variedades

Los esquemas de subdivisión lineales tradicionales están formulados para datos que residen en espacios euclidianos. Sin embargo, muchas aplicaciones requieren trabajar con datos que residen en variedades. En este contexto, los esquemas de subdivisión no lineales son particularmente útiles ya que permiten definir las reglas de subdivisión directamente sobre la geometría de la variedad, respetando las propiedades intrínsecas de la superficie o espacio subyacente. Esto es crucial, por ejemplo, en el modelado de superficies en geometrías no planas, en la interpolación de datos en espacios curvados, en gráficos por computadora cuando se modelan superficies curvas o en la reconstrucción de formas tridimensionales complejas, [54], 1998.

El principal desafío en estos esquemas radica en definir reglas de interpolación y refinamiento que preserven las propiedades topológicas y métricas de la variedad. Técnicas como el uso de proyecciones locales, interpolación geodésica o métodos basados en paralelismo de transporte han sido exploradas para garantizar que los nuevos puntos generados por el esquema sigan respetando la estructura geométrica subyacente.

A continuación, revisaremos algunas aportaciones interesantes:

- Ajuste de Clotoides y Subdivisión Hermética Geométrica: Ulrich Reif y Andreas Weinmann [60], 2021.

Este artículo trata sobre la subdivisión hermética geométrica para curvas planas, donde se refina iterativamente un polígono inicial usando información adicional de tangentes o vectores normales en los vértices. El componente clave para los esquemas de subdivisión propuestos está basado en el promedio de clotoides. Se propone una nueva estrategia para aproximar clotoides interpoladoras herméticas, la cual se utiliza para definir los análogos geométricos herméticos de los conocidos esquemas de Lane-Riesenfeld y el esquema de cuatro puntos.

Concretamente, el objetivo principal es generar curvas planas mediante pares de puntos y

vectores tangentes o normales asociados. En lugar de promediar puntos y vectores tangentes de manera lineal, como en los esquemas tradicionales, se propone un promedio basado en clotoides. Las clotoides son curvas con curvatura lineal, y su uso permite obtener una mejor representación geométrica de las formas naturales de las curvas.

Se introduce el problema de interpolación Hermítica entre dos puntos  $p_0$  y  $p_1$ , con ángulos tangentes  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$ . El esquema propuesto emplea clotoides, cuyas ecuaciones dependen de la curvatura  $\kappa$  de la curva, definida como  $\kappa = \frac{\alpha'}{v}$ , donde  $v = |p'|$  es la velocidad de la curva y  $\alpha'$  la derivada del ángulo tangente.

Para aproximar la interpolación hermítica con clotoides, se utiliza la función de ángulo tangente  $\beta(t)$ , que puede escribirse como:

$$\beta(t) = \beta_0 \phi_0(t) + \beta_{1/2} \phi_{1/2}(t) + \beta_1 \phi_1(t)$$

donde las funciones de Lagrange  $\phi_0(t)$ ,  $\phi_{1/2}(t)$  y  $\phi_1(t)$  son polinomios cuadráticos.

La fórmula aproximada para resolver este problema se describe mediante una función  $F$ , que aproxima el ángulo intermedio  $\beta_{1/2}$  y la velocidad  $v$ . Esta aproximación es eficiente en términos de computación y produce un error pequeño en la interpolación.

Se presentan ejemplos numéricos que ilustran la eficiencia de los esquemas de subdivisión propuestos. En particular, los esquemas basados en clotoides generan curvas suaves que preservan las características geométricas deseadas, como la continuidad de la tangente y una distribución de curvatura más uniforme en comparación con otros métodos basados en círculos.

- Hermite multi-ondículas para datos en variedades: Mariantonio Cotronei, Caroline Moosmüller, Tomas Sauer, Nada Sissouno, [22], 2023.

Este artículo presenta una construcción de multiwavelets interpolatorios de Hermite para funciones que toman valores en geometrías no lineales, como variedades Riemannianas o grupos de Lie. Los wavelets adaptados a datos con valores en variedades tienen aplicaciones importantes en la compresión y el procesamiento de señales.

La clave es la conexión entre esquemas de subdivisión y wavelets, usando un enfoque de predicción-corrección basado en esquemas de subdivisión de Hermite. Se demuestra que los coeficientes de los wavelets decaen de manera similar al caso lineal.

Un esquema de subdivisión de Hermite lineal se define por:

$$p^{(n+1)} = S_{A[n]} p^{(n)},$$

donde  $p^{(n)}$  es una secuencia de datos y  $S_{A[n]}$  es un operador asociado con la máscara  $A[n]$ . Este

esquema reproduce funciones como polinomios o exponenciales, asegurando la convergencia de las secuencias generadas.

El sistema de multiwavelets se construye usando la transformación:

$$S_{A[n]} D_n p^{(n)} = D_{n+1} p^{(n+1)},$$

donde  $D_n$  es una matriz de escalado. El objetivo es preservar las propiedades de los wavelets lineales en el contexto de datos sobre variedades.

En el esquema de predicción-corrección, la reconstrucción se basa en:

$$c_{n+1,2i} = S_{A[n]} c_{n,i}, \quad d_{n+1,2i+1} = c_{n+1,2i+1} - S_{A[n]} c_{n,i}.$$

Este esquema garantiza que la corrección mediante  $d_n$  anule los elementos no deseados en los datos originales.

Para extender estos conceptos a datos con valores en variedades  $M$ , se utilizan el transporte paralelo y el mapa exponencial:

$$p_j = \exp_{m_j} \left( \sum_{k \in Z} a_{j-2k} \exp_{m_j}^{-1}(p_k) \right),$$

donde  $\exp$  es el mapa exponencial, y el transporte paralelo  $P_q^p$  asegura que los cálculos se realicen en el marco adecuado de la variedad.

El mapa exponencial en un punto  $m \in M$ :

$$\exp_m : T_m M \rightarrow M$$

lleva un vector tangente  $v \in T_m M$  al punto alcanzado al caminar en  $M$  siguiendo la geodésica con velocidad inicial  $v$ .

El decaimiento de los coeficientes de wavelets en el caso de datos sobre variedades sigue una propiedad similar al caso lineal:

$$\|d[n]\|_\infty \leq C 2^{-2n}.$$

Esto asegura que los wavelets pueden representar eficientemente los datos manteniendo una tasa de compresión adecuada.

Este trabajo extiende los wavelets tipo Hermite a datos con valores en variedades, manteniendo propiedades fundamentales como el decaimiento de los coeficientes. Esta técnica tiene aplicaciones en el procesamiento de señales geométricas y la compresión de datos.

- Esquemas de subdivisión para datos valorados en variedades con simetría temporal: Duchamp, Xie y Yu, [27], 2016.

Este trabajo investiga la suavidad de esquemas de subdivisión no lineales para datos valorados en variedades, conocidos como esquemas de subdivisión con un único punto base. Estos esquemas surgen en la construcción de transformaciones tipo wavelet para datos definidos sobre una variedad  $M$ , como las matrices simétricas positivas. Se estudian las condiciones de suavidad  $C^k$  y cómo los esquemas de subdivisión garantizan simetría temporal pero no espacial. Se estudian las condiciones de suavidad  $C^k$  y cómo los esquemas de subdivisión garantizan simetría temporal pero no espacial.

Se define un esquema de subdivisión sobre una variedad  $M$  como:

$$(Sx)_{2h+\sigma} = \exp_{x_h} \left( \sum_{\ell} a_{2\ell+\sigma} \log_{x_h}(x_{h-\ell}) \right), \quad \sigma = 0, 1, \quad h \in \mathbb{Z},$$

donde  $\exp_{x_h}$  es el mapa exponencial en el punto  $x_h$ ,  $\log_{x_h}$  es su inverso local, y  $a_{\ell}$  es la máscara de un esquema de subdivisión lineal subyacente  $S_{\text{lin}}$ .

Se explora la equivalencia de suavidad entre el esquema no lineal  $S$  y su versión lineal  $S_{\text{lin}}$ . Se sabe que la equivalencia  $C^3$  se logra si un cierto tensor asociado al mapa de retracción  $f$ , llamado  $P_f$ , se anula:

$$P_f(u) = F_{0,2}(u, F_{0,2}(u, u)) + \frac{1}{2}F_{1,2}(u, u, u) - \frac{1}{2}F_{0,3}(u, u, u),$$

donde  $F_{\alpha,\beta}$  representa derivadas parciales del mapa  $f$  y  $P_f = 0$  garantiza la equivalencia  $C^3$ .

El trabajo analiza cómo el mapa de retracción  $f$  define una conexión afín sin torsión en  $M$ , con coeficientes de conexión dados por:

$$\Gamma_{ij}^k = -\frac{\partial^2 f^k(x, 0)}{\partial X_i \partial X_j},$$

y cómo la simetría temporal (invariancia ante  $t \rightarrow -t$ ) influye en la equivalencia  $C^4$ . Si el esquema lineal  $S_{\text{lin}}$  tiene simetría temporal dual, esto implica que  $P_f = 0$  y se mantiene la suavidad  $C^4$  sin restricciones adicionales sobre el comportamiento de cuarto orden del mapa de retracción  $f$ .

El artículo muestra que los esquemas de subdivisión con un único punto base pueden alcanzar una suavidad hasta  $C^4$  bajo ciertas condiciones. Sin embargo, para grados mayores de suavidad, la curvatura juega un rol esencial, limitando la aplicabilidad de estos esquemas a ciertos tipos de variedades con curvatura cero.

En conjunto, los trabajos de Reif y Weinmann [60], Cotronei *et al.* [22], y Duchamp *et al.* [27] muestran la evolución de los esquemas de subdivisión desde curvas planas basadas en

clotoides, pasando por extensiones a variedades Riemannianas, hasta alcanzar análisis de suavidad en contextos más generales. Una diferencia clave es que mientras los dos primeros se enfocan en la construcción geométrica, el tercero pone énfasis en condiciones de regularidad  $C^k$ . Así, puede verse una progresión natural desde lo constructivo hacia lo analítico.

Finalizamos, con cuatro aportaciones independientes de gran interés y seguimiento:

- Esquemas de subdivisión con dilatación general en el contexto geométrico y no lineal: Andreas Weinmann, [65], 2012.

Este artículo investiga esquemas de subdivisión con dilatación general en entornos geométricos y no lineales. Los esquemas de subdivisión tradicionales suelen utilizar un factor de dilatación fijo, pero el autor amplía este enfoque permitiendo dilataciones generales, lo que resulta en un mayor control sobre el refinamiento. El trabajo analiza la convergencia y la regularidad de estos esquemas en espacios métricos y geométricos, haciendo hincapié en su aplicabilidad en la interpolación de datos y en el diseño de curvas y superficies no lineales.

- Sobre el esquema de subdivisión log-exp de Donoho: elección de retracción y simetría temporal: Esfandiar Nava-Yazdani y Thomas P. Y. Yu, [57], 2006.

Este artículo examina el esquema de subdivisión log-exp de Donoho, enfocado en la elección de la retracción y la simetría temporal. El esquema log-exp es un método no lineal que utiliza funciones logarítmicas y exponenciales para suavizar y refinar curvas y superficies. Los autores investigan diferentes opciones de retracción para optimizar el comportamiento del esquema y analizan su simetría temporal, lo que es clave para garantizar la estabilidad en aplicaciones de procesamiento de señales y modelado geométrico.

- Ondículas interpolatorias en variedades: Philipp Grohs y Johannes Wallner, [42], 2009.

Este artículo introduce una nueva clase de wavelets interpolatorios diseñados para trabajar con datos valorados en variedades. Los wavelets tradicionales son herramientas poderosas para representar funciones y señales en el dominio euclíadiano, pero los autores extienden este concepto al caso de datos ubicados en espacios más generales, como las variedades. El artículo presenta un análisis teórico de la construcción y aplicación de estos wavelets, con especial énfasis en la interpolación de datos geométricos, con aplicaciones potenciales en gráficos por computadora y procesamiento de datos científicos.

- Análogos logarítmico-exponenciales de esquemas de subdivisión univariados en grupos de Lie y sus propiedades de suavidad: Philipp Grohs y Johannes Wallner, [41], 2007.

Este artículo explora los análogos log-exponenciales de los esquemas de subdivisión univariados dentro del contexto de los grupos de Lie. Los autores investigan cómo los esquemas de subdivisión pueden adaptarse para operar en grupos de Lie, manteniendo propiedades de suavidad similares a los esquemas tradicionales. Este enfoque es útil en áreas donde las

simetrías continuas, descritas por los grupos de Lie, juegan un papel importante, como en física teórica y simulaciones geométricas.

Tabla 1: Comparación de esquemas de subdivisión en variedades.

Autores	Tipo de variedad	Aporte distintivo
Reif y Weinmann	Planas	Preservación de tangentes y curvatura
Cotronei <i>et al.</i>	Riemannianas, Lie	Extensión de wavelets a datos geométricos
Duchamp <i>et al.</i>	Positivas simétricas	Equivalencia con esquemas lineales
Weinmann	Geométricas generales	Control de refinamiento en espacios métricos

### 3. Preservación de formas geométricas

En este contexto, “preservación de formas geométricas” significa que, bajo la iteración del esquema de subdivisión, ciertas figuras básicas permanecen invariantes. Es decir, si los puntos de control iniciales pertenecen a una de estas formas, entonces la curva o superficie límite también lo hará, incluso tras infinitas iteraciones. Una de las ventajas más importantes de los esquemas de subdivisión no lineales es su capacidad para preservar formas geométricas particulares, como círculos en 2D o esferas en 3D, entre otras formas interesantes. Esto es especialmente relevante en el contexto de modelado geométrico y gráficos por computadora, donde la precisión en la representación de estas formas es crítica. En los esquemas lineales, las formas geométricas suaves como los círculos y esferas a menudo se distorsionan a medida que se refinan los puntos debido a la naturaleza rígida y global de las reglas de subdivisión. Por ejemplo, en un esquema lineal, un círculo podría volverse ligeramente ovalado o distorsionado debido a errores acumulativos.

Los esquemas no lineales abordan este problema ajustando las reglas de subdivisión localmente, de modo que los puntos generados respeten las propiedades geométricas de las formas originales. En el caso de un círculo, por ejemplo, los esquemas no lineales pueden mantener la curvatura constante a lo largo de toda la forma, lo que asegura que el refinamiento sucesivo no altere su estructura global [50], 1996.

Para esferas en 3D, se pueden aplicar técnicas similares, garantizando que las nuevas subdivisiones mantengan las propiedades de simetría y curvatura de la esfera original. Algunos esquemas no lineales utilizan operadores geométricos específicos que se ajustan al radio local de la esfera, permitiendo que los nuevos puntos permanezcan sobre la superficie esférica en lugar de desviarse hacia fuera o hacia dentro. Esto es fundamental en aplicaciones como la animación de personajes, simulaciones físicas y diseño de objetos tridimensionales, donde la precisión en la representación de esferas y otras formas geométricas básicas es esencial [23], 1997.

A continuación, revisaremos algunas aportaciones en este contexto:

- Esquema de Subdivisión Interpolatoria Hermítica basado en Splines de Bernstein Bézier:  
Mahendra Kumar Jena, [49], 2021.

Este artículo introduce un nuevo esquema de subdivisión interpolatoria Hermítica no lineal para la interpolación de curvas, construido a partir de un spline racional de Bernstein Bézier. El esquema permite interpolar tanto los valores de la función como sus derivadas. Se presenta un análisis de convergencia, reproducción de polinomios y propiedades de preservación de la forma. Se demuestra que las funciones límite generadas por el esquema son globalmente  $C^1$  y que el esquema también reproduce polinomios cuadráticos, preservando la monotonía y la convexidad.

El esquema Hermítico es una técnica recursiva para calcular una función  $\phi(x)$  y sus derivadas. Se parte de una función inicial  $f_0 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ , donde el primer componente corresponde a los valores de  $\phi$ , el segundo a su derivada  $\phi'$ , y así sucesivamente. La regla de subdivisión tiene la forma:

$$f_{n+1}(i) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} A(i-2j) f_n(j)$$

donde  $A(i)$  es una matriz de máscara y  $f_n(i)$  es la secuencia refinada en el paso  $n$ .

El esquema se construye a partir de los polinomios de Bernstein Bézier racionales de grado 2. Para un intervalo  $[a, b]$ , las coordenadas baricéntricas de un punto  $x$  se definen como  $b_0(x) = \frac{b-x}{b-a}$  y  $b_1(x) = \frac{x-a}{b-a}$ . Los polinomios de Bernstein Bézier son:

$$B_0(x) = (b_0(x))^2, \quad B_1(x) = 2b_0(x)b_1(x), \quad B_2(x) = (b_1(x))^2$$

Con esto, los polinomios de Bernstein Bézier racionales se escriben como:

$$R_0(x) = \frac{w_0 B_0(x)}{\sum w_i B_i(x)}, \quad R_1(x) = \frac{w_1 B_1(x)}{\sum w_i B_i(x)}, \quad R_2(x) = \frac{w_2 B_2(x)}{\sum w_i B_i(x)}$$

donde  $w_0, w_1, w_2$  son los pesos.

El esquema es  $C^1$ -convergente y reproduce polinomios cuadráticos cuando se eligen adecuadamente los pesos  $w_0$  y  $w_2$ . Para la convergencia, se utiliza una técnica basada en diferencias divididas, que permite garantizar que las funciones límite sean suaves y continuas en todo el dominio.

Se demuestra que el esquema preserva la monotonía y convexidad de los datos iniciales. Si los datos de entrada son monótonos crecientes o convexos, el esquema garantizará que la curva interpolada mantenga estas propiedades a lo largo de todas las iteraciones.

Este nuevo esquema de subdivisión interpolatoria Hermítica basado en splines de Bernstein Bézier es adecuado para la generación de curvas suaves que reproducen polinomios de grado 2,

preservan la forma y garantizan la convergencia  $C^1$ . Su aplicación puede ser útil en problemas donde se requiera una interpolación precisa que mantenga la geometría de los datos originales.

- Un esquema de subdivisión generalizado no lineal de grado arbitrario con un parámetro de tensión: Zeze Zhang, Hongchan Zheng, Jie Zhou y Lulu Pan, [73], 2020.

Este artículo presenta un esquema de subdivisión no lineal de grado arbitrario con un parámetro de tensión. Este esquema refina pares punto-normal en 2D, y se construye sobre el esquema de subdivisión lineal generalizada con un parámetro de tensión, reemplazando el promedio aritmético ponderado en el esquema lineal con un promedio circular:

Dado dos pares punto-normal  $P_0 = (p_0, n_0)$  y  $P_1 = (p_1, n_1)$ , el *promedio circular* se define como el par  $P_t = (p_t, n_t)$ , donde:

$$p_t \in \text{arco}(p_0, p_1), \quad n_t = \frac{n_0 \oplus n_1}{\|n_0 \oplus n_1\|},$$

siendo  $\oplus$  el promedio geodésico de las normales unitarias. De esta forma,  $p_t$  se mantiene sobre el círculo determinado por  $p_0$  y  $p_1$ .

Se demuestra que este esquema alcanza suavidad  $C^1$  con una elección adecuada del parámetro de tensión cuando el grado es  $m \geq 3$ .

El esquema de subdivisión generalizada lineal con un parámetro de tensión para un grado  $m \geq 2$  se define por la siguiente iteración:

$$p_i^{(m)} = \frac{1}{2} \left( p_i^{(m-1)} + p_{i+1}^{(m-1)} \right)$$

donde  $p_i$  son los puntos del polígono de control inicial y  $u$  es el parámetro de tensión. Este esquema es una generalización del algoritmo de Lane Riesenfeld.

El promedio circular se aplica a pares punto-normal. Dados dos pares punto-normal  $P_0 = (p_0, n_0)$  y  $P_1 = (p_1, n_1)$ , con  $p_0, p_1$  puntos y  $n_0, n_1$  vectores normales unitarios, el promedio circular produce un nuevo par  $P_t = (p_t, n_t)$ , donde  $p_t$  está sobre el arco entre  $p_0$  y  $p_1$ , y  $n_t$  es el promedio geodésico de los vectores normales.

El esquema no lineal se construye reemplazando el promedio aritmético en el esquema lineal por el circular. La regla de refinamiento es:

$$P_{2i+1}^{(j)} = P_i^{(j)} \odot P_{i+1}^{(j)}$$

donde  $\odot$  denota el promedio circular. Este esquema permite reconstruir curvas suaves y controlar la forma de la curva límite a través del parámetro de tensión  $u$ .

La convergencia del esquema se asegura bajo ciertas condiciones. Definimos la diferencia

entre puntos consecutivos como:

$$e_j = \sup_i |p_{j,i+1} - p_{j,i}|$$

y mostramos que la secuencia  $e_j$  es contractiva, es decir:

$$e_{j+1} \leq \eta e_j \quad \text{con} \quad 0 < \eta < 1$$

lo que implica la convergencia del esquema para cualquier conjunto de datos de entrada.

El esquema alcanza suavidad  $C^1$  para  $m \geq 3$  si el parámetro de tensión  $u$  satisface:

$$\sqrt{2} - 1 < u < \sqrt{2} + 1$$

Esto asegura que las curvas generadas sean suaves sin perder la capacidad de reconstruir curvas como el círculo.

Este esquema es útil para controlar la suavidad y la forma de las curvas límite, alcanzando suavidad  $C^1$  con la elección adecuada de parámetros. Futuras investigaciones se centrarán en demostrar órdenes de suavidad superiores.

- Esquemas de subdivisión no lineales para funciones hiperbólicas y trigonométricas: Donat y López Ureña, [25], 2017.

Este trabajo introduce una nueva familia de esquemas de subdivisión interpolatorios no lineales, con capacidad para reproducir funciones hiperbólicas y trigonométricas, así como polinomios de hasta segundo grado. Los esquemas tradicionales de subdivisión lineales y no estacionarios pueden lograr esta reproducción, pero requieren la determinación práctica de parámetros dependientes del nivel, lo cual complica la implementación en aplicaciones de modelado geométrico.

Este trabajo se enfoca en esquemas binarios estacionarios donde la regla de refinamiento está dada por:

$$(Sf)_{2i+j} = \phi_j(f_{i-q}, \dots, f_{i+q}), \quad j = 0, 1, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Si las funciones  $\phi_j$  son lineales, el esquema se puede representar como:

$$\phi_j(f_{i-q}, \dots, f_{i+q}) = \sum_{l=-q}^q a_j f_{i+l},$$

donde  $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  es la máscara del operador lineal  $S$ .

Uno de los principales resultados es que los esquemas no lineales estacionarios propuestos

pueden reproducir espacios de polinomios exponenciales de la forma:

$$W_{0,\gamma} = \text{span}\{1, \exp(\gamma t), \exp(-\gamma t)\}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, el esquema puede generar con precisión formas cónicas (círculos, elipses) mediante la interpolación de funciones trigonométricas. La reproducción se garantiza cuando los datos iniciales pertenecen a este espacio de funciones.

El trabajo también analiza las condiciones para obtener funciones límite con derivadas continuas, lo que se relaciona con la preservación de la monotonía de los datos iniciales.

Los esquemas de subdivisión no lineales propuestos ofrecen una herramienta eficiente para la reproducción exacta de secciones cónicas y formas hiperbólicas sin necesidad de un preprocesamiento de los datos. Estos esquemas son una extensión de los métodos tradicionales, permitiendo la generación de formas complejas con alta precisión.

- Curvas y superficies de subdivisión punto-normal: X. Yang, [71], 2006.

Este trabajo propone esquemas de subdivisión no lineales punto-normal (PN) para el modelado de curvas y superficies. Los esquemas refinan tanto las posiciones de los vértices como las normales en los puntos de control, lo que permite reproducir primitivas geométricas como círculos, cilindros y esferas.

El esquema de subdivisión PN refina los vértices y normales de la siguiente forma:

$$q_i^{k+1} = \sum_j a_{i-2j} p_j^k, \quad n_i^{k+1} = \frac{\sum_j a_{i-2j} n_j^k}{\left\| \sum_j a_{i-2j} n_j^k \right\|}, \quad p_i^{k+1} = q_i^{k+1} + \sum_j a_{i-2j} h_{ij}^k n_i^{k+1},$$

donde  $h_{ij}^k$  es la altura en la dirección de la normal  $n_i^{k+1}$  y  $q_i^{k+1}$  es el vértice subdividido linealmente.

Los esquemas de subdivisión PN preservan ciertas propiedades geométricas, como:

- Invarianza geométrica: Las curvas y superficies PN son invariantes bajo traslaciones, escalas y rotaciones del sistema de coordenadas.
- Preservación de círculos y esferas: Si los puntos de control y las normales iniciales están sobre un círculo o esfera, los puntos subdivididos también lo estarán.

Se demuestra que los esquemas de subdivisión PN tienen la misma convergencia y órdenes de suavidad que los esquemas lineales subyacentes.

Los esquemas de subdivisión PN propuestos generalizan los esquemas de subdivisión lineales tradicionales al permitir el control mediante puntos y normales. Estos esquemas son eficientes para modelar superficies suaves con alta precisión, preservando formas geométricas simples como círculos y esferas, y manteniendo el mismo grado de suavidad que los esquemas lineales.

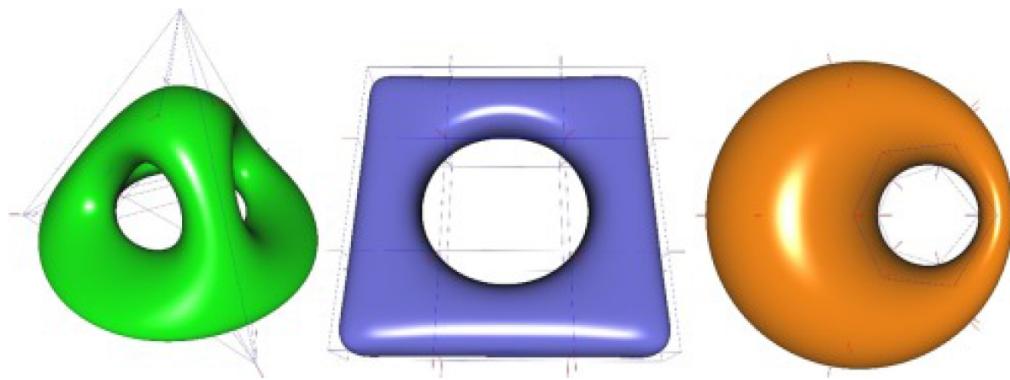


Figura 3: Superficies generadas con algoritmos de subdivisión punto-normal introducidos por Yang, [71].

- Un nuevo esquema de subdivisión de corte de esquinas invariante circular de cuatro puntos para diseño de curvas: Jian-ao Lian, [52], 2012.

Este artículo introduce un nuevo esquema de subdivisión de corte de esquinas de cuatro puntos, invariante bajo transformaciones circulares, para el diseño de curvas. El método presentado permite generar curvas suaves y estéticamente agradables a partir de un conjunto inicial de puntos de control, manteniendo la propiedad de invariancia circular, lo que lo hace especialmente útil en aplicaciones gráficas. El autor proporciona un análisis detallado de la convergencia y suavidad del esquema, destacando sus ventajas en comparación con otros métodos de subdivisión existentes.

- Subdivisión con control exacto de bordes y geometría sin variedad: Fehmi Cirak y Quan Long, [18], 2011.

Este artículo propone un enfoque novedoso para el control exacto de bordes y geometrías sin variedad utilizando esquemas de subdivisión. Las capas de subdivisión permiten la creación de superficies suaves que se ajustan con precisión a los bordes definidos por el usuario. El enfoque también aborda geometrías complejas no manifold, que son estructuras que no pueden ser descritas completamente por métodos de subdivisión tradicionales. Este trabajo tiene importantes aplicaciones en simulaciones de ingeniería y modelado geométrico avanzado.

- Subdivisión de curvas con control de longitud de arco: Victoria Hernández Mederos, Jorge C. Estrada-Sarlabous, Silvio R. Morales y Ioannis Ivrissimtzis, [47], 2009.

Este artículo propone un esquema de subdivisión de curvas que controla la longitud de arco. En lugar de refinar las curvas de manera uniforme, los autores presentan un método que

ajusta dinámicamente los puntos de control para mantener una distribución controlada de la longitud de arco. Este enfoque es útil en aplicaciones donde la precisión en la longitud de las curvas es crucial, como en el modelado geométrico, el diseño de caminos y trayectorias, y la animación por computadora.

- Esquemas de subdivisión no lineales circulares para el diseño de curvas: Jian-ao Lian, Yonghui Wang y Yonggao Yang, [53], 2009.

Este artículo introduce esquemas de subdivisión no lineales diseñados para generar curvas circulares en aplicaciones de diseño geométrico. Los autores desarrollan un método basado en la subdivisión que se adapta a la naturaleza geométrica de las curvas circulares, permitiendo la creación de curvas suaves y precisas a partir de puntos de control discretos. Este enfoque es útil en el diseño asistido por computadora (CAD) y en gráficos por computadora para representar con precisión formas circulares y curvas cerradas.

- Un esquema de subdivisión no lineal que preserva círculos: Pavel Chalmovianský y Bert Jüttler, [17], 2007.

Este artículo presenta un esquema de subdivisión no lineal que preserva las propiedades geométricas de las curvas circulares. Los autores desarrollan un algoritmo que permite la generación y refinamiento de curvas manteniendo su naturaleza circular durante el proceso de subdivisión. El esquema es útil en el diseño geométrico y en aplicaciones donde la precisión en la representación de curvas circulares es crucial.

- Esquemas de subdivisión basados en las normales para el diseño de curvas: Xunnian Yang, [70], 2006.

Este artículo introduce un esquema de subdivisión basado en normales para el diseño de curvas. El método se basa en la utilización de las normales de las curvas en puntos de control para mejorar la suavidad y precisión de las curvas generadas. Este enfoque es útil en el diseño asistido por computadora (CAD) y en gráficos por computadora, donde se requiere un control preciso sobre la forma y suavidad de las curvas.

En esta línea de trabajo se observa una evolución desde métodos orientados a propiedades locales, como el esquema de Jena [49] que garantiza monotonía y convexidad, hasta propuestas más globales como la de Yang [70, 71] que asegura invariancia de círculos y esferas bajo refinamiento iterativo. Mientras los enfoques basados en promedio circular (Zhang *et al.* [73]) introducen un parámetro de tensión que permite cierto control del refinamiento, los métodos geométricos de Lian [52, 53] y Chalmovianský-Jüttler [17] se centran en mantener formas circulares exactas en el límite. En conjunto, estos trabajos muestran un balance entre flexibilidad algorítmica y preservación estricta de la geometría.

Tabla 2: Esquemas no lineales orientados a preservación de formas geométricas.

Autores	Forma preservada	Ventaja principal
Jena	Curvas convexas	Monotonía y convexidad
Zhang <i>et al.</i>	Círculos	Control por parámetro de tensión
Yang	Círculos y esferas	Invariante bajo isometrías
Lian	Curvas circulares	Suavidad con invariancia
Chalmovianský y Jüttler	Círculos	Mantiene circularidad exacta

## 4. Adaptación a las presencia de discontinuidades

Uno de los problemas comunes en esquemas de subdivisión lineales, especialmente cuando se aplican a señales o datos con discontinuidades (por ejemplo, bordes afilados en imágenes), es la aparición de oscilaciones de Gibbs. Estas oscilaciones son artefactos no deseados que surgen en las cercanías de discontinuidades cuando los esquemas suavizan excesivamente la señal o la superficie. Las discontinuidades también pueden haber aparecido por falta de datos cerca de regiones con gradientes altos (variaciones muy rápidas).

Los esquemas de subdivisión no lineales son efectivos para mitigar este fenómeno, ya que pueden adaptarse mejor a la presencia de bordes o discontinuidades. A diferencia de los métodos lineales, que aplican las mismas reglas de refinamiento en toda la señal, los esquemas no lineales pueden ajustar las reglas de subdivisión localmente para evitar sobre-suavización en áreas con características importantes, como bordes [50], 1996.

Algunas estrategias no lineales para eliminar las oscilaciones de Gibbs incluyen el uso de operadores adaptativos, donde los coeficientes de subdivisión varían en función de la pendiente local o la curvatura, lo que permite preservar mejor las características significativas de la señal. Otra técnica es incorporar regularización basada en variación total o métodos relacionados, que son adecuados para manejar discontinuidades.

Veamos algunas de las aportaciones en este contexto:

- Sobre una familia de esquemas de subdivisión no oscilatorios teniendo una regularidad  $C^r$ ,  $r > 1$ : Sergio Amat, Juan Ruiz, Juan C. Trillo y Dionisio F. Yáñez, [11], 2020.

Este artículo presenta una familia de esquemas de subdivisión no oscilatorios con regularidad  $C^r$  para  $r > 1$ . Los autores desarrollan esquemas que permiten obtener suavidad en los resultados interpolados, evitando fenómenos de oscilación que pueden ocurrir en los procesos de subdivisión. El enfoque está en garantizar un equilibrio entre la suavidad y la precisión del esquema, explorando cómo estos esquemas pueden ser aplicados en contextos numéricos y gráficos.

- Sobre una familia estable de esquemas de subdivisión no lineales eliminando el fenómeno de Gibbs: Sergio Amat, Juan Ruiz, J. Carlos Trillo y Dionisio F. Yáñez, [10] 2019.

Los autores introducen una familia de esquemas de subdivisión no lineales de cuatro puntos que eliminan el fenómeno de Gibbs, un problema común en el procesamiento de señales y gráficos que genera oscilaciones no deseadas en los bordes de las señales. El artículo aborda la estabilidad y la convergencia de estos esquemas, proponiendo métodos efectivos para suavizar las transiciones sin perder precisión en la interpolación, lo cual es especialmente útil en aplicaciones como el tratamiento de imágenes y gráficos digitales.

- Una familia de esquemas interpolatorios ternarios de 5-puntos con regularidad  $C^2$ : Muhammad Aslam, [15], 2018.

Este artículo presenta una familia de esquemas de subdivisión ternarios no lineales de interpolación con suavidad  $C^2$ . El trabajo se centra en desarrollar métodos que aseguren una suavidad considerable en las curvas y superficies generadas, lo que es crucial para aplicaciones gráficas y de modelado geométrico. La investigación analiza tanto las propiedades geométricas como las cualidades numéricas de estos esquemas, enfatizando su aplicabilidad en interpolación y gráficos computacionales, logrando transiciones suaves y sin distorsiones.

- Esquemas de subdivisión no lineales ternarios de  $(2n - 1)$  puntos: Muhammad Aslam, [14], 2018.

Este trabajo presenta una familia de esquemas de subdivisión ternarios no lineales con interpolación, basada en  $(2n - 1)$  puntos. Los esquemas propuestos permiten generar curvas suaves a partir de un conjunto de puntos de control, mejorando la precisión y la suavidad de las curvas en comparación con los métodos lineales tradicionales. Se realiza un análisis detallado de la regularidad y convergencia de estos esquemas, enfocándose en su aplicabilidad en la geometría computacional y el procesamiento de gráficos.

- Sobre un esquema de subdivisión ternario no lineal y no interpolatorio eliminando el fenómeno de Gibbs: Sergio Amat, Abdelaziz Choutri, Juan Ruiz y Sofiane Zouaoui, [1], 2018.

Este artículo introduce un esquema de subdivisión no lineal de 4 puntos, ternario y no interpolatorio, diseñado para eliminar el fenómeno de Gibbs, que se manifiesta en oscilaciones no deseadas cerca de las discontinuidades. Los autores presentan un método que suprime estas oscilaciones, garantizando transiciones suaves entre las partes de la señal o imagen procesada. Además, se analiza la convergencia y la estabilidad del esquema, haciéndolo apto para aplicaciones en procesamiento de imágenes, gráficos computacionales y señales digitales.

- Análisis de un nuevo esquema de subdivisión no lineal. Aplicaciones en el procesamiento de imágenes. Sergio Amat, Rosa Donat, Jacques Liandrat y J. Carlos Trillo [8], 2006.

Este trabajo presenta un análisis y desarrollo de un nuevo esquema de subdivisión no lineal, diseñado para mejorar la precisión y la calidad en la representación de datos en gráficos y procesamiento de imágenes. En el contexto del procesamiento digital de imágenes, los métodos de subdivisión son útiles para generar imágenes de alta resolución a partir de datos de baja resolución. Sin embargo, los métodos de subdivisión lineales tradicionales suelen tener limitaciones cuando se trata de preservar detalles importantes en zonas con discontinuidades o bordes marcados, lo cual es crucial en la calidad visual de una imagen.

El esquema no lineal propuesto en el artículo se enfoca en conservar los detalles y bordes dentro de la imagen, evitando los efectos de suavizado excesivo que suelen presentarse en los métodos tradicionales. Los autores presentan un análisis detallado del comportamiento del esquema en términos de convergencia, estabilidad y preservación de características esenciales de la imagen. La metodología incorpora técnicas matemáticas avanzadas que permiten que el esquema responda de forma adaptativa a las variaciones en la estructura de la imagen.

Además de la teoría detrás del nuevo esquema, los autores realizan una serie de experimentos numéricos que demuestran su eficacia y utilidad práctica en el procesamiento de imágenes. Estos experimentos muestran cómo el esquema no lineal propuesto puede aplicarse a diversas tareas de mejora de imágenes, incluyendo la preservación de bordes y la reducción de artefactos en imágenes ampliadas. Los resultados obtenidos son prometedores y sugieren que el esquema puede ser una alternativa valiosa en aplicaciones que requieren alta fidelidad en la representación de detalles visuales.

En conclusión, el artículo presenta un avance significativo en el campo del procesamiento de imágenes mediante la introducción de un esquema de subdivisión que mejora la calidad visual al tiempo que reduce los efectos negativos de los métodos lineales convencionales.

- Sobre un esquema de subdivisión no lineal cuaternario de 4 puntos eliminando el fenómeno de Gibbs: Sergio Amat y Jacques Liandrat [4], 2013.

Este artículo aborda un esquema de subdivisión no lineal de 4 puntos cuaternario, diseñado para aproximación en lugar de interpolación, que elimina el fenómeno de Gibbs. Este fenómeno, caracterizado por oscilaciones no deseadas en los bordes de señales o imágenes, es un problema común en el procesamiento de datos digitales. Los autores presentan un esquema que logra una transición suave y precisa, reduciendo estas oscilaciones sin comprometer la calidad de la aproximación. El trabajo incluye un análisis de la estabilidad y convergencia del esquema propuesto, con aplicaciones en procesamiento de imágenes, señales y gráficos.

- Una clase de esquemas de subdivisión no lineales de 4 puntos: Allal Guessab, María Moncayo y Gerhard Schmeisser, [43], 2012.

Este artículo propone una clase de esquemas de subdivisión no lineales de cuatro puntos. Estos esquemas son diseñados para generar curvas suaves a partir de un conjunto inicial de puntos de control, y son aplicables en gráficos computacionales y modelado geométrico. A diferencia de los esquemas lineales tradicionales, los métodos no lineales presentados permiten un mayor control sobre la suavidad y precisión de las curvas generadas, reduciendo oscilaciones no deseadas. El artículo incluye un análisis teórico de la convergencia y la regularidad de los esquemas, junto con aplicaciones prácticas en geometría computacional.

- Esquemas de subdivisión no lineales ponderados Weighted-Power- $p$ : Francesc Aràndiga, Rosa Donat, Maria Santágueda [13], 2012.

Este trabajo introduce y analiza esquemas de subdivisión no lineales ponderados, conocidos como “Weighted-Power- $p$ ”. Estos esquemas permiten el refinamiento de curvas o superficies mediante un proceso iterativo, en el que los pesos asignados a los puntos de control dependen de una función de potencia  $p$ . Se estudia el comportamiento de los esquemas en términos de suavidad, convergencia y estabilidad. El artículo también aborda aplicaciones en gráficos computacionales y modelado geométrico, mostrando cómo los esquemas ponderados ofrecen flexibilidad en la manipulación de formas geométricas.

Las propuestas analizadas para el tratamiento de discontinuidades muestran diferentes estrategias: los trabajos de Amat *et al.* y Moncayo *et al.* [43] se centran en eliminar oscilaciones de Gibbs mediante modificaciones no lineales de esquemas clásicos, mientras que Aslam [14, 15] opta por un enfoque interpolatorio que mantiene suavidad  $C^2$  incluso en curvas complejas. Por su parte, Aràndiga *et al.* [13] introducen pesos adaptativos con base en funciones de potencia, lo que aporta flexibilidad para distintos tipos de datos. En conjunto, los distintos esquemas tienen como objetivo preservar la suavidad global incorporando adaptación local en presencia de irregularidades.

Tabla 3: Esquemas de subdivisión no lineales para manejo de discontinuidades.

Autores	Tipo	Enfoque	Beneficio
Amat <i>et al.</i>	Variado	Fenómeno Gibbs	Estabilidad y convergencia
Aslam	Ternario	Interpolatorio $C^2$	Suavidad en curvas complejas
Aràndiga <i>et al.</i>	Weighted-Power- $p$	Pesos adaptativos	

## 5. Esquemas de Multirresolución

Los esquemas de multirresolución son fundamentales en el análisis de señales e imágenes, proporcionando representaciones compactas en varias escalas. En particular, los esquemas no lineales propuestos por Harten [45, 46], 1989, 1995, mejoran la adaptabilidad de la multirresolución al preservar características locales mediante técnicas de umbralización y aproximación adaptativa, lo cual es especialmente útil en contextos donde las estructuras de las señales no siguen un comportamiento lineal.

La multirresolución implica la descomposición de una señal  $f(x)$  en varias escalas. En un esquema clásico de multirresolución, se busca representar  $f(x)$  en términos de una serie de funciones de base, generadas a través de funciones escalares y de detalles. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$f(x) = \sum_j c_j \phi_j(x) + \sum_{j,k} d_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad (5.1)$$

donde  $\phi_j(x)$  representa una función de baja frecuencia o escala y  $\psi_{j,k}(x)$  representan funciones de detalle en diferentes niveles de resolución.

En los esquemas lineales, como las ondas Haar o Daubechies, los coeficientes  $c_j$  y  $d_{j,k}$  se obtienen mediante convoluciones lineales. Sin embargo, en los esquemas no lineales, el cálculo de estos coeficientes depende de técnicas adaptativas que no requieren necesariamente una estructura lineal.

Harten desarrolló un esquema de multirresolución no lineal que introduce operaciones adaptativas en el cálculo de los coeficientes  $d_{j,k}$ . En lugar de emplear convoluciones, se aplican operadores no lineales que filtran selectivamente los detalles de la señal de acuerdo con su importancia local.

La técnica de umbralización permite eliminar componentes de la señal que se consideran irrelevantes. Sea  $f(x)$  una señal continua, su versión umbralizada,  $T(f(x))$ , puede representarse como:

$$T(f(x)) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > \lambda, \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq \lambda, \end{cases} \quad (5.2)$$

donde  $\lambda$  es el umbral. Este valor puede ajustarse dinámicamente según las características de la señal. En el contexto de la multirresolución no lineal, esta umbralización permite preservar sólo los detalles más significativos, reduciendo la complejidad computacional y mejorando la compresión.

En las técnicas de interpolación adaptativa, se ajusta el grado de resolución en función de las características locales de la señal. Para una señal  $f(x)$ , la interpolación adaptativa  $I(f(x))$  podría definirse a través de una función de ponderación  $w(x)$  que varía localmente:

$$I(f(x)) = w(x) \cdot f(x) + (1 - w(x)) \cdot f'(x), \quad (5.3)$$

donde  $f'(x)$  es una versión suavizada de  $f(x)$ , y  $w(x) \in [0, 1]$  se ajusta para resaltar regiones de alta variabilidad en  $f(x)$ . En zonas de alta frecuencia,  $w(x)$  se aproxima a 1, manteniendo el detalle, mientras que en zonas suaves,  $w(x)$  se aproxima a 0, reduciendo la resolución.

Los esquemas de multirresolución no lineales encuentran aplicaciones en varias áreas:

- **Compresión de Imágenes:** Los métodos de umbralización adaptativa permiten comprimir imágenes eliminando detalles irrelevantes, mientras que la interpolación adaptativa mantiene la calidad visual en las áreas de interés.
- **Procesamiento de Señales Médicas:** En imágenes médicas, estos esquemas mejoran la claridad de características importantes, como estructuras anatómicas pequeñas o anomalías.

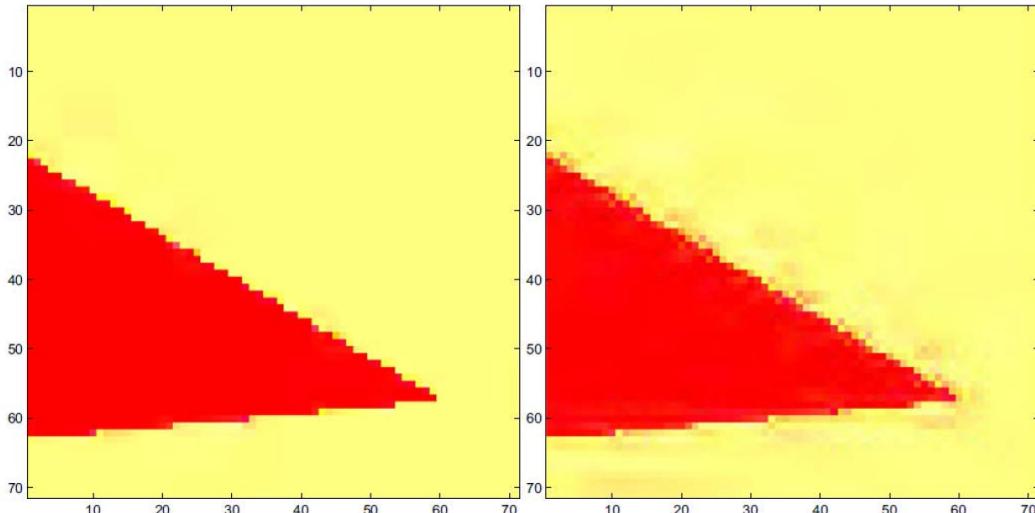


Figura 4: Reconstrucciones de algoritmos de multirresolución en un proceso de compresión de imágenes. En la izquierda se observa la buena adaptación a las discontinuidades del algoritmo no lineal, mientras que en la derecha aparecen las oscilaciones tipo Gibbs clásicas de multirresoluciones lineales.

Podríamos destacar estas dos aportaciones pioneras de Ami Harten:

- Harten, A. (1989). Discrete Multiresolution Analysis and Generalized Wavelets. *Applied Numerical Mathematics*, 12(1-3), 153-192.

En este trabajo, Harten presenta una forma discreta de análisis de multirresolución y su aplicación a las wavelets generalizadas, lo que es relevante para el desarrollo de esquemas multirresolución no lineales.

- Harten, A. (1995). Multiresolution Representation of Data: A General Framework. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(3), 1205-1256.

Este artículo proporciona un marco general para la representación de datos en múltiples resoluciones, abarcando tanto métodos lineales como no lineales.

A continuación, repasaremos algunas otras aportaciones en este campo:

- Sobre el acople de operadores de decimación con esquemas de subdivisión para análisis multiescala: Zhiqing Kui, Jean Baccou, Jacques Liandrat, [51], 2017.

Este trabajo explora el acoplamiento del operador de decimación con esquemas de subdivisión para el análisis a múltiples escalas. El estudio aborda la interacción entre los operadores de decimación, que reducen la resolución de una señal, y los esquemas de subdivisión, que permiten su refinamiento y reconstrucción. Los autores presentan un enfoque sistemático para integrar ambos métodos, destacando su relevancia en aplicaciones como la compresión de datos y la representación de señales en diferentes escalas de detalle. El análisis incluye tanto consideraciones teóricas como resultados numéricos que demuestran la efectividad de la técnica.

- Sobre un esquema de multirresolución en medias en celda para la compresión de imágenes: Sergio Amat, Jacques Liandrat, Juan Ruiz, J. Carlos Trillo, [9], 2012.

Este artículo presenta un esquema no lineal de multirresolución basado en promedios celulares para la compresión de imágenes. Los esquemas de multirresolución permiten representar imágenes en diferentes niveles de detalle, facilitando la compresión sin perder información relevante. El enfoque no lineal propuesto por los autores reduce las oscilaciones y mejora la precisión en las representaciones comprimidas, en comparación con los métodos lineales. Se incluyen resultados numéricos que muestran la efectividad del esquema en la compresión de imágenes, destacando su capacidad para reducir el tamaño de los datos sin sacrificar calidad.

- Transformaciones multiescala no lineales: teoría  $L^p$ : Peter Oswald, [59], 2012.

Este artículo presenta un análisis teórico de las transformaciones multiescala no lineales dentro del marco de la teoría  $L^p$ . Las transformaciones multiescala son herramientas importantes para el procesamiento de señales y la compresión de datos, y el enfoque no lineal ofrece mejoras significativas en la preservación de características esenciales en diferentes escalas. El autor desarrolla un marco matemático para estudiar la estabilidad y el comportamiento de estas transformaciones en espacios  $L^p$ , proporcionando nuevas perspectivas sobre cómo aplicar estas técnicas en diversas aplicaciones, como la compresión de imágenes y la resolución de problemas numéricos.

- Una familia de esquemas de multirresolución no lineales no separables en 2D: Sergio Amat, K. Dadourian, Jacques Liandrat, Juan Ruiz, Juan C. Trillo, [3], 2010.

Este artículo presenta una familia de esquemas de multirresolución no lineales, no separables y estables en dos dimensiones (2D). Los autores analizan cómo estos esquemas permiten descomponer y representar datos bidimensionales en varios niveles de resolución, manteniendo estabilidad y precisión. El enfoque no separable es clave para tratar imágenes y datos geométricos que no pueden descomponerse en direcciones independientes. El artículo incluye aplicaciones en compresión de imágenes y análisis de datos bidimensionales complejos.

- Aproximación multiescala, no lineal y adaptativa, [24], 2009.

Este extenso volumen de más de 650 páginas explora diversos enfoques de aproximación multiescala, no lineales y adaptativos, con aplicaciones en áreas como el análisis numérico, el procesamiento de señales y el modelado geométrico. Se aborda cómo las técnicas de aproximación multiescala permiten representar datos en diferentes niveles de detalle, y se analiza cómo los métodos no lineales y adaptativos pueden mejorar la precisión en situaciones donde los enfoques lineales tradicionales no son suficientes. El libro incluye contribuciones de varios expertos y abarca tanto los aspectos teóricos como las aplicaciones prácticas.

- Sobre esquemas de multirresolución utilizando una selección del esténcil y su aplicación en esquemas ENO: Sergio Amat, Sonia Busquier, J. Carlos Trillo, [7], 2007.

Este artículo introduce un esquema de multiresolución basado en la selección de un esténcil para mejorar la precisión y evitar oscilaciones no deseadas en esquemas ENO (Essentially Non-Oscillatory). Los autores proponen un enfoque para seleccionar automáticamente el esténcil adecuado, lo que reduce los errores en aplicaciones como la simulación de flujos y ecuaciones en derivadas parciales. Este esquema es particularmente relevante en el análisis numérico de fenómenos físicos que requieren alta precisión y estabilidad.

- Compresión de datos con esquemas tipo ENO: Un caso de estudio: Sergio Amat, Francesc Aràndiga, Albert Cohen, Rosa Donat, Gregori García y Markus von Oehsen, [5], 2001.

Se estudian las propiedades de compresión de transformaciones multiresolución no lineales de tipo ENO en imágenes digitales. Se utilizan algoritmos de control de errores específicos para garantizar una precisión prescrita. Los resultados numéricos revelan que estos métodos superan con creces las descomposiciones de wavelets más clásicas en el caso de imágenes geométricas suaves por partes.

- Esquemas de multirresolución con control del error para la representación de imágenes compactas: Sergio Amat, Francesc Aràndiga, Albert Cohen y Rosa Donat, [6], 2002.

Se estudia una clase de representaciones multiresolución basadas en predicción no lineal en el contexto multivariado basado en estrategias de productos tensoriales. A diferencia de las

transformadas wavelet lineales estándar, estas representaciones no pueden considerarse como un cambio de base, y el error inducido al establecer un umbral o cuantificar los coeficientes requiere un análisis diferente. Proponemos algoritmos de control de errores específicos que garantizan una precisión prescrita en varias normas al realizar dichas operaciones con los coeficientes. Estos algoritmos se comparan con umbrales estándar, para imágenes sintéticas y reales.

En el ámbito de la multirresolución, los trabajos revisados parten de la construcción pionera de Harten [45,46], centrada en compresión adaptativa de señales, y se diversifican hacia contextos como el procesamiento de imágenes (Amat *et al.*) o la teoría funcional (Oswald [59]). La aproximación de Kui *et al.* [51] ofrece un marco sistemático que integra decimación y subdivisión, mientras que Amat *et al.* priorizan la estabilidad mediante algoritmos de error-control. Comparando estas contribuciones, se aprecia un progreso desde esquemas fundamentalmente unidimensionales hacia extensiones en dos dimensiones y aplicaciones más generales, siempre con el hilo conductor de combinar eficiencia computacional con estabilidad analítica.

Tabla 4: Esquemas de multirresolución no lineales.

Trabajo	Técnica	Aplicación	Aporte
Harten	Multiescala adaptativa	Señales, compresión	Predicción adaptativa
Amat <i>et al.</i>	Separables y no separables	Tratamiento imágenes	Precisión con estabilidad
Kui <i>et al.</i>	Decimación + subdivisión	Multi-escala	Integración sistemática
Oswald	Teoría $L^p$	Procesamiento señales	Ánalysis de estabilidad

Quisiéramos terminar esta sección enfatizando la existencia de trabajos donde se utilizan esquemas de multirresolución para mejorar la eficiencia computacional de aproximaciones numéricas de EDPs. Si bien es cierto que la no linealidad está en el uso de umbrales no de esquemas no lineales, pudiendo ser esto último una nueva línea de investigación. En este contexto, los esquemas no lineales podrían ser beneficiosos en ejemplos físicos donde aparezcan discontinuidades que se preserven, básicamente fenómenos con ausencia total de difusión.

Bürger *et al.* [16], 2008: este trabajo presenta un esquema multirresolución completamente adaptativo para ecuaciones parabólicas fuertemente degeneradas en una dimensión espacial. Se basa en volúmenes finitos y emplea una representación multirresolución almacenada en un árbol graduado. El método mejora drásticamente el rendimiento computacional (CPU y memoria), manteniendo convergencia hacia soluciones de entropía.

Coquel *et al.* [20], 2006: en el contexto de flujos multicomponentes con ondas de dispar velocidad, proponen una estrategia híbrida (explícito e implícito) combinada con un esquema multirresolución completamente adaptativo. Esto permite una malla adaptativa basada en la suavidad del fenómeno, reduciendo así el coste computacional sin sacrificar la precisión.

## 6. Teorías desarrolladas para el análisis teórico de esquemas de subdivisión no lineales

El análisis de los esquemas de subdivisión lineales está bien establecido mediante herramientas como la transformada de Fourier, el análisis matricial y los métodos basados en los símbolos. Estas técnicas permiten caracterizar con precisión la convergencia, el orden de aproximación y la regularidad  $C^k$  en términos espectrales. Sin embargo, los esquemas no lineales rompen la superposición y, con ella, gran parte del andamiaje clásico:

- **Ausencia de superposición.** La respuesta a una combinación lineal de datos no es la combinación lineal de las respuestas, lo que invalida argumentos espectrales directos.
- **Dependencia del contexto.** Las reglas locales pueden depender de la geometría o del estado de los datos (selecciones ENO, medias no lineales, normalizaciones), generando dinámicas no uniformes.
- **Datos con valores no euclidianos.** Muchas aplicaciones requieren datos en variedades, esferas o grupos de Lie, donde los cálculos dependen de la geometría subyacente.
- **Propiedades de forma.** Positividad, monotonía o convexidad (y sus análogos en variedades) pasan a ser restricciones esenciales que los polinomios lineales no siempre preservan; los esquemas no lineales se diseñan, a menudo, para respetarlas.

Se han desarrollado distintas aproximaciones teóricas para el estudio de esquemas de subdivisión no lineales. Una primera línea la constituyen los esquemas geométricos, en los que las reglas de refinamiento comutan con similitudes y permiten descomponer la dinámica en componentes invariantes, de modo que el control de la distorsión relativa durante las iteraciones conduce a resultados de rectificación y a garantías de regularidad de tipo Hölder. Otra aproximación se basa en la proximidad diferencial frente a un esquema lineal de referencia, lo que permite transferir suavidad, orden de aproximación y estabilidad del modelo lineal al no lineal siempre que se cumplan ciertas condiciones de compatibilidad en derivadas discretas. En contextos más generales, como variedades, esferas, grupos de Lie o espacios métricos, el análisis recurre a herramientas geométricas intrínsecas como contracciones, comparaciones de curvatura y desarrollos geodésicos, que proporcionan criterios de convergencia y regularidad en entornos no euclidianos. Finalmente, en esquemas quasi lineales o aquellos basados en medias no lineales, la selección dependiente de los datos requiere técnicas específicas que combinan estabilidad, proximidad y control de variación total, incluyendo además condiciones estructurales para garantizar el buen comportamiento en mallas irregulares. En conjunto, todas estas teorías persiguen como objetivos centrales la convergencia, la regularidad y el orden de aproximación en un marco no lineal y no necesariamente euclíadiano, constituyendo un área de investigación activa.

A continuación, repasaremos algunas de estas teorías:

- Regularidad hölderiana para esquemas de subdivisión geométrica, T. Ewald, U. Reif, M. Sabin, [34], 2015.

Este artículo presenta un marco teórico para analizar esquemas de subdivisión no lineales con valores en  $\mathbb{R}^d$ , donde los esquemas son geométricos en el sentido de que commutan con las similitudes en  $\mathbb{R}^d$ . El objetivo principal es establecer la regularidad  $C^{1,\alpha}$  para esquemas arbitrarios de este tipo y  $C^{2,\alpha}$  para un subconjunto importante de ellos, incluyendo todos los esquemas con valores reales. La clave está en determinar el rango de ciertas funciones reales para garantizar la convergencia del esquema y la regularidad de Hölder de las curvas límite.

Los esquemas de subdivisión univariados definen una curva como el límite de un proceso de refinamiento a partir de un polígono de control inicial. En este trabajo, se consideran esquemas geométricos que commutan con transformaciones de similitud, es decir, la transformación:

$$S(p) = \lambda pQ + s$$

donde  $\lambda$  es un factor de escala,  $Q$  una matriz ortogonal y  $s$  un vector de traslación. Este tipo de esquemas se clasifican como GLUE-schemes (Geometric, Local, Uniform, Equilinear).

Para medir la desviación de un conjunto de puntos respecto a un comportamiento lineal, se introduce el concepto de distorsión relativa, definida como:

$$\kappa(p) = \frac{|p|_2}{|\Pi p|_1},$$

donde  $\Pi$  es la proyección ortogonal y  $|\cdot|_i$  es norma euclídea  $\ell^i$  en  $\mathbb{R}^d$ . Un esquema de subdivisión está rectificado si la distorsión relativa de la sucesión de puntos converge a cero.

La regularidad  $C^{1,\alpha}$  se alcanza si las curvas límite generadas por el esquema son diferenciables con derivada localmente Hölder continua. Esto se puede verificar garantizando que la distorsión relativa decae con un factor  $2^{-\alpha}$  en cada iteración del esquema:

$$\kappa(p_{n+1}) \leq C2^{-\alpha n}.$$

Si esta condición se cumple, el esquema se considera fuertemente rectificado.

Este trabajo proporciona un marco general para analizar la regularidad de esquemas de subdivisión geométricos y garantiza la regularidad  $C^{1,\alpha}$  y  $C^{2,\alpha}$  bajo ciertas condiciones. Los resultados son aplicables a una amplia gama de algoritmos geométricos.

- Condición de proximidad para la suavidad en esquemas de subdivisión no lineales: Tom Duchamp, Gang Xie, Thomas Yu, [26], 2013.

Este artículo presenta una condición necesaria y suficiente para la equivalencia en la suavidad de esquemas de subdivisión no lineales respecto a esquemas de subdivisión lineales. El análisis se basa en la introducción de una nueva condición de proximidad diferencial. El problema abordado es determinar cuándo un esquema de subdivisión no lineal hereda la regularidad de su contraparte lineal.

Un esquema de subdivisión  $S$  es una transformación que actúa sobre secuencias  $x = (x_i)$  con valores en una variedad suave  $M$ . Si  $S$  es un esquema de subdivisión  $C^k$ , existe una función  $C^k$  que interpola los datos de control definidos por  $x$ .

Para comparar la suavidad entre un esquema de subdivisión no lineal  $S$  y su versión lineal  $S_{\text{lin}}$ , se introduce la condición de proximidad diferencial, que se expresa mediante derivadas parciales de la siguiente forma:

$$D^\nu \Phi_\sigma|_{(\delta_0, 0, \dots, 0)} = 0, \quad \text{si } |\nu| \geq 2 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^K j \nu_j \leq k,$$

donde  $\nu$  es un multiíndice que determina el orden de las diferencias finitas, y  $k$  es el grado de suavidad del esquema. La condición de proximidad diferencial garantiza que, hasta el orden de suavidad  $k$ , el comportamiento local del esquema no lineal es indistinguible del lineal.

El artículo también presenta la condición de compatibilidad suave, que asegura que el esquema no lineal  $S$  y el esquema lineal  $S_{\text{lin}}$  comparten ciertos factores locales y de fase.

Finalmente, se demuestra que la condición de proximidad diferencial es tanto necesaria como suficiente para que el esquema de subdivisión  $S$  sea  $C^k$ -suave si el esquema lineal correspondiente  $S_{\text{lin}}$  es  $C^k$ -suave. Los resultados son probados utilizando expansiones de Taylor y análisis de resonancia en sistemas dinámicos discretos.

- Análisis de convergencia de esquemas de subdivisión sobre la esfera: Svenja Hüning, Johannes Wallner, [48], 2022.

Este artículo analiza la convergencia de procesos de subdivisión en la esfera, un campo relevante en geometría computacional y procesamiento de gráficos 3D. Los autores investigan esquemas de subdivisión que operan sobre superficies esféricas en lugar de superficies planas, centrándose en su convergencia y propiedades numéricas. El análisis incluye la introducción de herramientas que permiten la estabilidad de los algoritmos, así como un estudio detallado de las características geométricas y la regularidad de las superficies generadas.

- Análisis  $C^1$  de esquemas de subdivisión tipo Hermite sobre variedades: Caroline Moosmüller, [56], 2016.

Este trabajo presenta un análisis detallado de la suavidad  $C^1$  de los esquemas de subdivisión de Hermite en variedades. Los esquemas de subdivisión de Hermite son utilizados para generar curvas y superficies suaves a partir de datos vectoriales y escalares. En este contexto, se exploran las propiedades de suavidad de las curvas generadas cuando los puntos de control residen en una variedad geométrica. El artículo proporciona un marco teórico para entender cómo los esquemas de subdivisión pueden aplicarse a estructuras geométricas más generales que los espacios euclidianos, y estudia su convergencia y regularidad en este contexto.

- Convergencia de esquemas de refinamiento sobre espacios métricos: Oliver Ebner, [33], 2013.

Este trabajo investiga la convergencia de esquemas de refinamiento en espacios métricos. Los esquemas de refinamiento son algoritmos iterativos utilizados para mejorar la resolución de una señal o conjunto de datos. El autor estudia cómo estos esquemas convergen en el marco general de espacios métricos, lo que extiende el análisis de esquemas de subdivisión a contextos más abstractos que los tradicionales espacios euclidianos. El artículo proporciona condiciones bajo las cuales los esquemas garantizan convergencia y analiza su comportamiento en diversos tipos de espacios métricos.

- Propiedad de invarianza de las condiciones de proximidad en subdivisión no lineal: Gang Xie, Thomas P. Y. Yu, [69], 2012.

Este trabajo explora la propiedad de invariancia en condiciones de proximidad dentro de los esquemas de subdivisión no lineales. Los autores analizan cómo los esquemas no lineales preservan la proximidad entre puntos en cada nivel de refinamiento, lo que es crucial para garantizar la estabilidad y precisión en la generación de curvas o superficies suaves. El artículo desarrolla condiciones específicas bajo las cuales esta propiedad se mantiene, proporcionando una base teórica sólida para el uso de esquemas no lineales en aplicaciones prácticas como el modelado geométrico y el procesamiento de imágenes.

- Propiedades de equivalencia en el orden de aproximación de esquemas de subdivisión sobre variedades: Gang Xie, Thomas P.-Y. Yu, [68], 2012.

Este artículo investiga las propiedades de equivalencia del orden de aproximación en esquemas de subdivisión de datos valorados en variedades. Los esquemas de subdivisión tradicionales operan en el espacio euclídeo, pero este trabajo extiende su aplicabilidad a datos en variedades geométricas. Los autores demuestran que, bajo ciertas condiciones, los órdenes de aproximación de los esquemas de subdivisión para datos en variedades pueden ser equivalentes a los de datos en espacios euclidianos, lo que tiene implicaciones importantes para la interpolación y el procesamiento de datos geométricos.

- Regularidad de esquemas de subdivisión no lineales y no separables: Basarab Matei, Sylvain Meignen, Anastasia Zakharova, [55] 2011.

Este trabajo analiza la suavidad de esquemas de subdivisión no lineales y no separables. Los autores estudian cómo estos esquemas generan curvas y superficies suaves, incluso en configuraciones donde las propiedades de separación no se cumplen, lo que ocurre en muchos problemas geométricos complejos. Se proporciona un análisis teórico de la convergencia y suavidad de estos esquemas, y se destacan aplicaciones en gráficos por computadora y procesamiento de imágenes, donde es esencial el control de la suavidad en múltiples dimensiones.

- Análisis de una clase de esquemas de subdivisión no lineales y transformaciones de multirresolución asociadas: Sergio Amat, K. Dadourian, Jacques Liandrat, [2], 2011.

Este artículo presenta un análisis detallado de una clase de esquemas de subdivisión no lineales y sus transformaciones multirresolución asociadas. Los autores estudian cómo estos esquemas pueden utilizarse para representar y comprimir señales e imágenes, proporcionando un marco para realizar transformaciones multirresolución que preserven la estructura de los datos originales. Se ofrece un análisis teórico y numérico de la convergencia y estabilidad de los esquemas, mostrando su aplicabilidad en compresión de imágenes y modelado geométrico.

- Orden de aproximación derivado de la estabilidad de esquemas de subdivisión no lineales: Philipp Grohs, [39], 2010.

Este artículo explora el orden de aproximación que se deriva de la estabilidad en esquemas de subdivisión no lineales. El autor establece condiciones bajo las cuales los esquemas de subdivisión no lineales preservan la estabilidad, lo que resulta en un alto orden de aproximación. Este análisis es crucial para aplicaciones donde se requiere una representación precisa de curvas y superficies, como en gráficos computacionales y simulaciones geométricas. El trabajo también ofrece una comparación con esquemas de subdivisión lineales tradicionales, mostrando las ventajas de los enfoques no lineales.

- Esquemas de subdivisión no lineales en mallas irregulares: Andreas Weinmann, [64], 2010.

Este trabajo analiza los esquemas de subdivisión no lineales en mallas irregulares. A diferencia de los esquemas tradicionales que requieren mallas regulares, este estudio aborda cómo los métodos no lineales pueden aplicarse a mallas con geometrías irregulares, comunes en simulaciones numéricas y gráficos computacionales. El autor investiga la convergencia y la estabilidad de estos esquemas, presentando condiciones que garantizan la generación de superficies suaves en mallas irregulares. Este enfoque es particularmente útil en aplicaciones de diseño geométrico y modelado en mallas complejas.

- Estabilidad de subdivisión no lineal y transformaciones multiescala: S. Harizanov, Peter Oswald, [44], 2010.

Este artículo estudia la estabilidad de los esquemas de subdivisión no lineales y las transformaciones multiescala. La estabilidad es un factor clave para garantizar que las soluciones generadas por estos esquemas sean útiles en aplicaciones prácticas, como la compresión de datos o el procesamiento de señales. Los autores analizan diferentes clases de transformaciones y esquemas, proporcionando resultados teóricos sobre cuándo estos métodos mantienen su estabilidad, lo cual es crucial para el refinamiento progresivo de datos o la representación de funciones.

- Un análisis general de la proximidad de esquemas de subdivisión no lineales: Philipp Grohs, [40], 2010.

Este trabajo realiza un análisis general de proximidad en esquemas de subdivisión no lineales. El enfoque de proximidad se refiere a cómo los puntos generados por el esquema de subdivisión se mantienen cercanos a los puntos originales, lo que afecta directamente la precisión y la calidad de las soluciones generadas. El artículo presenta un marco teórico para estudiar esta propiedad, derivando condiciones bajo las cuales los esquemas no lineales garantizan la proximidad en iteraciones sucesivas, lo cual es importante para la interpolación geométrica y la generación de curvas suaves.

- Orden de aproximación de esquemas de subdivisión no lineales: Nira Dyn, Philipp Grohs, Johannes Wallner, [30], 2010.

Este artículo investiga el orden de aproximación de los esquemas de subdivisión no lineales interpolatorios. El orden de aproximación es una medida de la precisión con la que los esquemas de subdivisión pueden aproximar funciones o curvas a medida que se refinan. Los autores desarrollan una teoría que extiende el análisis del orden de aproximación a esquemas no lineales, destacando cómo estos métodos pueden ofrecer mejores resultados que los esquemas lineales tradicionales en aplicaciones de interpolación y modelado geométrico.

- Subdivisión y transformaciones multiescala univariadas, el caso no lineal: Nira Dyn, Peter Oswald, [32], 2009.

Este capítulo explora los esquemas de subdivisión univariados y las transformaciones multiescala en el contexto no lineal. Se estudian los métodos univariados, que trabajan en una sola variable, y cómo las transformaciones multiescala pueden aplicarse de manera no lineal para mejorar la representación de señales y funciones en diferentes niveles de detalle. Los autores analizan la estabilidad y el comportamiento de estos esquemas en el caso no lineal, mostrando aplicaciones en procesamiento de imágenes y compresión de datos.

- Esquemas de subdivisión lineales y no lineales en modelado geométrico: Nira Dyn, [29], 2008.

Este trabajo proporciona una revisión de los esquemas de subdivisión lineales y no lineales en el contexto del modelado geométrico. Nira Dyn describe cómo los esquemas de subdivisión se utilizan para generar curvas y superficies suaves a partir de datos discretos, y compara los enfoques lineales tradicionales con los no lineales, destacando las ventajas de estos últimos en la representación de formas geométricas complejas. El artículo también discute la convergencia y la regularidad de los esquemas de subdivisión, con aplicaciones en gráficos por computadora y diseño asistido por computadora (CAD).

- Dos preguntas abiertas sobre subdivisión: Malcom Sabin, [61], 2009.

Este breve artículo plantea dos preguntas abiertas en el campo de los esquemas de subdivisión. Malcolm Sabin analiza problemas no resueltos relacionados con la convergencia y la regularidad de ciertos esquemas de subdivisión, que son fundamentales para el refinamiento iterativo de curvas y superficies. Estas preguntas son importantes tanto desde un punto de vista teórico como práctico, ya que afectan la eficacia de los esquemas de subdivisión en aplicaciones de gráficos por computadora, diseño de superficies y simulaciones numéricas.

- Regularidad de subdivisión multivariada interpolatoria en grupos de Lie: Philipp Grohs, [38], 2009.

Este artículo aborda la suavidad de los esquemas de subdivisión interpolatorios en grupos de Lie. Los grupos de Lie, que son estructuras algebraicas que describen simetrías continuas, se utilizan en muchas áreas de la matemática y la física. Grohs analiza cómo los esquemas de subdivisión pueden aplicarse a datos en estos grupos, preservando la suavidad y garantizando la convergencia. Este enfoque tiene aplicaciones potenciales en gráficos por computadora, robótica y simulaciones físicas donde se requiere trabajar con datos que residen en grupos de Lie.

- Sobre la regularidad de funciones reales generadas por esquemas de subdivisión usando medias binarias no lineales: Ron Goldman, Etienne Vouga, Scott Schaefer, [36], 2009.

Este trabajo investiga la suavidad de las funciones reales generadas mediante esquemas de subdivisión que emplean promedios binarios no lineales. Los autores analizan cómo la suavidad de las funciones generadas se ve afectada por el tipo de promedio no lineal utilizado en el esquema de subdivisión, proporcionando condiciones matemáticas que garantizan la suavidad. Este estudio es relevante para la creación de curvas y superficies suaves en gráficos por computadora y diseño geométrico.

- Sobre esquemas de subdivisión de Hermite con restricciones: Paolo Costantini, Carla Manni, [21], 2008.

Este artículo aborda los esquemas de subdivisión no lineales de Hermite bajo restricciones. Los esquemas de Hermite permiten el refinamiento de funciones mediante la interpolación de valores y derivadas en puntos de control. Los autores presentan un enfoque no lineal para estos esquemas, garantizando que se respeten ciertas restricciones geométricas o de suavidad. Este trabajo tiene aplicaciones en el diseño de curvas y superficies que requieren precisión en la forma y suavidad, como en gráficos por computadora y CAD.

- Propiedades de equivalencia de suavidad de esquemas generales de subdivisión para datos con valores en variedades: Gang Xie, Thomas P.-Y. Yu, [67], 2009.

Este trabajo examina las propiedades de suavidad de los esquemas de subdivisión aplicados a datos con valores en variedades (manifolds). Los autores investigan cómo los esquemas de subdivisión pueden generar funciones suaves cuando los datos residen en espacios no Euclidianos, como las variedades. Este enfoque es útil en aplicaciones como la robótica, gráficos por computadora y análisis de datos geométricos, donde los datos pueden estar restringidos a variedades específicas.

- Subdivisión no lineal a través de medias no lineales: Scott Schaefer, Etienne Vouga, Ron Goldman, [62], 2008.

Este artículo introduce un esquema de subdivisión no lineal basado en el uso de promedios no lineales. En lugar de utilizar métodos de interpolación lineal tradicionales, los autores desarrollan un enfoque en el que los puntos de control se actualizan mediante una técnica de promediado no lineal, lo que permite obtener subdivisiones más precisas y adaptativas en el diseño de curvas y superficies. Este método tiene aplicaciones en el modelado geométrico y el diseño de formas complejas.

- Análisis de suavidad de esquemas de subdivisión en retículas regulares mediante proximidad: Philipp Grohs, [37], 2008.

Este artículo analiza la suavidad de los esquemas de subdivisión aplicados a datos en redes regulares utilizando una técnica basada en la proximidad. Grohs presenta un enfoque teórico que garantiza que los esquemas de subdivisión conserven la suavidad al aplicarse iterativamente sobre mallas regulares, lo que es crucial para el refinamiento de curvas y superficies en gráficos por computadora y simulaciones numéricas.

- Propiedades de equivalencia de suavidad de esquemas de subdivisión para datos con valores en variedades basados en el enfoque de proyección: Gang Xie, Thomas P.-Y. Yu, [66], 2007.

Este trabajo investiga las propiedades de suavidad de los esquemas de subdivisión aplicados a datos con valores en variedades (manifolds) utilizando el enfoque de proyección. Los

autores demuestran que ciertos esquemas de subdivisión mantienen la suavidad cuando se aplican a datos en espacios geométricos no euclidianos, como las variedades. Este estudio tiene aplicaciones en gráficos por computadora y simulaciones que involucran datos geométricos complejos.

- Tres familias de esquemas de subdivisión no lineales: Nira Dyn, [28], 2006.

Este artículo analiza tres familias de esquemas de subdivisión no lineales. Estos esquemas permiten la generación de curvas y superficies suaves a partir de puntos de control de manera adaptativa. La investigación se centra en cómo las diferentes configuraciones de los esquemas pueden influir en la suavidad y estabilidad de las funciones generadas, proporcionando herramientas útiles para el diseño geométrico y las aplicaciones de simulación que requieren precisión en la forma.

- ¿Cuán dependiente de los datos es un esquema de subdivisión no lineal? Un estudio de caso basado en la preservación de convexidad: Thomas Pok-Yin Yu, [72], 2006.

Este artículo examina la dependencia de los esquemas de subdivisión no lineales en los datos iniciales, utilizando como caso de estudio un esquema que preserva la convexidad. El autor analiza cómo las propiedades de los datos iniciales pueden afectar la convergencia y suavidad del esquema, ofreciendo una comprensión profunda de la influencia de las condiciones iniciales en la calidad de los resultados obtenidos mediante subdivisión no lineal.

- Análisis de suavidad de esquemas de subdivisión mediante proximidad: Johannes Wallner, [63], 2006.

Este trabajo proporciona un análisis detallado de la suavidad de los esquemas de subdivisión mediante el concepto de proximidad. Wallner desarrolla una metodología matemática para medir la suavidad de las funciones generadas por esquemas de subdivisión en relación con su proximidad a funciones suaves conocidas, lo que es relevante para garantizar la calidad de las curvas y superficies generadas en gráficos por computadora y simulaciones geométricas.

- Suavidad de la subdivisión no lineal por interpolación de la mediana: Peter Oswald, [58], 2004.

Se presenta un análisis refinado de la regularidad de Hölder para las funciones límite que surgen de un algoritmo piramidal no lineal para la eliminación robusta del ruido no gaussiano propuesto por Donoho y Yu [6,7,17]. La parte de síntesis de este algoritmo se puede interpretar como un esquema de subdivisión tríada no lineal donde se insertan nuevos puntos basándose en la interpolación e imputación de la mediana polinómica cuadrática local. Introducimos la analogía del esquema Donoho-Yu para el refinamiento diádico.

- Esquemas de subdivisión quasi lineales con aplicación a la interpolación ENO: Albert Cohen, Nira Dyn, Basarab Matei, [19], 2003.

Se analiza la convergencia y suavidad de cierta clase de esquemas de subdivisión no lineales.

Se estudia las propiedades de estabilidad de estos esquemas y aplicamos este análisis a la clase específica basada en técnicas de interpolación ENO y ENO ponderada. Nuestro interés en estas técnicas está motivado por su aplicación al procesamiento de señales e imágenes.

Los trabajos [26, 30, 37, 40, 63, 69] articulan el puente entre no lineal y lineal mediante proximidad diferencial; [34] proporciona una vía independiente basada en invariancia geométrica y rectificación. En dominios no euclidianos ([33, 38, 48, 56, 66, 67]) la convergencia se asienta en contracciones y en el control de la geometría; [64] extiende a mallas irregulares. Las familias con medias no lineales o selecciones del esténcil tipo ENO ([19, 32, 36, 44, 58, 62]) se basan en contracciones de esquemas para las diferencias; [39] conecta estabilidad con orden de aproximación. Las revisiones [29, 61] identifican huecos y preguntas abiertas sobre optimalidad y robustez.

Tabla 5: Comparativa cruzada de referencias: ámbito, objetivo principal y herramienta analítica dominante.

Referencia	Ámbito de datos	Objetivo principal	Herramienta analítica dominante
Ewald–Reif–Sabin [34]	$\mathbb{R}^d$ (geométrico, GLUE)	$C^{1,\alpha}/C^{2,\alpha}$ y rectificación	Distorsión relativa, invariancia a similitudes
Duchamp–Xie–Yu [26]	No lineal vs. lineal	Equivalencia de suavidad $C^k$	Proximidad diferencial al esquema lineal
Hüning–Wallner [48]	Esfera	Convergencia/estabilidad	Geometría esférica, contracciones
Moosmüller [56]	Variedades (Hermite)	$C^1$	Ánálisis Hermite en variedades
Ebner [33]	Espacios métricos	Convergencia	Contracciones en métricas
Xie–Yu [69]	No lineal vs. lineal	Invariancia de proximidad	Proximidad e invariancias
Xie–Yu [68]	Variedades	Orden de aproximación (equivalencia)	Transferencia de orden a variedades
Matei–Meignen–Zakharova [55]	No separable	Regularidad	Estimaciones multivariadas no separables
Amat–Dadourian–Liandrat [2]	Señal/imagen	Convergencia/estabilidad multirresolución	Ánálisis de transformaciones asociadas
Grohs [39]	General	Orden desde estabilidad	Estabilidad $\Rightarrow$ orden
Weinmann [64]	Malla irregular	Convergencia/estabilidad	Condiciones estructurales en mallas
Harizanov–Oswald [44]	Multiescala	Estabilidad	Ánálisis multiescala no lineal
Grohs [40]	General	Proximidad (marco general)	Proximidad/transferencia de suavidad
Dyn–Grohs–Wallner [30]	General	Orden de aproximación	Proximidad y estimaciones de error
Dyn–Oswald [32]	Univar., no lineal	Multiescala y estabilidad	Marco multiescala no lineal
Dyn [29]	Revisión	Estado del arte	Síntesis crítica
Sabin [61]	Revisión breve	Preguntas abiertas	Problemas de convergencia/regularidad
Grohs [38]	Grupos de Lie	Suavidad interpolatoria	Geometría de grupos de Lie
Goldman–Vouga–Schaefer [36]	Medias no lineales	Suavidad de funciones reales	Promedios no lineales y suavidad
Costantini–Manni [21]	Hermite con restricciones	Suavidad bajo restricciones	Ánálisis con restricciones
Xie–Yu [67]	Variedades	Equivalencia de suavidad	Proximidad en variedades
Schaefer–Vouga–Goldman [62]	Medias no lineales	Subdivisión no lineal	Estructuras de promedio no lineal
Grohs [37]	Reticulas regulares	Suavidad vía proximidad	Proximidad en mallas regulares
Xie–Yu [66]	Variedades (proyección)	Suavidad por proyección	Enfoques de proyección
Dyn [28]	Tres familias NL	Clasificación	Taxonomía de familias NL
Yu [72]	Dependencia de datos	Preservación de convexidad	Sensibilidad a datos iniciales
Wallner [63]	General	Suavidad vía proximidad	Marco de proximidad
Oswald [58]	Mediana no lineal	Regularidad Hölder	Ánálisis del esquema Donoho–Yu
Cohen–Dyn–Matei [19]	Quasi lineal / ENO	Conv./suavidad ENO/WENO	Estabilidad + proximidad en ENO

## 7. Conclusiones

Los esquemas de subdivisión no lineales representan una extensión poderosa de los métodos lineales tradicionales, ofreciendo flexibilidad y capacidad de adaptación en una amplia gama de aplicaciones, especialmente en el manejo de datos irregulares y la preservación de características geométricas. Su aplicación en variedades, la mitigación de oscilaciones de Gibbs y la preservación de formas geométricas como círculos y esferas demuestra su versatilidad y eficacia en situaciones donde los enfoques lineales no son suficientes.

Del análisis comparado se desprende una clasificación natural de los trabajos:

1. **Geométricos:** centrados en la preservación de formas e invariancias (círculos, esferas).
2. **Adaptativos:** diseñados para manejar irregularidades o discontinuidades.
3. **Multiescala:** conectados a ondículas y compresión en múltiples resoluciones.
4. **Teóricos:** orientados al estudio de convergencia, estabilidad y regularidad.

Esta taxonomía permite visualizar la evolución del campo y resaltar vacíos actuales.

La selección bibliográfica responde a dos criterios principales: (i) representatividad de los métodos más influyentes en cada línea de investigación que cubren las diferentes áreas de interés en el contexto de esquemas de subdivisión, y (ii) diversidad en cuanto a las aplicaciones que se consideran (modelado geométrico, procesamiento de imágenes, aproximación).

Existen trabajos de revisión de esquemas no lineales previos pero no hemos encontrado ninguno que sea tan global como la presente revisión. Introducimos las cuatro aportaciones que hemos encontrado y que pueden considerarse revisiones parciales. En [29], Dyn nos presenta una panorámica sobre los esquemas de subdivisión en modelado geométrico, distinguiendo entre los enfoques lineales y no lineales, revisando la teoría clásica (convergencia, suavidad y orden de aproximación) y destacando cómo los esquemas no lineales permiten preservar propiedades geométricas como positividad, monotonía o convexidad. Por su parte, Dyn y Oswald [32] estudian el caso univariante en relación con las transformaciones multiescala, extendiendo herramientas lineales al marco no lineal y analizando estabilidad, contracción y orden de aproximación en contextos adaptativos. Micchelli [35] investiga los esquemas estacionarios no lineales, estableciendo un marco matemático para su convergencia y regularidad, con aplicaciones a problemas de interpolación y aproximación geométrica. Finalmente, Aràndiga y Donat [12] desarrollan el enfoque de Harten para descomposiciones multiescala no lineales, mostrando cómo éstas permiten representaciones estables y adaptativas en el análisis numérico de ecuaciones hiperbólicas y en el procesamiento de señales.

Aunque se han hecho avances importantes en el desarrollo y aplicación de estos esquemas, el análisis de los esquemas no lineales sigue siendo un desafío debido a su complejidad matemática.

Aún queda mucho por explorar en términos de eficiencia computacional y aplicaciones en datos de mayor dimensión.

Entre las líneas abiertas de investigación podríamos destacar:

- Extender los esquemas a contextos de datos no euclidianos más complejos (grafos, redes neuronales geométricas).
- Integrar preservación geométrica y adaptación a discontinuidades en un marco único.
- Explorar implementaciones paralelas y en GPU para aplicaciones en tiempo real en gráficos por computadora.
- Profundizar en aplicaciones de multirresolución no lineal en la resolución numérica de EDPs de interés físico.
- Desarrollar criterios automáticos de selección de parámetros (ej. tensión, pesos adaptativos) guiados por aprendizaje automático.

## Referencias

- [1] S. Amat, A. Choutri, J. Ruiz, y S. Zouaoui, “On a nonlinear 4-point ternary and non-interpolatory subdivision scheme eliminating the Gibbs phenomenon,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 320, pp. 16–26, 2018, doi: 10.1016/j.amc.2017.08.055.
- [2] S. Amat, K. Dadourian, y J. Liandrat, “Analysis of a class of nonlinear subdivision schemes and associated multiresolution transforms,” *Adv. Comput. Math.*, vol. 34, no. 3, pp. 253–277, 2011, doi: 10.1007/s10444-010-9151-6.
- [3] S. Amat, K. Dadourian, J. Liandrat, J. Ruiz, y J. C. Trillo, “A family of stable nonlinear nonseparable multiresolution schemes in 2D,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 234, no. 4, pp. 1277–1290, 2010, doi: 10.1016/j.cam.2009.10.003.
- [4] S. Amat y J. Liandrat, “On a nonlinear 4-point quaternary approximating subdivision scheme eliminating the Gibbs phenomenon,” *SeMA J.*, vol. 62, pp. 15–25, 2013, doi: 10.1007/s40324-013-0006-1.
- [5] S. Amat, F. Aràndiga, A. Cohen, R. Donat, G. Garcia, y M. von Oehsen, “Data compression with ENO schemes: a case study,” *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 11, no. 2, pp. 273–288, 2001, doi: 10.1006/acha.2001.0356.
- [6] S. Amat, F. Aràndiga, A. Cohen, y R. Donat, “Tensor product multiresolution analysis with error control for compact image representation,” *Signal Processing*, vol. 82, no. 4, pp. 587–608, 2002, doi: 10.1016/S0165-1684(01)00206-7.
- [7] S. Amat, S. Busquier, y J. C. Trillo, “On multiresolution schemes using a stencil selection procedure: applications to ENO schemes,” *Numer. Algorithms*, vol. 44, no. 1, pp. 45–68, 2007, doi: 10.1007/s11075-007-9083-5.
- [8] S. Amat, R. Donat, J. Liandrat, y J. C. Trillo, “Analysis of a new nonlinear subdivision scheme. Applications in image processing,” *Found. Comput. Math.*, vol. 6, no. 2, pp. 193–225, 2006, doi: 10.1007/s10208-004-0122-5.
- [9] S. Amat, J. Liandrat, J. Ruiz, y J. C. Trillo, “On a nonlinear cell-average multiresolution scheme for image compression,” *SeMA J.*, no. 60, pp. 75–92, 2012, doi: 10.1007/bf03391711.
- [10] S. Amat, J. Ruiz, J. C. Trillo, y D. F. Yáñez, “On a stable family of four-point nonlinear subdivision schemes eliminating the Gibbs phenomenon,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 354, pp. 310–325, 2019, doi: 10.1016/j.cam.2018.04.058.
- [11] S. Amat, J. Ruiz, J. C. Trillo, y D. F. Yáñez, “On a family of non-oscillatory subdivision schemes having regularity  $C^r$  with  $r > 1$ ,” *Numer. Algorithms*, vol. 85, no. 2, pp. 543–569, 2020, doi: 10.1007/s11075-019-00826-3.

- [12] F. Aràndiga y R. Donat, “Nonlinear multiscale decompositions: the approach of A. Harten,” *Numer. Algorithms*, vol. 23, no. 2-3, pp. 175–216, 2000.
- [13] F. Aràndiga, R. Donat, y M. Santágueda, “Weighted-power<sub>p</sub> nonlinear subdivision schemes,” in *Curves and Surfaces*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012, pp. 109–129, doi: 10.1007/978-3-642-27413-8\_7.
- [14] M. Aslam, “(2n – 1)-point nonlinear ternary interpolating subdivision schemes,” *Int. J. Appl. Math.*, vol. 31, no. 3, pp. 413–425, 2018, doi: 10.12732/ijam.v31i3.9.
- [15] M. Aslam, “A family of 5-point nonlinear ternary interpolating subdivision schemes with  $C^2$  smoothness,” *Math. Comput. Appl.*, vol. 23, no. 2, 2018, Art. ID 18, doi: 10.3390/mca23020018.
- [16] R. Bürger, R. Ruiz, K. Schneider, y M. Sepúlveda, “Fully adaptive multiresolution schemes for strongly degenerate parabolic equations in one space dimension,” *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, vol. 42, no. 4, pp. 535–563, 2008, doi: 10.1051/m2an:2008016.
- [17] P. Chalmovianský y B. Jüttler, “A non-linear circle-preserving subdivision scheme,” *Adv. Comput. Math.*, vol. 27, no. 4, pp. 375–400, 2007, doi: 10.1007/s10444-005-9011-y.
- [18] F. Cirak y Q. Long, “Subdivision shells with exact boundary control and non-manifold geometry,” *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 88, no. 9, pp. 897–923, 2011, doi: 10.1002/nme.3206.
- [19] A. Cohen, N. Dyn, y B. Matei, “Quasilinear subdivision schemes with applications to ENO interpolation,” *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 15, no. 2, pp. 89–116, 2003, doi: 10.1016/S1063-5203(03)00061-7.
- [20] F. Coquel, M. Postel, N. Poussineau, y Q. H. Tran, “Multiresolution technique and explicit-implicit scheme for multicomponent flows,” *J. Numer. Math.*, vol. 14, no. 3, pp. 187–216, 2006, doi: 10.1163/156939506778658294.
- [21] P. Costantini y C. Manni, “On constrained nonlinear Hermite subdivision,” *Constr. Approx.*, vol. 28, no. 3, pp. 291–331, 2008, doi: 10.1007/s00365-007-9001-z.
- [22] M. Cotronei, C. Moosmüller, T. Sauer, y N. Sissouno, “Hermite multiwavelets for manifold-valued data,” *Adv. Comput. Math.*, vol. 49, no. 3, 2023, Art. ID 40.
- [23] C. de Boor, “Preserving geometric features in nonlinear subdivision,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 34, no. 5, pp. 1605–1622, 1997.
- [24] R. A. DeVore y A. Kunoth, Eds., *Multiscale, nonlinear and adaptive approximation*. Springer-Verlag, Berlin, 2009, doi: 10.1007/978-3-642-03413-8.

- [25] R. Donat, S. López-Ureña, y M. Santágueda, “A family of non-oscillatory 6-point interpolatory subdivision schemes,” *Adv. Comput. Math.*, vol. 43, no. 4, pp. 849–883, 2017, doi: 10.1007/s10444-016-9509-5.
- [26] T. Duchamp, G. Xie, y T. Yu, “Single basepoint subdivision schemes for manifold-valued data: time-symmetry without space-symmetry,” *Found. Comput. Math.*, vol. 13, no. 5, pp. 693–728, 2013, doi: 10.1007/s10208-013-9144-1.
- [27] T. Duchamp, G. Xie, y T. Yu, “A necessary and sufficient proximity condition for smoothness equivalence of nonlinear subdivision schemes,” *Found. Comput. Math.*, vol. 16, no. 5, pp. 1069–1114, 2016, doi: 10.1007/s10208-015-9268-6.
- [28] N. Dyn, “Three families of nonlinear subdivision schemes,” in *Topics in multivariate approximation and interpolation*, ser. Stud. Comput. Math. Elsevier B. V., Amsterdam, 2006, vol. 12, pp. 23–38, doi: 10.1016/S1570-579X(06)80003-0.
- [29] N. Dyn, “Linear and nonlinear subdivision schemes in geometric modeling,” in *Foundations of computational mathematics, Hong Kong 2008*, ser. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009, vol. 363, pp. 68–92.
- [30] N. Dyn, P. Grohs, y J. Wallner, “Approximation order of interpolatory nonlinear subdivision schemes,” *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 233, no. 7, pp. 1697–1703, 2010.
- [31] N. Dyn, D. Levin, y M. S. Floater, “Nonlinear subdivision schemes and their applications,” in *Geometric Modeling and Computing*. Springer, 2002, pp. 1–24.
- [32] N. Dyn y P. Oswald, “Univariate subdivision and multi-scale transforms: the nonlinear case,” in *Multiscale, nonlinear and adaptive approximation*. Springer, Berlin, 2009, pp. 203–247, doi: 10.1007/978-3-642-03413-8\_7.
- [33] O. Ebner, “Convergence of refinement schemes on metric spaces,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 141, no. 2, pp. 677–686, 2013, doi: 10.1090/S0002-9939-2012-11331-0.
- [34] T. Ewald, U. Reif, y M. Sabin, “Hölder regularity of geometric subdivision schemes,” *Constr. Approx.*, vol. 42, no. 3, pp. 425–458, 2015, doi: 10.1007/s00365-015-9305-3.
- [35] M. S. Floater y C. A. Micchelli, “Nonlinear stationary subdivision,” in *Approximation Theory*. CRC Press, Taylor & Francis, 1998, p. 209, doi: 10.1201/9781003064732-14.
- [36] R. Goldman, E. Vouga, y S. Schaefer, “On the smoothness of real-valued functions generated by subdivision schemes using nonlinear binary averaging,” *Comput. Aided Geom. Design*, vol. 26, no. 2, pp. 231–242, 2009, doi: 10.1016/j.cagd.2008.04.004.
- [37] P. Grohs, “Smoothness analysis of subdivision schemes on regular grids by proximity,” *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 46, no. 4, pp. 2169–2182, 2008, doi: 10.1137/060669759.

- [38] P. Grohs, “Smoothness equivalence properties of univariate subdivision schemes and their projection analogues,” *Numer. Math.*, vol. 113, no. 2, pp. 163–180, 2009, doi: 10.1007/s00211-009-0231-9.
- [39] P. Grohs, “Approximation order from stability for nonlinear subdivision schemes,” *J. Approx. Theory*, vol. 162, no. 5, pp. 1085–1094, 2010, doi: 10.1016/j.jat.2009.12.003.
- [40] P. Grohs, “A general proximity analysis of nonlinear subdivision schemes,” *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 42, no. 2, pp. 729–750, 2010, doi: 10.1137/09075963X.
- [41] P. Grohs y J. Wallner, “Log-exponential analogues of univariate subdivision schemes in Lie groups and their smoothness properties,” in *Approximation theory XII: San Antonio 2007*, ser. Mod. Methods Math. Nashboro Press, Brentwood, TN, 2008, pp. 181–190.
- [42] P. Grohs y J. Wallner, “Interpolatory wavelets for manifold-valued data,” *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 27, no. 3, pp. 325–333, 2009, doi: 10.1016/j.acha.2009.05.005.
- [43] A. Guessab, M. Moncayo, y G. Schmeisser, “A class of nonlinear four-point subdivision schemes,” *Adv. Comput. Math.*, vol. 37, no. 2, pp. 151–190, 2012, doi: 10.1007/s10444-011-9199-y.
- [44] S. Harizanov y P. Oswald, “Stability of nonlinear subdivision and multiscale transforms,” *Constr. Approx.*, vol. 31, no. 3, pp. 359–393, 2010, doi: 10.1007/s00365-010-9082-y.
- [45] A. Harten, “Discrete multi-resolution analysis and generalized wavelets,” 1993, vol. 12, no. 1-3, pp. 153–192, doi: 10.1016/0168-9274(93)90117-A.
- [46] A. Harten, “Multiresolution representation of data: a general framework,” *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 33, no. 3, pp. 1205–1256, 1996, doi: 10.1137/0733060.
- [47] V. Hernández-Mederos, J. C. Estrada-Sarlabous, S. R. Morales, e I. Ivriessimtzis, “Curve subdivision with arc-length control,” *Computing*, vol. 86, no. 2-3, pp. 151–169, 2009, doi: 10.1007/s00607-009-0068-1.
- [48] S. Hüning y J. Wallner, “Convergence analysis of subdivision processes on the sphere,” *IMA J. Numer. Anal.*, vol. 42, no. 1, pp. 698–711, 2022, doi: 10.1093/imanum/draa086.
- [49] M. K. Jena, “A Hermite interpolatory subdivision scheme constructed from quadratic rational Bernstein-Bezier spline,” *Math. Comput. Simulation*, vol. 187, pp. 433–448, 2021.
- [50] L. Kobbelt, “Interpolatory subdivision on open quadrilateral nets with arbitrary topology,” *Comp. Graph. Forum*, vol. 15, no. 3, pp. 409–420, 1996, doi: 10.1111/1467-8659.1530409.
- [51] Z. Kui, J. Baccou, y J. Liandrat, “On the coupling of decimation operator with subdivision schemes for multi-scale analysis,” in *Mathematical methods for curves and surfaces*, ser. Lecture Notes in Comput. Sci. Springer, Cham, 2017, vol. 10521, pp. 162–185, doi: 10.1007/978-3-319-67885-6\_9.

- [52] J.-a. Lian, “A new four point circular-invariant corner-cutting subdivision for curve design,” *Appl. Appl. Math.*, vol. 7, no. 1, pp. 464–486, 2012.
- [53] J.-a. Lian, Y. Wang, y Y. Yang, “Circular nonlinear subdivision schemes for curve design,” *Appl. Appl. Math.*, vol. 4, no. 1, pp. 1–12, 2009.
- [54] S. Marschner, “Manifold-based methods in geometric modeling,” *ACM Transactions on Graphics*, vol. 17, no. 2, pp. 149–160, 1998, doi: 10.1145/274279.274282.
- [55] B. Matei, S. Meignen, y A. Zakhrova, “Smoothness of non-linear and non-separable subdivision schemes,” *Asymptot. Anal.*, vol. 74, no. 3-4, pp. 229–247, 2011.
- [56] C. Moosmüller, “ $C^1$  analysis of Hermite subdivision schemes on manifolds,” *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 54, no. 5, pp. 3003–3031, 2016, doi: 10.1137/15M1033459.
- [57] E. Nava-Yazdani y T. P. Y. Yu, “On Donoho’s log-exp subdivision scheme: choice of retraction and time-symmetry,” *Multiscale Model. Simul.*, vol. 9, no. 4, pp. 1801–1828, 2011, doi: 10.1137/100804838.
- [58] P. Oswald, “Smoothness of nonlinear median-interpolation subdivision,” *Adv. Comput. Math.*, vol. 20, no. 4, pp. 401–423, 2004, doi: 10.1023/A:1027315032100.
- [59] P. Oswald, “Nonlinear multi-scale transforms:  $L_p$  theory,” *J. Franklin Inst.*, vol. 349, no. 5, pp. 1619–1636, 2012, doi: 10.1016/j.jfranklin.2011.06.006.
- [60] U. Reif y A. Weinmann, “Clothoid fitting and geometric Hermite subdivision,” *Adv. Comput. Math.*, vol. 47, no. 4, 2021, Art. ID 50, doi: 10.1007/s10444-021-09876-5.
- [61] M. Sabin, “Two open questions relating to subdivision,” *Computing*, vol. 86, no. 2-3, pp. 213–217, 2009, doi: 10.1007/s00607-009-0059-2.
- [62] S. Schaefer, E. Vouga, y R. Goldman, “Nonlinear subdivision through nonlinear averaging,” *Comput. Aided Geom. Design*, vol. 25, no. 3, pp. 162–180, 2008, doi: 10.1016/j.cagd.2007.07.003.
- [63] J. Wallner, “Smoothness analysis of subdivision schemes by proximity,” *Constr. Approx.*, vol. 24, no. 3, pp. 289–318, 2006, doi: 10.1007/s00365-006-0638-3.
- [64] A. Weinmann, “Nonlinear subdivision schemes on irregular meshes,” *Constr. Approx.*, vol. 31, no. 3, pp. 395–415, 2010, doi: 10.1007/s00365-009-9063-1.
- [65] A. Weinmann, “Subdivision schemes with general dilation in the geometric and nonlinear setting,” *J. Approx. Theory*, vol. 164, no. 1, pp. 105–137, 2012, doi: 10.1016/j.jat.2011.09.005.

- [66] G. Xie y T. P.-Y. Yu, “Smoothness equivalence properties of manifold-valued data subdivision schemes based on the projection approach,” *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 45, no. 3, pp. 1200–1225, 2007, doi: 10.1137/060652944.
- [67] G. Xie y T. P.-Y. Yu, “Smoothness equivalence properties of general manifold-valued data subdivision schemes,” *Multiscale Model. Simul.*, vol. 7, no. 3, pp. 1073–1100, 2008, doi: 10.1137/080718723.
- [68] G. Xie y T. P.-Y. Yu, “Approximation order equivalence properties of manifold-valued data subdivision schemes,” *IMA J. Numer. Anal.*, vol. 32, no. 2, pp. 687–700, 2012, doi: 10.1093/imanum/drq046.
- [69] G. Xie y T. P. Y. Yu, “Invariance property of proximity conditions in nonlinear subdivision,” *J. Approx. Theory*, vol. 164, no. 8, pp. 1097–1110, 2012, doi: 10.1016/j.jat.2012.05.001.
- [70] X. Yang, “Normal based subdivision scheme for curve design,” *Comput. Aided Geom. Design*, vol. 23, no. 3, pp. 243–260, 2006, doi: 10.1016/j.cagd.2005.10.001.
- [71] X. Yang, “Point-normal subdivision curves and surfaces,” *Comput. Aided Geom. Design*, vol. 104, 2023, Art. ID 102207, doi: 10.1016/j.cagd.2023.102207.
- [72] T. P.-Y. Yu, “How data dependent is a nonlinear subdivision scheme? A case study based on convexity preserving subdivision,” *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 44, no. 3, pp. 936–948, 2006, doi: 10.1137/050628751.
- [73] Z. Zhang, H. Zheng, J. Zhou, y L. Pan, “A nonlinear generalized subdivision scheme of arbitrary degree with a tension parameter,” *Adv. Difference Equ.*, 2020, Art. ID 655, doi: 10.1186/s13662-020-03118-6.

C O M P E N D I O

## Estabilidad espectral y resonancias para perturbaciones de rango finito y singulares

M. ANGÉLICA ASTABURUAGA<sup>1</sup> 

VÍCTOR H. CORTÉS<sup>1,✉</sup> 

CLAUDIO FERNÁNDEZ<sup>1</sup> 

RAFAEL DEL RÍO<sup>2</sup> 

<sup>1</sup> Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile.

*mastabur@uc.cl*

*vcortes@uc.cl*

*cfernand@mat.uc.cl*

<sup>2</sup> IIMAS, Universidad Nacional

Autónoma de México, México.

*delriomagia@gmail.com*

### RESUMEN

En estas notas resumimos una serie de artículos dedicados a perturbaciones de operadores de variadas clases, entre ellos operadores diferenciales. En dichos artículos se estudian propiedades espectrales, con énfasis en la estabilidad de los valores propios y la ausencia de cierto espectro singular. Estas perturbaciones son de diferente naturaleza, incluyendo rango finito y el caso singular.

También se caracteriza y demuestra el fenómeno de resonancia desde el punto de vista dinámico, es decir, la existencia de estados que tienen larga vida y para los cuales la amplitud de supervivencia tiene un comportamiento casi exponencial. Además se incluye una discusión de acerca de varios problemas abiertos en el área.

**Palabras clave:** Resonancias, estabilidad espectral, perturbaciones de rango finito.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 81Q10, 47A35, 47B47.

Publicado: 30 de octubre de 2025

Aceptado: 17 de septiembre de 2025

Recibido: 30 de noviembre de 2024



©2025 M. A. Astaburuaga *et al.* Este artículo de acceso abierto se distribuye bajo la licencia Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International.

S U R V E Y

# Spectral stability and resonances for finite rank and singular perturbations

M. ANGÉLICA ASTABURUAGA<sup>1</sup> 

VÍCTOR H. CORTÉS<sup>1,✉</sup> 

CLAUDIO FERNÁNDEZ<sup>1</sup> 

RAFAEL DEL RÍO<sup>2</sup> 

<sup>1</sup> *Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile.*

*mastabur@uc.cl*

*vcortes@uc.cl✉*

*cfernand@mat.uc.cl*

<sup>2</sup> *IIMAS, Universidad Nacional*

*Autónoma de México, México.*

*delriomagia@gmail.com*

## ABSTRACT

In these notes, we summarize a series of papers devoted to perturbations of operators of several classes, among them differential operators. The articles mentioned before, study spectral properties, with special emphasis on the stability of the eigenvalues and the absence of a certain singular spectrum. These perturbations are of a different nature, including finite rank and the singular case.

We also characterize and prove the resonance phenomenon from a dynamical point of view, that is, the existence of states with long life and for which the survival amplitude has an almost exponential behavior.

In addition, we include a discussion about several open problems in the area.

**Keywords and Phrases:** Resonances, spectral stability, finite rank perturbations.

**2020 AMS Mathematics Subject Classification:** 81Q10, 47A35, 47B47.

Published: 30 October, 2025

Accepted: 17 September, 2025

Received: 30 November, 2024



©2025 M. A. Astaburuaga *et al.* This open access article is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

## 1. Introducción

Como un reconocimiento a su contribución, y en el marco del 40º aniversario de la revista Cubo, presentamos este artículo compendio de varios trabajos, principalmente de la última década.

La teoría espectral de operadores autoadjuntos es una parte esencial de la Física Matemática, particularmente de la Mecánica Cuántica. Muchas veces estos operadores surgen como perturbaciones pequeñas de un operador dado (el Hamiltoniano libre). En general, aquí consideramos perturbaciones de rango finito e incluimos casos regulares y casos singulares.

La naturaleza y estabilidad del espectro, en especial de sus componentes puntual, absolutamente continuo y singular, bajo pequeñas perturbaciones, ha sido objeto de intensas investigaciones, tanto por su conexión con la estabilidad de sistemas físicos cuánticos como por sus implicaciones en el análisis de fenómenos de resonancia cuántica.

En este artículo, revisamos diversos resultados obtenidos en trabajos previos que analizan las propiedades espetrales de operadores de este tipo. Estos estudios han demostrado que, aunque la perturbación de un operador con espectro exento de parte singular genera cambios en el espectro, los efectos de estas perturbaciones suelen estar relacionados con la aparición de resonancias y variaciones en las frecuencias de los modos espetrales del sistema. En particular, se han identificado condiciones bajo las cuales las perturbaciones de rango finito modifican el espectro del operador base, pero sin introducir nuevas singularidades en el espectro resultante.

Además, discutimos la conexión entre estas propiedades espetrales y una formulación dinámica del fenómeno de resonancia cuántica, en la cual se exploran las interacciones entre los operadores perturbados y los estados del sistema cuántico, y cómo estas interacciones pueden llevar a la aparición de picos resonantes en el espectro, los que se traducen en un comportamiento exponencial aproximado de la llamada amplitud de probabilidad. Las resonancias cuánticas juegan un papel fundamental en la descripción de procesos de transición entre estados cuánticos, lo que tiene aplicaciones en el estudio de sistemas dinámicos y en la predicción del comportamiento del sistema a largo plazo.

En el transcurso de este compendio, abordaremos tanto los resultados teóricos más relevantes como los métodos matemáticos empleados para el análisis espectral de estos operadores, con el objetivo de ofrecer una visión integral de cómo las perturbaciones de rango finito influyen en la estructura espectral y, a su vez, cómo esta influencia se relaciona con el comportamiento dinámico de sistemas cuánticos en resonancia.

### 1.1. Valores propios inmersos

Este artículo se sitúa dentro del marco de la teoría espectral, parte central del análisis funcional. El espectro de un operador describe los valores asociados con el comportamiento de este operador y tiene una influencia importante en muchas áreas de las matemáticas y la física.

La “perturbación” en este contexto se refiere a una pequeña modificación del operador, es decir, un cambio que se puede considerar de “tamaño pequeño”. La idea general consiste en determinar cómo los valores propios (o el espectro en general) de un operador cambian cuando el operador es alterado de esta manera. Esto involucra conceptos como la variación de los valores propios, los efectos en la estructura espectral, y las condiciones bajo las cuales un espectro se desplaza o se distorsiona de manera controlable.

Algunos de los resultados que siguen están motivados por el artículo [10] donde se desarrolla una serie de ideas acerca de cómo un pequeño cambio en un operador afecta su espectro puntual y su espectro continuo, además de demostrar la existencia de subespacios en los cuales el operador no tiene componente singular. Dicho artículo está relacionado con la teoría de Weyl acerca de perturbaciones de espectros.

Además del estudio de la estabilidad de las componentes del espectro, también se consideran situaciones en las que una pequeña perturbación hace desaparecer un autovalor del operador no perturbado. Específicamente cuando dicho autovalor esté inmerso en espectro continuo, aún cuando también es interesante la situación en que sea aislado.

Al desaparecer, el valor propio se transforma en realidad en una resonancia, que es una especie de valor propio generalizado. Este tema ha sido objeto de muchas investigaciones en las últimas décadas, mencionamos por ejemplo [11] y las referencias que allí aparecen.

### 1.2. Introducción al fenómeno de resonancia

El fenómeno de resonancia aparece en varias áreas de la física y las matemáticas como la Mecánica Clásica, Cuántica y Ondulatoria. Se han hecho varios intentos para darle una descripción matemática precisa. Nos remitimos a [17] para una discusión sobre las dificultades que surgen al caracterizar rigurosamente el concepto de resonancia para sistemas autónomos en Mecánica Cuántica.

Uno de los enfoques más fructíferos consiste en definir las resonancias cuánticas como polos de una continuación meromorfa adecuada de la resolvente del hamiltoniano, desde el semiplano complejo superior hasta el semiplano inferior. Cada polo aparece como un “valor propio” con parte imaginaria negativa, correspondiente a funciones propias generalizadas fuera del espacio de Hilbert. Existe una gran cantidad de literatura sobre este tema y remitimos al lector al texto [11] y las referencias que allí aparecen.

Las resonancias también se pueden caracterizar en términos de un decaimiento exponencial de la evolución temporal del sistema gobernado por el hamiltoniano (definido como un operador autoadjunto en algún espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ ). Este comportamiento se puede rastrear mediante la probabilidad de supervivencia  $P_\varphi$  para algunos estados adecuados  $\varphi$ . Esta cantidad, definida por

$$P_\varphi(t) = |\langle \varphi, e^{-iHt} \varphi \rangle|^2,$$

mide la probabilidad de encontrar en el instante  $t$  el sistema gobernado por el hamiltoniano  $H$  en su estado inicial  $\varphi$ . Por un lado, sabemos que el decrecimiento exponencial exacto es imposible para muchos modelos de interés físico; ver [17]. Por otro lado, si  $z = \lambda - i\Gamma$  (con  $\Gamma > 0$ ) es un polo de la resolvente del hamiltoniano  $H$  con “función propia resonante”  $\varphi$  (es decir,  $H\varphi = z\varphi$ ), formalmente esperaríamos que,

$$P_\varphi(t) = e^{-2\Gamma t} \|\varphi\|^2,$$

lo cual es incorrecto puesto que la función propia resonante  $\varphi$  no pertenece al espacio de Hilbert. Por lo tanto, en presencia de una resonancia  $z$ , lo mejor que se puede esperar es la existencia de un estado  $\psi \in \mathcal{H}$  tal que la cantidad  $\langle \psi, e^{-iHt} \psi \rangle$  se comporta aproximadamente como  $e^{-izt}$ . Ambas cantidades son iguales a 1 en  $t = 0$  y en la mayoría de los casos de interés, ambas se acercan a cero cuando  $t$  tiende a  $\infty$ . El objetivo principal es entonces estimar la diferencia,

$$\langle \psi, e^{-iHt} \psi \rangle - e^{-izt},$$

para  $t$  no cerca de 0 ni de  $\infty$ .

Para operadores diferenciales, sobre el semieje real, esta diferencia se puede estimar uniformemente en tiempo ([15]) o en norma  $L^2$  ([6]), mediante técnicas EDO. En estos casos, la función  $\psi$  es una función propia resonante truncada. Se han exhibido estimaciones puntuales cuando la resonancia aparece con la perturbación de un valor propio simple inestable incrustado en algún espectro continuo, ver [8] y [13] para una revisión. Los ingredientes principales son en este caso la reducción de Feshbach-Livsic y la regla de oro de Fermi. En [8], este enfoque en realidad se combina con algunas técnicas de comutador positivo (teoría de Mourre) y las estimaciones se obtienen una vez que la función propia se localiza en energía.

La aplicación de Feshbach-Livsic para estudiar resonancias se remonta al menos a [12] y ha sido fuente de varios resultados en las últimas décadas en diferentes áreas.

Para la relación entre la evolución del tiempo (la perspectiva que abordamos en este artículo) y los polos de la resolvente en el contexto de la teoría analítica de la perturbación, mencionamos el trabajo [11] y las referencias contenidas en este último.

## 2. Perturbaciones de rango uno

En el artículo [7] se abordan resonancias generadas por perturbaciones de rango uno de operadores autoadjuntos con valores propios inmersos en el espectro continuo. La inestabilidad de estos valores propios se analiza y se exhibe una caída casi exponencial de los estados resonantes asociados.

Además mostramos cómo estos resultados pueden ser aplicados a los operadores de Sturm-Liouville.

Las herramientas principales son la teoría de Aronszajn-Donoghue para perturbaciones de rango uno, un proceso de reducción del operador resolvente basado en la fórmula de Feshbach-Livsic, la regla de oro de Fermi y un análisis cuidadoso de la transformada de Fourier de funciones cuasi-Lorentzianas. Estos resultados se pueden aplicar también para estimar explícitamente el correspondiente tiempo de estadía y los fenómenos de concentración espectral.

La reducción de Feshbach-Livsic se desarrolla en el contexto de operadores diferenciales en la semirecta, lo que permite obtener estimaciones puntuales cuando la resonancia aparece con la perturbación de un valor propio simple e inmerso en el espectro absolutamente continuo. Aunque varias de estas herramientas pueden adaptarse fácilmente a una clase bastante amplia de perturbaciones, en [7] se limita la discusión al caso de rango uno y se relacionan estos resultados con resultados clásicos en este campo [10, 18].

En la Sección 2 de dicho trabajo se establecen condiciones que aseguren que la transformada de Fourier de una función tipo Lorentz exhiba una caída de tiempo exponencial aproximada. La demostración de este hecho se basa en técnicas de análisis clásico, que siguen principalmente las ideas de [8]. Este resultado es de interés en sí mismo y establece que si una función real está cerca de

$$\frac{1}{\pi} \frac{a}{(\lambda - \lambda_0)^2 + b^2}$$

entonces su Transformada de Fourier tiene un comportamiento casi exponencial.

Se consideran en particular, perturbaciones de rango uno de la forma

$$H_\kappa = H_0 + \kappa |\psi\rangle\langle\psi|,$$

donde  $H_0$  tiene un valor propio simple incrustado en algún espectro absolutamente continuo. Mostramos cómo la inestabilidad del valor propio inmerso y las propiedades espectrales de los operadores  $H_\kappa$  están relacionadas con los valores límite de la resolvente reducida de  $H_0$  y la regla de oro de Fermi.

Lo anterior permite formalizar la existencia de una resonancia en términos de decaimiento casi exponencial, bajo hipótesis adecuadas sobre la resolvente reducida del operador  $H_0$ . La prueba combina el proceso de reducción de Feshbach-Livsic y la fórmula de Krein con el teorema que estima la Transformada de Fourier de una función cuasi-Lorentziana.

Como corolario, se deduce la concentración espectral de Kato y el comportamiento asintótico para el tiempo de estadía del estado propio correspondiente, en función del parámetro  $\kappa$ , bajo la evolución gobernada por  $H_\kappa$  y para valores pequeños de  $\kappa$ . Finalmente, las propiedades de los valores límites de la resolvente reducida de  $H_0$  en el eje real, se deducen de las propiedades de la medida espectral de  $H_0$ , cuando ésta tiene multiplicidad finita. Esta reformulación se resume en la estimación del comportamiento casi exponencial. Todos estos resultados se ilustran mediante un modelo de Sturm-Liouville. En contraste con [8], el punto de vista adoptado no requiere ninguna técnica de conmutador positivo.

### 3. Estimaciones para el tiempo de vida

En el artículo [1] se aborda el estudio de perturbaciones de rango uno aplicadas a operadores autoadjuntos. Se estima cómo estas perturbaciones afectan el tiempo de permanencia de un estado cuántico, especialmente cuando el operador perturbado tiene un valor propio simple incrustado en su espectro absolutamente continuo.

En ese trabajo se analiza cómo una perturbación de rango uno puede alterar significativamente el espectro de un operador autoadjunto, lo que incluye el cambio en la naturaleza de los valores propios incrustados en el espectro continuo. Se utiliza principalmente el Modelo de Friedrichs, en el que se perturba un operador absolutamente continuo en  $L^2(\mathbb{R})$ , por un operador de rango uno  $|\psi\rangle\langle\psi|$ . Para este modelo se estiman las propiedades del tiempo de permanencia bajo perturbaciones pequeñas.

Primero se revisa un resultado que caracteriza las perturbaciones de rango uno para las cuales el operador,

$$H_0 = M + c|\psi\rangle\langle\psi|$$

tiene exactamente un valor propio (simple) inmerso en el espectro continuo, con vector propio correspondiente  $\varphi$ . Aquí,  $M$  es un operador absolutamente continuo y  $c$  una constante adecuada.

Luego se perturba este operador nuevamente por un operador de rango uno y se proporciona una estimación explícita del tiempo de permanencia utilizando la teoría de perturbaciones y técnicas de deformación analítica.

Así, consideramos el operador

$$H_\epsilon = H_0 + \epsilon |\psi\rangle\langle\psi|$$

que para  $\epsilon$  pequeño no tiene valores propios.

Se demuestra que en este caso el tiempo de permanencia en un vector  $\varphi$  para pequeñas perturbaciones, es finito y que, bajo ciertas condiciones, es proporcional a  $\epsilon^{-2}$ , donde  $\epsilon$  representa la magnitud de la perturbación.

En el caso en que  $M$  sea el operador de multiplicación por  $x$  en  $L^2(\mathbb{R})$  y  $\psi$  sea analítica en un sentido adecuado, podemos usar la técnica de traslación analítica para demostrar que el tiempo de vida,

$$\tau(\varphi) = \frac{1}{2\Gamma} + O\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

La cantidad  $\frac{1}{2\Gamma}$  coincide con el término correspondiente de la regla de oro de Fermi,

$$2\epsilon^{-2} \operatorname{Im} \langle \varphi, R_\epsilon(E_0)\varphi \rangle$$

donde  $E_0$  es el valor propio y  $R_\epsilon$  la resolvente reducida del operador  $H_0$ .

Existen numerosos trabajos (ver por ejemplo las referencias mencionadas en [1]) que describen resonancias mediante el análisis del comportamiento de la amplitud de supervivencia, es decir, la función  $R(t) = \langle \varphi, e^{-iHt}\varphi \rangle$  que, en muchos casos, incluye leyes explícitas de decaimiento exponencial para esta cantidad.

#### 4. Perturbaciones de rango finito

Los resultados contenidos en las dos secciones anteriores pueden ser extendidos al caso de perturbaciones de rango finito. Esta generalización no es inmediata, de hecho ya en el uso de la fórmula de Krein para expresar la resolvente perturbada en términos de la resolvente libre, aparece un término matricial, que obliga al uso de descomposiciones matriciales, lo que para rango uno se reduce a una función real.

Este tipo de resultados ha sido desarrollado ampliamente en el artículo [4]. Allí, se estudia el comportamiento del espectro del operador perturbado

$$H_{\beta} = H_0 + \sum_{i=1}^N \beta_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|,$$

donde  $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$  es un conjunto de vectores ortonormales en  $\mathcal{H}$  y  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ ,  $\beta_i \in \mathbb{R}$ , para  $i = 1, \dots, N$ .

Aquí,  $H_0$  es un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

Como en el caso de rango uno, para demostrar que una parte del operador es absolutamente continua es necesario imponer una especie de regla de oro, que se traduce en la positividad de una cantidad que involucra a la resolvente reducida.

El estudio se centra en dos aspectos principales: la identificación de subespacios en los que el operador perturbado  $H_\beta$  tiene un espectro absolutamente continuo, y su comportamiento resonante cuando el operador libre  $H_0$  tiene un valor propio inmerso en el espectro absolutamente continuo.

Para ambos resultados se requiere además una serie de relaciones entre la resolvente del operador  $H_\beta$  y los subespacios,

$$\mathcal{M}_\beta = \overline{\text{span}\{R_\beta(z)\psi_j : j = 1, \dots, N, z \notin \mathbb{R}\}}.$$

Aquí,  $R_\beta = (H_\beta - z)^{-1}$  es la resolvente del operador  $H_\beta$ , definida para  $z$  un número complejo fuera de su espectro.

En el caso de una perturbación de rango uno,  $\mathcal{M}$  es simplemente el subespacio cíclico asociado al operador  $H_\beta$  y al vector  $\psi$ .

Los resultados respectivos aparecen en [7] para el caso de rango uno y en [5] para el caso de rango finito y se basan en un estudio espectral detallado que se encuentra en [10].

La estrategia empleada depende también de una versión extendida de la fórmula de Krein. Para formular este principio, notamos que la perturbación de rango finito puede ser factorizada,

$$V_\beta = \tau_\beta^* \tau_\beta = \sum_{i=1}^N \beta_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

donde  $\tau_\beta : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}^N$  está definido por

$$\tau_\beta \phi = \begin{bmatrix} \sqrt{\beta_1} \langle \psi_1, \phi \rangle \\ \sqrt{\beta_2} \langle \psi_2, \phi \rangle \\ \vdots \\ \sqrt{\beta_N} \langle \psi_N, \phi \rangle \end{bmatrix}$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto interior en el espacio de Hilbert.

La fórmula de Krein ahora establece: sean  $R_0(z)$  y  $R_\beta$  las resolventes de los operadores  $H_0$  and  $H_\beta$  respectivamente. Entonces, para  $\Im z > 0$ ,

$$R_\beta(z) = R_0(z) - R_0(z) \tau_\beta^* (1 + \tau_\beta R_0(z) \tau_\beta^*)^{-1} \tau_\beta R_0(z).$$

Notamos que  $(1 + \tau_\beta R_0(z)\tau_\beta^*)$  es una matriz compleja invertible, a diferencia del caso de rango uno, en que esta cantidad es un escalar.

En relación con el comportamiento resonante, en este artículo se establece que, en caso que el operador no perturbado  $H_0$  tenga un autovalor inmerso en el espectro absolutamente continuo, el operador perturbado  $H_\beta$  exhibe un comportamiento resonante. Específicamente, la cantidad

$$|\langle \varphi_0, e^{-iH_\beta t} \varphi_0 \rangle|^2$$

se comporta casi exponencialmente. Las herramientas utilizadas en la demostración de estos resultados son nuevamente una regla de oro y fórmulas adecuadas de Krein y Feshbach-Livsic. Además, se estima el correspondiente tiempo de permanencia.

## 5. Perturbaciones singulares

Las interacciones tipo delta en Mecánica Cuántica presentan una serie de dificultades técnicas y conceptuales debido a la naturaleza singular de la delta de Dirac  $\delta$ . La principal dificultad es que el Hamiltoniano con una interacción delta no es un operador autoadjunto en el sentido convencional, lo que complica el tratamiento riguroso del sistema.

Para un operador autoadjunto  $H_0$  que actúa en el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , estamos hablando de

$$H_\beta = H_0 + \beta |\delta\rangle\langle\delta|,$$

que opera como

$$H_\beta \psi = H_0 \psi + \beta \psi \delta$$

Este tipo de interacción puede ser tratado mediante regularización, y es útil para modelar interacciones locales. De hecho, la interacción está localizada en el origen, de modo que no influye para elementos del espacio de Hilbert que se anulen en una vecindad de cero.

Además, se establece que esta interacción puede ser considerada una perturbación de rango uno, lo que permite un tratamiento simplificado en muchos casos de interés. Este hecho se explota en [4], donde, aparte de discutir las estrategias para caracterizar el Hamiltoniano como operador autoadjunto, se demuestra una correspondiente fórmula de Krein.

En dicho trabajo se extienden estas ideas a perturbaciones singulares más generales, incluyendo por ejemplo potenciales localizados en una superficie en el espacio  $n$ -dimensional.

Se explicitan los dominios donde el operador singular  $H_\beta$  es autoadjunto. Además, se establecen fórmulas para las correspondientes funciones de Green, para el caso  $H_0 = -\Delta + V(x)$  como operador actuando en  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

En particular, se demuestra en este caso el conocido teorema de Weyl, sobre la invariancia del espectro esencial bajo perturbaciones compactas autoadjuntas. Para estas perturbaciones singulares damos un resultado sobre la existencia de un espectro puntual puro (valores propios) de  $H_\beta$ .

La idea principal es aplicar una tipo de fórmula de Krein en este marco singular, junto con la correspondiente relación entre las funciones de Green asociadas a los operadores  $H_0$  y  $H_\beta$ .

Como ejemplo explícito, se considera una clase especial de perturbaciones singulares del operador autoadjunto  $H_0 = -\Delta + V(x)$  en el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , donde  $V(x)$  es una función acotada de valor real.

Especificamente, consideraremos el operador perturbado  $H_\beta$  de  $H_0$  dado por el operador singular  $|\delta_S\rangle\langle\delta_S|$  del tipo

$$H_\beta = H_0 + \beta |\delta_S\rangle\langle\delta_S|,$$

donde  $S$  es la frontera de un dominio de Lipschitz acotado  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\beta$  es un parámetro real y

$$\delta_S(\varphi) = \int_S \varphi \, d\sigma$$

donde  $d\sigma$  es el elemento de área de la superficie  $S$ .

Hay varios trabajos de perturbaciones singulares en una dimensión, es decir, perturbaciones del tipo Función *delta* en un punto. En ellos se caracteriza el dominio de estos operadores en términos de una condición de frontera. Seguimos este enfoque y somos capaces de relacionarlo con un operador acotado en un espacio de Sobolev adecuado.

Por último, en dicho artículo se estudia la posible estabilidad de autovalores del operador libre  $H_0 = -\Delta + V(x)$ , sujeto a una perturbación singular.

Ya que en estos espacios el operador se comporta como un verdadero operador de rango uno, es posible establecer una fórmula de Krein en este contexto, la que se usa para demostrar una versión del teorema de Weyl.

## 6. Herramientas técnicas

Hemos incluido esta sección a sugerencia de uno de los evaluadores de este artículo, sugerencia que por cierto agradecemos. El propósito es explicar con más detalle algunas herramientas útiles en teoría espectral y que son ampliamente conocidas en el área de teoría de perturbaciones.

### 6.1. La fórmula de Feshbach-Livsic

Dado un operador autoadjunto  $H$  en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . La idea es estudiar la resolvente del operador  $H$  reducido a un subespacio  $\mathcal{M}$ .

Sea  $P$  la proyección ortonormal asociada al subespacio  $\mathcal{M}$  y sea  $P^\perp = I - P$ , donde  $I$  es el operador identidad en  $\mathcal{H}$ . Consideremos el operador (el operador de Feshbach),

$$F(z) = PHP - PHP^\perp(H^\perp - z)^{-1}P^\perp HP,$$

donde  $H^\perp$  es el operador  $H$  reducido al complemento ortogonal de  $\mathcal{M}$ . Entonces,

$$P(H - z)^{-1}P = (F(z) - z)^{-1}$$

Esta fórmula permite estudiar la resolvente de un operador autoadjunto general, reducido a un subespacio dado  $\mathcal{M}$  y muestra como éste depende de la acción de vectores en el complemento ortogonal de  $\mathcal{M}$ , ver [12].

### 6.2. La fórmula de Krein

Esta es una fórmula explícita para la diferencia de las resolventes de dos operadores autoadjuntos  $H$  y  $H_0$ . Establece,

$$R(z) - R_0(z) = -R_0(z)L_V(z)R_0(z),$$

donde  $z$  es un número complejo no real y  $L_V(z)$  es un operador que depende de la perturbación  $V \equiv H - H_0$ . Por ejemplo, cuando  $V = A^*B$ , la fórmula expresa,

$$L_V(z) = A^*(I - BR_0(z)A^*)^{-1}B$$

Hay muchos ejemplos para los cuales es posible factorizar la perturbación  $V$  de modo de obtener una expresión muy simple para el operador  $L_V(z)$ . Por ejemplo, en el caso de rango uno,  $V = \kappa\langle\varphi, \cdot\rangle\varphi$ , resulta,

$$L_V(z) = \frac{\kappa}{1 + \kappa\langle\varphi, R_0(z)\varphi\rangle}\langle\varphi, \cdot\rangle.$$

Esta fórmula puede ser muy útil en Teoría Espectral puesto que en ella es fácil identificar posibles ceros y polos (como función de  $z$ ) de la resolvente.

Para el caso de perturbaciones de rango finito, es posible obtener una expresión matricial para la fórmula de Krein que se muestra en la Sección 4.

El caso singular, vale decir, perturbaciones que incluyan funciones de tipo delta, también puede ser tratado con esta técnica.

### 6.3. La regla dorada de Fermi

Esta regla es un resultado fundamental en Mecánica Cuántica pero que, en realidad, no usamos en los trabajos aquí mencionados. Solamente, hacemos notar que el parámetro  $\Gamma$  que rige el comportamiento casi exponencial de la probabilidad

$$P(t) = |\langle \varphi, e^{-itH} \varphi \rangle|^2$$

aparece también en la regla dorada.

La regla de Fermi entrega la probabilidad de transición entre dos estados adecuados y, en nuestro caso,  $P(t)$  es precisamente la probabilidad de transición entre el estado en tiempo  $t$ , es decir  $e^{-itH} \varphi$  y el estado inicial  $\varphi$ .

Para el caso en que

$$H = H_0 + \epsilon V,$$

la regla indica que para  $\epsilon$  pequeño, la probabilidad de transición debe ser proporcional a  $\epsilon^2$ .

En la Sección 3, presentamos estimaciones para el tiempo de vida

$$\tau(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) dt.$$

En el caso resonante, se espera que la probabilidad  $P(t)$  tenga, para tiempo  $t$  grande, un comportamiento aproximado de la forma  $e^{-\Gamma t}$ , de modo que el tiempo de vida  $\tau$  se debe comportar como  $\frac{1}{2\Gamma}$ .

De hecho, en el caso de rango uno, el término que más influye en el tamaño de  $\tau$  tiene la forma  $c\epsilon^{-2}$ , con  $c$  positivo. Esto es consistente con lo que indica la regla dorada.

#### 6.4. La estimación de Mourre

La estimación de Mourre (o commutadores positivos) es una herramienta fundamental en Teoría Espectral, particularmente para descartar la existencia de valores propios y de espectro singular continuo.

Decimos que un operador autoadjunto  $H$  satisface una estimación de Mourre en un intervalo real  $J$  si existe un operador autoadjunto  $A$  tal que.

$$E_J i[H, A]E_J \geq cE_J + KE_J.$$

Aquí,  $c$  es una constante positiva y  $K$  es un operador compacto. Además,

$$[H, A] = HA - AH$$

es el commutador entre los operadores  $H$  y  $A$ .

Bajo hipótesis adecuadas que aseguren entre otras cosas, que el commutador  $i[H, A]$  es un operador autoadjunto, la existencia de la estimación de Mourre, ver [16], tiene consecuencias muy relevantes, tales como la ausencia de espectro singular continuo en  $J$ , la estabilidad del espectro absolutamente continuo, un control de posibles valores propios y la existencia del límite de la resolvente  $R(z)$ , cuando  $z$  se acerca al eje real.

### 7. Algunos problemas abiertos

1. Estudio de perturbaciones fuera del espectro absolutamente continuo: aunque el trabajo se centra en operadores con valores propios inmersos en el espectro absolutamente continuo, es posible considerar perturbaciones de operadores con valores propios aislados. Es el caso por ejemplo, de las “shape resonances”, ver por ejemplo [2] y [15]. En estos trabajos un operador  $H$ , con un potencial de soporte compacto se considera una perturbación del operador  $H_0$  que tiene una barrera de potencial infinita. La perturbación es grande pero puede ser pequeña en la región donde los vectores propios de  $H_0$  son exponencialmente pequeños. En estos casos, se podría obtener decaimiento casi exponencial además de la concentración espectral.
2. Aplicaciones a sistemas más generales de Sturm-Liouville: la teoría podría extenderse a sistemas más generales que no sean estrictamente de Sturm-Liouville, como operadores no lineales o sistemas que incluyan interacciones de largo alcance.

3. La concentración espectral en presencia de una resonancia, podría ser explorada con más detalle. Por ejemplo, para el caso de una perturbación de rango uno,

$$H_\kappa = H_0 + \kappa |\psi\rangle\langle\psi|,$$

donde  $H_0$  es un operador autoadjunto con un valor propio  $\lambda$ , con  $H_0\varphi = \lambda\varphi$ . Como mostramos en la Sección 2, puede ocurrir que para  $\kappa$  pequeño,  $H_\kappa$  sea absolutamente continuo (o tenga espectro absolutamente continuo en una vecindad de  $\lambda$ ). Ciertamente, debemos tener que

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} E_J^\kappa \varphi = \varphi,$$

donde  $E_J^\kappa$  es la proyección espectral asociada al operador  $H_\kappa$ , en un intervalo  $J$  que contenga a  $\lambda$ . Sería interesante estudiar el orden de la concentración del espectro en torno a  $\lambda$ , o sea encontrar  $\Gamma_\kappa$ , que tienda a 0 cuando  $\kappa$  tienda a 0, óptimal, tal que si  $J_\kappa$  es el intervalo centrado en  $\lambda$  y de radio  $\Gamma_\kappa$ , entonces todavía se tenga,

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} E_{J_\kappa}^\kappa \varphi = \varphi,$$

La concentración espectral es un fenómeno mucho más general introducido en [14]. Mencionamos también [9] para una relación con resonancias. También se podría estudiar esta propiedad para perturbaciones de rango finito y perturbaciones singulares.

4. Regla de oro de Fermi en sistemas: la regla de oro de Fermi es una herramienta central en este trabajo. Sería interesante investigar su aplicabilidad y ajustes por ejemplo cuando se consideran perturbaciones dependientes del tiempo, incluso para rango finito o singular.
5. Análisis del comportamiento de la función de supervivencia en sistemas dinámicos: el comportamiento de la amplitud de supervivencia  $R(t) = \langle \varphi, e^{-iHt}\varphi \rangle$  se plantea aquí para la ecuación de Schrödinger. Un área de investigación futura podría ser el estudio detallado de su comportamiento por ejemplo para la ecuación de Dirac o para el movimiento de ondas.
6. Estudio de la estabilidad espectral y el tiempo de vida en presencia de perturbaciones singulares: la estabilidad de los autovalores bajo perturbaciones singulares es un tema clave en el artículo. Un área interesante para futuras investigaciones sería el análisis del tiempo de vida o el tiempo de decaimiento de los estados cuánticos asociados a los autovalores, especialmente en presencia de perturbaciones singulares. Además de la formulación de un teorema de estabilidad espectral más general para sistemas con perturbaciones singulares.
7. Extensión de la teoría a perturbaciones dependientes del tiempo: en el artículo, las perturbaciones son estáticas, pero se podría investigar el comportamiento de perturbaciones dependientes del tiempo, de tipo delta. Estudiar cómo evoluciona el espectro en presencia

de perturbaciones dinámicas podría proporcionar nuevas perspectivas, particularmente en sistemas cuánticos fuera de equilibrio.

8. Extensión de los resultados al caso de perturbaciones no autoadjuntas: aunque el enfoque se limita a operadores autoadjuntos, sería interesante explorar cómo los resultados se generalizan a operadores no autoadjuntos que podrían surgir en ciertos modelos cuánticos. En particular, estudiar la estabilidad y la caracterización dinámica de las resonancias para estos operadores podría ser un área de gran interés.
9. Estudio de la estabilidad espectral, resonancia y concentración espectral para operadores de Schrödinger discretos. Mencionamos [3] para resultados en esta área.

## Referencias

- [1] J. Asch, M. A. Astaburuaga, P. Briet, V. H. Cortés, P. Duclos, y C. Fernández, “Sojourn time for rank one perturbations,” *J. Math. Phys.*, vol. 47, no. 3, 2006, Art. ID 033501.
- [2] J. Asch, O. Bourget, V. H. Cortés, y C. Fernández, “Lower bounds for sojourn time in a simple shape resonance model,” in *Spectral theory and mathematical physics*, ser. Oper. Theory Adv. Appl. Birkhäuser/Springer, [Cham], 2016, vol. 254, pp. 1–9.
- [3] M. Assal, O. Bourget, P. Miranda, y D. Sambou, “Resonances for quasi-one-dimensional discrete schrödinger operators,” 2022, *arXiv:2203.01352*.
- [4] M. A. Astaburuaga, V. H. Cortés, C. Fernández, y R. Del Río, “Singular rank one perturbations,” *J. Math. Phys.*, vol. 63, no. 2, 2022, Art. ID 023502, doi: 10.1063/5.0061250.
- [5] M. A. Astaburuaga, V. H. Cortés, C. Fernández, y R. Del Río, “Resonances and stability of absolutely continuous spectrum for finite rank perturbations,” *Pure Appl. Funct. Anal.*, vol. 9, no. 4, pp. 899–914, 2024.
- [6] M. A. Astaburuaga, P. Covian, y C. Fernández, “Behavior of the survival probability in some one-dimensional problems,” *J. Math. Phys.*, vol. 43, no. 10, pp. 4571–4581, 2002, doi: 10.1063/1.1500426.
- [7] O. Bourget, V. H. Cortés, R. Del Río, y C. Fernández, “Resonances under rank-one perturbations,” *J. Math. Phys.*, vol. 58, no. 9, 2017, Art. ID 093502, doi: 10.1063/1.4989882.
- [8] L. Cattaneo, G. M. Graf, y W. Hunziker, “A general resonance theory based on Mourre’s inequality,” *Ann. Henri Poincaré*, vol. 7, no. 3, pp. 583–601, 2006, doi: 10.1007/s00023-005-0261-5.
- [9] E. B. Davies, “Resonances, spectral concentration and exponential decay,” *Lett. Math. Phys.*, vol. 1, no. 1, pp. 31–35, 1975/76, doi: 10.1007/BF00405583.
- [10] W. F. Donoghue, Jr., “On the perturbation of spectra,” *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 18, pp. 559–579, 1965, doi: 10.1002/cpa.3160180402.
- [11] P. D. Hislop e I. M. Sigal, *Introduction to spectral theory*, ser. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1996, vol. 113.
- [12] J. S. Howland, “The Livsic matrix in perturbation theory,” *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 50, pp. 415–437, 1975.
- [13] A. Jensen, “Lecture notes on Schrödinger operators: Resonances arising from a perturbed eigenvalue,” Aalborg, Denmark, 2010.

- 
- [14] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, 2nd ed., ser. Classics in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1995.
  - [15] R. Lavine, “Spectral densities and Sojourn times,” in *Atomic Scattering Theory*, J. Nuttall, Ed. London, Ontario: University of Western Ontario Press, 1978, pp. 45–61.
  - [16] E. Mourre, “Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators,” *Comm. Math. Phys.*, vol. 78, no. 3, pp. 391–408, 1980/81.
  - [17] B. Simon, “Resonances and complex scaling: A rigorous overview,” *Int. J. Quantum Chemistry*, vol. 14, pp. 529–542, 1978, doi: 10.1002/qua.560140415.
  - [18] B. Simon, “Spectral analysis of rank one perturbations and applications,” in *Mathematical quantum theory. II. Schrödinger operators (Vancouver, BC, 1993)*, ser. CRM Proc. Lecture Notes. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, vol. 8, pp. 109–149.



**CUBO**  
*A Mathematical Journal*

---

All papers submitted to CUBO are pre-evaluated by the Editorial Board, who can decide to reject those articles considered imprecise, unsuitable or lacking in mathematical soundness. These manuscripts will not continue the editorial process and will be returned to their author(s).

Those articles that fulfill CUBO's editorial criteria will proceed to an external evaluation. These referees will write a report with a recommendation to the editors regarding the possibility that the paper may be published. The referee report should be received within 120 days. If the paper is accepted, the authors will have 15 days to apply all modifications suggested by the editorial board.

The final acceptance of the manuscripts is decided by the Editor-in-chief and the Managing editor, based on the recommendations by the referees and the corresponding Associate editor. The author will be formally communicated of the acceptance or rejection of the manuscript by the Editor-in-chief.

All opinions and research results presented in the articles are of exclusive responsibility of the authors.

**Submitting:** By submitting a paper to this journal, authors certify that the manuscript has not been previously published nor is it under consideration for publication by another journal or similar publication. Work submitted to CUBO will be refereed by specialists appointed by the Editorial Board of the journal.

**Manuscript:** Manuscripts should be written in English and submitted in duplicate to [cubo@ufrontera.cl](mailto:cubo@ufrontera.cl). The first page should contain a short descriptive title, the name(s) of the author(s), and the institutional affiliation and complete address (including e-mail) of each author. Papers should be accompanied by a short abstract, keywords and the 2020 AMS Mathematical Subject Classification codes corresponding to the topic of the paper. References are indicated in the text by consecutive Arabic numerals enclosed in square brackets. The full list should be collected and typed at the end of the paper in numerical order.

**Press requirement:** The abstract should be no longer than 250 words. CUBO strongly encourages the use of L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X for manuscript preparation. References should be headed numerically, alphabetically organized and complete in all its details. Authors' initials should precede their names; journal title abbreviations should follow the style of Mathematical Reviews.

All papers published are Copyright protected. Total or partial reproduction of papers published in CUBO is authorized, either in print or electronic form, as long as CUBO is cited as publication source.

---

For technical questions about CUBO, please send an e-mail to [cubo@ufrontera.cl](mailto:cubo@ufrontera.cl).





ARTICLES

**Pseudoinverses of morphisms between Abelian varieties**

*Pseudoinversos de morfismos entre variedades abelianas*

Robert Auffarth

**Some infinite extensions of  $\mathbb{Q}$  satisfying Bogomolov's property**

*Algunas extensiones infinitas de  $\mathbb{Q}$  con la propiedad de Bogomolov*

Benjamín Castillo

**A simple observation concerning the vector of Riemann constants and non-special divisors of generalized Fermat curves**

*Una observación sencilla sobre vectores de constantes de Riemann y divisores no-especiales de curvas generalizadas de Fermat*

Rubén A. Hidalgo

**The maximal function, an Orlicz-Lorentz subspace, and the multiplication operator**

*Función maximal, un subespacio de Orlicz-Lorentz, y el operador multiplicación*

René Erlin Castillo and Héctor Camilo Chaparro

**Fermentation bioreactor with stochastic consumption rate**

*Biorreactor de fermentación con tasa estocástica de consumo*

Ricardo Castro Santis, Fernando Córdova-Lepe and Ana Belén Venegas Ramos

**Linear irreducible representations of finite groups over number fields**

*Representaciones lineales irreducibles de grupos finitos en cuerpos de números*

Rubí E. Rodríguez, Anita M. Rojas and Matías Saavedra-Lagos

**Special parameters and linear deformations of the family  $(\wp(z))^2 + c$**

*Parámetros especiales y deformaciones lineales de la familia  $(\wp(z))^2 + c$*

Adrián Esparza-Amador

**A note on finite-dimensional quotients and the problem of automatic continuity for twisted convolution algebras**

*Una nota sobre cocientes finito-dimensionales y el problema de continuidad automática para álgebras de convolución torcida*

Felipe Flores

**Deformations of abelian varieties with an automorphism group**

*Deformaciones de variedades Abelianas con un grupo de automorfismos*

U. Guerrero-Valadez, H. Torres-López and A. G. Zamora

**Mathematical analysis of an inverse problem for a reaction-diffusion system originated in epidemiology**

*Ánálisis matemático de un problema inverso para un sistema de reacción-difusión originado en epidemiología*

Aníbal Coronel, Fernando Huancas, Esperanza Lozada and Jorge Torres

SURVEYS

**Limit cycles in the plane: Contributions from Chile**

*Ciclos límite en el plano: Contribuciones desde Chile*

Johanna García-Saldaña and Salomón Rebollo-Perdomo

**Topological aspects of symmetries on surfaces**

*Aspectos topológicos de las simetrías en superficies*

Israel Morales and Juan Armando Parra

**Non-linear subdivision schemes: 25 years of history through 75 contributions**

*Esquemas de subdivisión no lineales: 25 años de historia a través de 75 contribuciones*

Sergio Amat, Sonia Busquier, David Levin and Juan C. Trillo

**Spectral stability and resonances for finite rank and singular perturbations**

*Estabilidad espectral y resonancias para perturbaciones de rango finito y singularidades*

M. Angélica Astaburuaga, Víctor H. Cortés, Claudio Fernández and Rafael del Río

